Révisez Votre Bac

Notre site « www.BAC.org.tn » vous donne accès à :

1- Des Examens de baccalauréat

2- Des Devoirs de contrôle et synthèse ‘’ Sfax et Autres ‘’

3- Des Cours et des résumés ‘’ Facile A comprendre ’’

4- Des Séries avec corrigés

5- Des Quiz et des tests d’intelligence avec score

6- Des Groupes de discussion privée pour résoudre vos problèmes

7- Vous Pouvez Gagnés D’argent Facilement

Loi de modération

Les facteurs d'équilibres sont les variables pouvant perturber un système en équilibre dynamique

- La température
- La pression
- La concentration de l'un des constituants

1°) Influence de la pression.

- si une perturbation tend à température constante, à augmenter la pression d'un système fermé initialement en équilibre dynamique, ce système subit la réaction qui tend à diminuer la pression càd la réaction qui diminue le nombre de moles des corps gazeux.

exemple

soit $aA(g) + bB(g) \underset{2}{\overset{1}{\rightleftharpoons}} cC(g) + dD(g)$

variation du n(g)	si P ↗	si P ↘
$(c+d) < (a+b)$	le système évolue dans le sens (1)	le système évolue sens
$(a+b) = (c+d)$	la pression n'a pas d'effet sur le système car $n_T(g)$ ne varie pas	
$(c+d) > (a+b)$	sens inverse	sens direct

Enoncé de la loi :

dans un système en équilibre chimique une perturbation fait varier la pression à T constante pour un système fermé, le système subit en réponse à cette perturbation la réaction qui tend à modérer la variation de la pression.

2°) Influence de la concentration

à T et P = cte, à l'équilibre la variation de la concentration de l'un des constituants déplace le système dans le sens qui tend à modérer cette variation.

3°) Influence de la température

* si une perturbation tend, sous P = cte, à élever la température d'un système fermé initialement en équilibre dynamique, ce système subit la transformation endothermique

* si une perturbation tend, sous pression constante, à abaisser la température d'un système fermé initialement en équilibre dynamique, ce système subit la transformation exothermique

Remarques :

* La température n'est pas un facteur d'équilibre pour toute réaction athermique (estérification – hydrolyse)

* Pour toute réaction exothermique ou endothermique la constante d'équilibre K change lorsque la température varie

- sens (1) ↗ x_f ⇒ ↗ K
- sens (2) ↘ x_f ⇒ ↘ K

* $A + B \underset{\text{endothermique}}{\overset{\text{exothermique}}{\rightleftharpoons}} C + d + \text{chaleur}$

Fin

Equilibre acide - base

I - Définitions

* Un acide est une entité chimique, électriquement chargée ou non, capable de libérer un proton H^+ au cours d'une réaction chimique

$$AH \rightleftharpoons A^- + H^+$$

acide — base conjuguée

AH/A^- : couple acide - base

* Une base est une entité chimique électriquement chargée ou non, capable de capter un proton H^+ au cours d'une réaction chimique

$$B + H^+ \rightleftharpoons BH^+$$

base — acide conjugué

II / Loi d'action de masse

$$\text{Acide 1} + \text{base 2} \rightleftharpoons \text{base 1} + \text{acide 2}$$

$$K = \frac{[\text{base 1}]_{éq} \cdot [\text{Acide 2}]_{éq}}{[\text{Acide 1}]_{éq} \cdot [\text{base 2}]_{éq}}$$

- si $K > 1$: les entités situées à gauche sont les plus forts
  $\Rightarrow$ L'acide 1 est plus fort que l'acide 2
  la base 2 est plus forte que la base 1
- si $K < 1$: les entités situées à droite sont les plus forts
  $\Rightarrow$ L'acide 2 est plus fort que l'acide 1
  la base 1 est plus forte que la base 2
- si $K = 1$: L'acide 1 et l'acide 2 sont de même force, il en est de même pour la base 1 et base 2

$\Rightarrow$ donc l'acide le plus fort est conjugué à la base la plus faible

1°) Rt d'ionisation d'un AH dans l'eau :

$$AH + H_2O \rightleftharpoons A^- + H_3O^+$$

$$K_a = \frac{[H_3O^+][A^-]}{[AH]}$$ constante d'acidité du couple AH/A^-

par définition $pK_a = -\log K_a$

$\Leftrightarrow K_a = 10^{-pK_a}$

exemple $K_a(H_3O^+/H_2O) = 55,35$

$pK_a(H_3O^+/H_2O) = -1,74$

2°) Rt d'ionisation d'une base dans l'eau :

$$B + H_2O \rightleftharpoons BH^+ + OH^-$$

$$K_b = \frac{[OH^-][BH^+]}{[B]}$$ constante de basicité du couple BH^+/B

$pK_b = -\log K_b \Leftrightarrow K_b = 10^{-pK_b}$

exemple $K_b(H_2O/OH^-) = 55,35$

$pK_b(H_2O/OH^-) = -1,74$

3°) Relation entre K_a et K_b d'un couple AH/A^-

pour le couple AH/A^- on a :

$$K_a = \frac{[H_3O^+][A^-]}{[AH]} \;;\; K_b = \frac{[OH^-][AH]}{[A^-]}$$

$$K_a \cdot K_b = [H_3O^+] \cdot [OH^-]$$

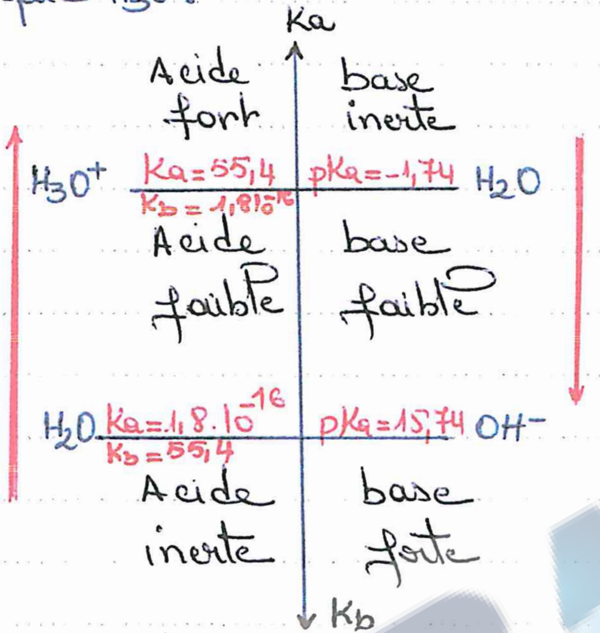
$\Rightarrow K_a \cdot K_b = K_e = 10^{-14}$ à $25°C$

$\Rightarrow pK_a + pK_b = pK_e = 14$ à $25°C$

4°) force des acides et des bases

- plus K_a est élevé, plus pK_a est faible, plus l'acide est plus fort.
- plus K_b est élevé plus pK_b est faible, plus la base est plus forte
- plus un acide est fort, plus sa base conjuguée est faible et inversement

- Un acide est dit fort est un acide plus fort que H_3O^+ $\Rightarrow pKa < -1{,}74$
- Un acide inerte est un acide nettement moins fort que H_2O
  $\Rightarrow pKa > 15{,}74$
- Un acide faible est un acide plus fort que H_2O, mais moins fort que H_3O^+.



III / Réaction acide _ base

A_1H / A_1^- Ka_1 ; Kb_1

A_2H / A_2^- Ka_2 ; Kb_2

$$A_1H + A_2^- \rightleftarrows A_2H + A_1^-$$

$$K = \frac{[A_2H]\cdot[A_1^-]}{[A_1H]\cdot[A_2^-]}$$

$$= \frac{[H_3O^+]\cdot[A_1^-]}{[A_1H]} \cdot \frac{[A_2H]}{[H_3O^+]\cdot[A_2^-]}$$

$$K = Ka_1 \cdot \frac{1}{Ka_2} = \frac{10^{-pKa_1}}{10^{-pKa_2}} = 10^{pKa_2 - pKa_1}$$

de même

$$K = \frac{Kb_2}{Kb_1} = \frac{10^{-pKb_2}}{10^{-pKb_1}}$$

$$K = 10^{pKb_1 - pKb_2}$$

Remarque

* si $K > 10^4$ la réaction est pratiquement totale dans le sens direct.

pH d'une solution aqueuse

Nature de la solution :

- solution acide

$[H_3O^+] > [OH^-] \Rightarrow pH < \frac{pKe}{2}$

- solution basique

$[OH^-] > [H_3O^+] \Rightarrow pH > \frac{pKe}{2}$

- solution neutre

$[OH^-] = [H_3O^+] \Rightarrow pH = \frac{pKe}{2}$

Définition

Le pH d'une solution est une grandeur strictement positive liée à la concentration de $[H_3O^+]$ par la relation

$pH = -\log[H_3O^+] \Rightarrow [H_3O^+] = 10^{-pH}$

I/ pH d'une solution aqueuse d'acide fort :

$2H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + OH^-$

$AH + H_2O \longrightarrow H_3O^+ + A^-$

	AH	H_2O	H_3O^+	A^-	
à t=0	C	excès	$10^{-\frac{pKe}{2}}$	0	$mol\,L^{-1}$
à t_f	$C - y_f$	excès	10^{-pH}	y_f	$mol\,L^{-1}$

$* [H_3O^+] = [H_3O^+]_{eau} + [H_3O^+]_{acide}$

$= [OH^-] + [A^-]$

$= [OH^-] + y_f$

le milieu est acide et $pH < 6 \Rightarrow$

$[OH^-] \ll [H_3O^+]$

$\Rightarrow [H_3O^+] = y_f$

$* \tau_f = \frac{y_f}{C} = \frac{[H_3O^+]}{C} = \frac{10^{-pH}}{C}$

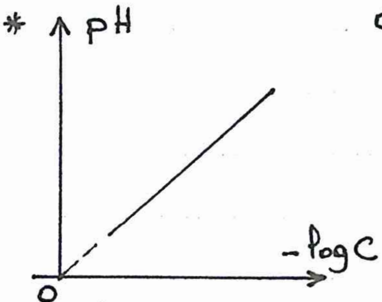
$*$ L'acide est fort : $\tau_f = 1$

$\Rightarrow \frac{10^{-pH}}{C} = 1 \Rightarrow 10^{-pH} = C$

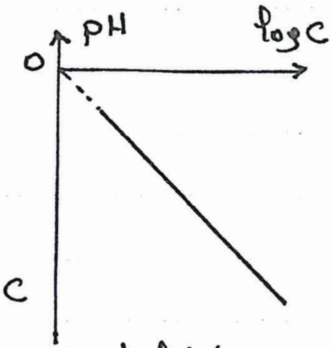
$pH = -\log C$

Acide fort : $pH = -\log C$

Remarque



droite linéaire de coeff directeur 1



droite linéaire de coeff directeur −1

* La dilution

$AH \; (S_1) \begin{cases} C_1 \\ V_1 \end{cases}$ dilution 10 fois $\Rightarrow (S_2) \begin{cases} C_2 = \frac{C_1}{10} \\ V_2 = 10\,V_1 \end{cases}$

- avant dilution $pH_1 = -\log C_1$
- après dilution $pH_2 = -\log \frac{C_1}{10}$

$= -\log C_1 + \log 10$

$pH_2 = pH_1 + 1$

variation de pH : $\Delta pH = pH_2 - pH_1 =$

En général après dilution n fois

$pH_2 = pH_1 + \log n.$

$\Rightarrow$ acide + dilution $\Rightarrow pH \nearrow (<7)$

II/ pH d'une solution d'acide faible faiblement ionisé

Acide faiblement ionisé $\Rightarrow$

$\tau_f < 5\% \Rightarrow 1 - \tau_f \simeq 1$

$AH + H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + A^-$

	AH	H_2O	H_3O^+	A^-
à t=0	C	excès	$10^{-\frac{pKe}{2}}$	0
à t_f	$C - y_f$	excès	10^{-pH}	y_f

- $[H_3O^+] = [H_3O^+]_{eau} + [H_3O^+]_{acide}$

$= [OH^-] + [A^-]$

$= [OH^-] + y_f$

$\Rightarrow$ Le milieu est acide et $pH < 6$

$[OH^-] \ll [H_3O^+]$.

- $\tau_f = \dfrac{y_f}{y_m} = \dfrac{[H_3O^+]}{C_A} = \dfrac{10^{-pH}}{C_A}$

pour $\tau_f < 0{,}05 \Rightarrow$ L'acide est faiblement ionisé.

- $K_a = \dfrac{[H_3O^+][A^-]}{[AH]} = \dfrac{y_f^2}{C_A - y_f} = \dfrac{(C_A \cdot \tau_f)^2}{C_A - C_A\tau_f}$

$K_a = \dfrac{C_A^2 \cdot \tau_f^2}{C_A(1-\tau_f)} = \dfrac{C_A \cdot \tau_f^2}{1-\tau_f}$

pour un acide faiblement ionisé

$1 - \tau_f \simeq 1$

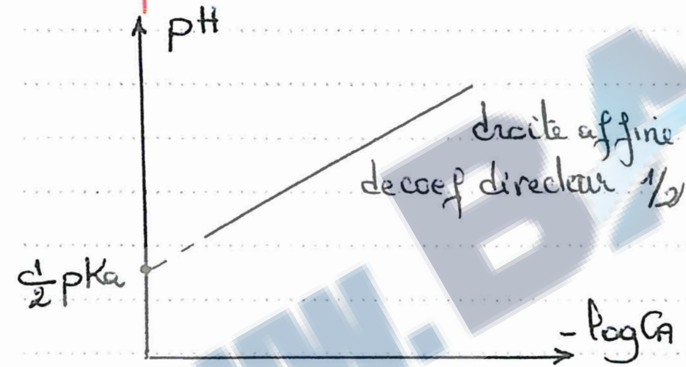
$\Rightarrow K_a = C_A \cdot \tau_f^2 = \dfrac{10^{-2pH} \cdot C_A}{C_A^2}$

$\log K_a = -2pH - \log C_A$

$2pH = -\log K_a - \log C_A$

$\boxed{pH = \frac{1}{2}(pK_a - \log C_A)}$ pour un acide faiblement ionisé

Remarque



$pH = -\frac{1}{2}\log C_A + \frac{1}{2}pK_a$

$pH = a(-\log C_A) + b$

* La dilution

$(A_1H)\,(S_1) \begin{cases} C_1 \\ V_1 \end{cases}$ dilution 10 fois $\begin{cases} C_2 = \dfrac{C_1}{10} \\ V_2 = 10V_1 \end{cases}$

avant dilution $pH = \frac{1}{2}(pK_a - \log C_1)$

après dilution $pH' = \frac{1}{2}(pK_a - \log C_2)$

$pH' = \frac{1}{2}(pK_a - \log C_1 + \log 10)$

$pH' = \frac{1}{2}(pK_a - \log C_1) + \frac{1}{2}\log 10$

$pH' = pH + 0{,}5$

En générale après dilution n fois

$pH_2 = pH_1 + \frac{1}{2}\log n$.

$\Rightarrow$ La dilution d'un acide fort ou faible augmente son pH tout en restant inférieur à 7.

* Préparation (Protocole)

$(S_1) \begin{cases} C_1 = 0{,}1\ mol\,L^{-1} \\ AH \end{cases} \longrightarrow (S_2) \begin{cases} C_2 = 0{,}01\ mol\,L^{-1} \end{cases}$

Materiel en disposition

fioles jaugées de 20 ml ; 50 ml ; 100 ml ; 250 ml

pipettes jaugées de 1 ml, ml, 5 ml ; 20 ml.

$\Rightarrow \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{0{,}1}{0{,}01} = 10$ fois

la solution (S_2) est 10 fois diluée

$\Rightarrow$ Materiel choisi

pipette de 5 ml et fiole jaugée de 50 ml

- A l'aide d'une pipette jaugée de 5 ml, on prélève 5 ml de la solution (S_1), que l'on introduit dans une fiole jaugée de 50 ml, puis on ajoute de l'eau distillée jusqu'au trait de jauge tout en agitant.

III / pH d'une solution aqueuse de base forte

$$2H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + OH^-$$

$$[OH^-] = \frac{Ke}{[H_3O^+]} = \frac{10^{-pKe}}{10^{-pH}} = 10^{pH-pKe}$$

	$NaOH \longrightarrow$	Na^+	$+ OH^-$	
Et $t=0$	C_B	0	$10^{-\frac{pKe}{2}}$	$mol.L^{-1}$
Et f	$C_B - y_f$	y_f	10^{pH-pKe}	" "

• $[OH^-] = [OH^-]_{eau} + [OH^-]_{base}$
$= [H_3O^+] + [Na^+]$

$[OH^-] = [H_3O^+] + y_f$

Le milieu est basique et pour $pH > 8$ on a $[H_3O^+] \ll [OH^-]$

$\Rightarrow [OH^-] = y_f$ ①

• la base est forte : $C_B - y_f = 0 \Rightarrow C_B = y_f$ ②

① et ② $C_B = [OH^-]$

$C_B = 10^{pH-pKe} \Rightarrow \log C_B = pH - pKe$

$$\boxed{pH = pKe + \log C_B}$$

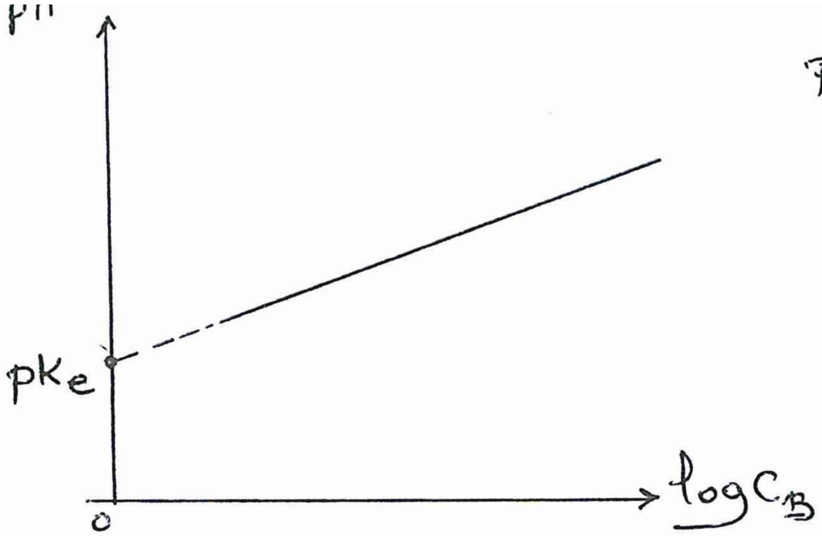
Rq $B_1 \begin{cases} C_1 \\ V_{pr} \end{cases}$ pH_1 $\xrightarrow[\text{diluée } n \text{ fois}]{V_{eau}}$ $B_2 \begin{cases} V_2 = n.V_{pr} \\ C_2 = \frac{C_1}{n} \end{cases}$ pH_2

• avant dilution $pH_1 = pKe + \log C_1$

• après dilution $pH_2 = pKe + \log C_2 = pKe + \log \frac{C_1}{n}$

$= \underbrace{pKe + \log C_1}_{} - \log n$

$pH_2 = pH_1 - \log n$



$pH = f(\log C_B)$ est une droite affine de coeff directeur 1.

IV pH d'une solution aqueuse de base faible

$$2H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + OH^-$$

$$B + H_2O \rightleftharpoons BH^+ + OH^-$$

$t=0$	C_B	excès	0	$10^{-\frac{pKe}{2}}$	$mol.L^{-1}$
t_f	$C_B - y_f$	excès	y_f	10^{pH-pKe}	" "

$$\bullet\ [OH^-] = [OH^-]_{eau} + [OH^-]_{base} = [H_3O^+] + [BH^+] = [H_3O^+] + y_f$$

le milieu est basique et pour $pH > 8$ on a $[H_3O^+] \ll [OH^-]$

$$[OH^-] = y_f$$

$$\bullet\ \tau_f = \frac{y_f}{y_m} = \frac{[OH^-]}{C_B} = \frac{10^{pH-pKe}}{C_B} \Rightarrow y_f = C_B \cdot \tau_f$$

si $\tau_f < 0{,}05$ (5%) $\Rightarrow$ la base est faiblement ionisé

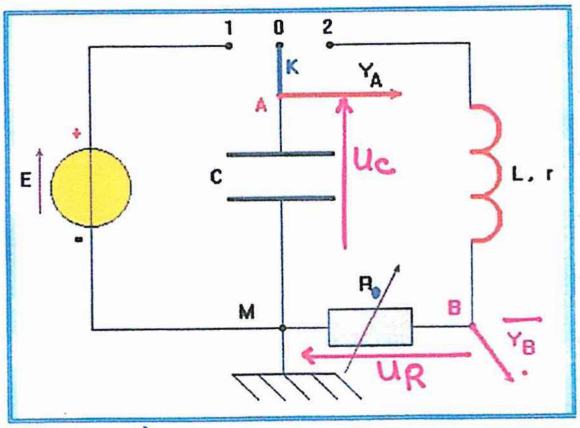
$$\bullet\ Ka = \frac{[H_3O^+][B]}{[BH^+]} = \frac{[H_3O^+]\cdot(C_B - y_f)}{y_f} = \frac{[H_3O^+]\cdot(C_B - C_B\cdot\tau_f)}{C_B\cdot\tau_f}$$

$$Ka = \frac{[H_3O^+](1-\tau_f)}{\tau_f}$$

2e approximation : la base est faiblement ionisé $\Rightarrow 1-\tau_f \simeq 1$

Les oscillations électriques libres amorties

1) Production d'oscillations libres amorties (décharge)



. K en (1) le condensateur se charge

. K en (2) le condensateur se décharge

à $t=0$ $\begin{cases} u_C = E \\ Q_0 = C.E \\ i = 0 \end{cases}$

- la tension $u_C = \frac{q}{C}$ oscille d'où $q(t)$ oscille aussi
- la tension $u_R(t) = i(t).R$ oscille d'où $i(t)$ oscille aussi
- Au cours du temps l'amplitude des oscillations diminue : les oscillations sont dites amorties.

* libres : absence de générateur dans le circuit de décharge (oscillations qui s'effectuent d'elles mêmes sans apport d'énergie de l'extérieur).

* Les oscillations libres amorties sont pseudo-périodique de pseudo période T

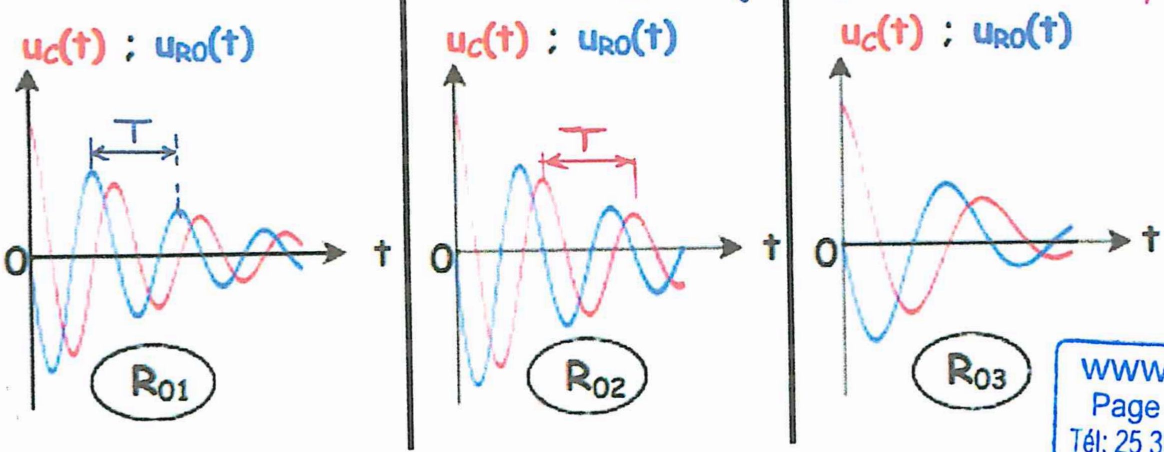
* selon les valeurs de $R = R_0 + r$ on a plus R augmente plus
  - le nombre d'oscillations diminue
  - l'amplitude des oscillations diminue

Remarque

* si R_T est faible alors $T \simeq T_0$ période propre $T \simeq 2\pi\sqrt{LC}$
  si $L\downarrow$ ou $C\downarrow$ alors $T\downarrow$

* R_c : résistance critique
c'est la plus petite valeur élevée de R qui correspond à un régime apériodique

$R < R_c$: régime pseudopériodique



$R_{03} > R_{02} > R_{01}$

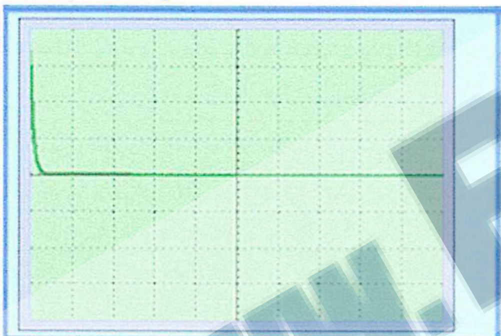
* La diminution de l'amplitude des oscillations est due à la diminution de l'énergie qui est perdue par effet joule dans le résistor.

Définition

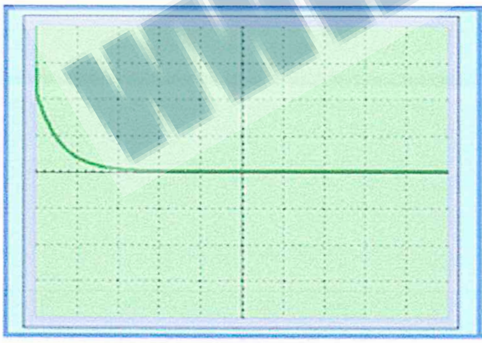
On appelle oscillations amorties les oscillations dont l'amplitude n'est pas constante, elle diminue au cours du temps.

* Pour des grandes valeurs de R c'est pour $R \geq R_C$

le régime devient apériodique, il n'y a plus d'oscillations



R = R_C, la tension tend rapidement vers zéro, c'est le régime critique.



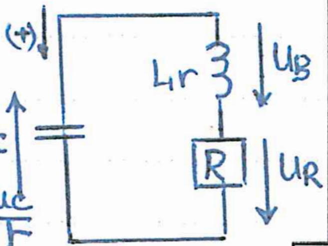
R > R_C, la tension tend vers zéro sans oscillations, c'est le régime apériodique.

2°) Equation différentielle

Loi des mailles

$u_C + u_R + u_B = 0$

avec



$u_R = Ri = R\frac{dq}{dt} = RC\frac{du_C}{dt}$

* variable q(t)

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} + (R+r)\,i = 0$$

or

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

d'où $L\frac{d^2q}{dt^2} + (R+r)\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{(R+r)}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$$

* variable $u_C(t)$

$$u_C + L\frac{di}{dt} + (R+r)\,i = 0$$

avec

$$i = C\frac{du_C}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = C\frac{d^2u_C}{dt^2}$$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + (R+r)C\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \left(\frac{R+r}{L}\right)\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = 0$$

* variable i(t)

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} + (R+r)\,i = 0$$

en dérive par rapport au temps

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + (R+r)\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{R+r}{L}\right)\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}\,i = 0$$

* variable $u_R(t)$

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} + (R+r)\,i = 0$$

on dérive par rapport au temps

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + (R+r)\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = 0$$

or $i = \frac{u_R}{R} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{R}\frac{du_R}{dt}$

$$\frac{d^2i}{dt^2} = \frac{1}{R}\frac{d^2u_R}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{R}\frac{d^2u_R}{dt^2} + \left(\frac{R+r}{R}\right)\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC}u_R = 0$$

$$\frac{d^2u_R}{dt^2} + \left(\frac{R+r}{L}\right)\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{LC}u_R = 0$$

3°) Energie Totale de L'oscillateur

. Energie emmagasinée par la bobine

$$E_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\frac{L}{R^2}u_R^2$$

. Energie emmagasinée par le condensateur

$$E_C = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}C\,u_C^2$$

. Energie électromagnétique

* $E = E_C + E_L$

$$E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$$

* $E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}L\left(\frac{dq}{dt}\right)^2$

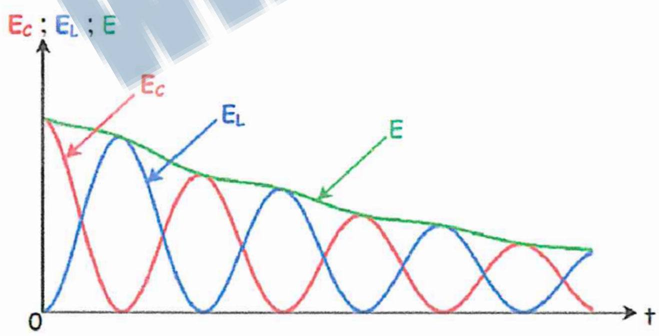
avec

$\frac{dq}{dt}$: représente le coefficient directeur de la tg à la courbe $q = f(t)$ à l'instant t choisi

* $E = \frac{1}{2}C\,u_C^2 + \frac{1}{2}LC^2\left(\frac{du_C}{dt}\right)^2$

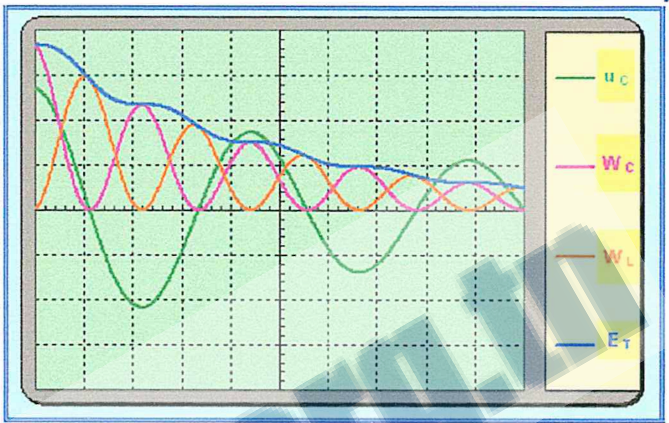
avec

$\frac{du_C}{dt}$: représente le coefficient directeur de la tg à la courbe $u_C = f(t)$ à l'instant t choisi



. L'energie totale décroit en fonction du temps, elle se dissipe par effet joule dans le resistor. En regime pseudopériodique ; la décharge est oscillante, il y a transfert d'énergie du condensateur vers la bobine et réciproquement de façon alternative.

En regime apériodique, il y a seulement transfert du condensateur vers la bobine lors de la décharge.



4°) La non conservation de L'energie totale du circuit RLC

. $\frac{d}{dt}(q^2) = 2q\frac{dq}{dt}$

. $\frac{d}{dt}(i^2) = 2i\frac{di}{dt}$

$$E = \frac{1}{2C}q^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2C}2q\frac{dq}{dt} + \frac{1}{2}L\,2i\frac{di}{dt}$$

$$= i\left(\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt}\right)$$

d'après L'eq diff :

$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = -(R+r)i$$

d'où $\frac{dE}{dt} = -(R+r)i^2 \neq 0$

. L'energie de L'oscillateur n'est pas constante

. $\frac{dE}{dt} < 0$: L'energie de L'oscillateur

diminue au cours du temps.
(Le système est non conservatif)

Remarques

* $E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$

• si $|i|$ est max alors $|u_R|$ est max
$\Rightarrow q = 0$ et $u_C = 0$
$E = \frac{1}{2}Li^2 = E_L$
L'énergie de l'oscillateur est purement magnétique

• si $|q|$ est max alors $|u_C|$ est max
$\Rightarrow i = 0$ et $u_R = 0$
$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = E_e$
L'énergie de l'oscillateur est purement électrique

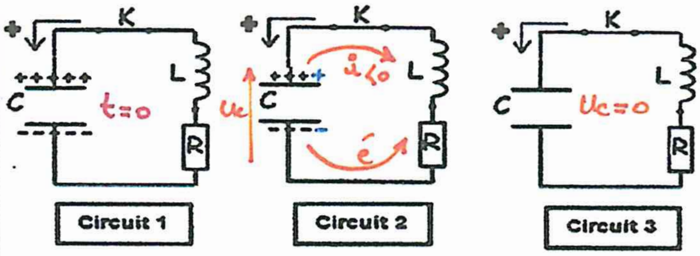
*. $\left|\frac{dE}{dt}\right| = (R+r)i^2$ puissance instantanée dissipée par effet joule dans la résistance totale du circuit

. $\left|\frac{\Delta E}{\Delta t}\right| = P_{moy}$ dissipée par effet joule dans le circuit

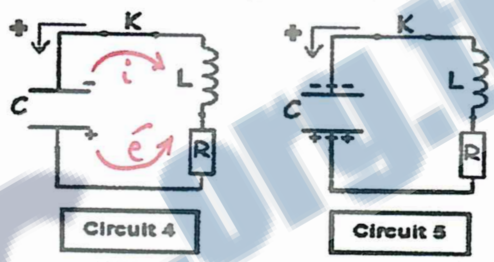
Remarque

Pour expliquer les oscillations, associer les circuits suivants aux instants ou aux intervalles de temps correspondants

t = 0 ; t∈] 0,T/4 [; t = T/4 ; t∈] T/4, T/2 [; t = T/2



$t = 0$	$t \in \left]0, \frac{T}{4}\right[$	$t = \frac{T}{4}$
. u_C max	$u_C > 0$ mais ↓	$u_C = 0$
. $i = 0$	$i = C\frac{du_C}{dt} < 0$ car $\frac{du_C}{dt}$ diminue	$i = -I_{max}$

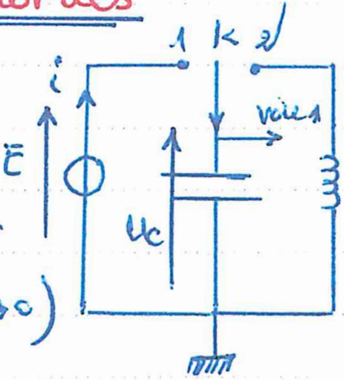


$t \in \left]\frac{T}{4} ; \frac{T}{2}\right[$	$t = \frac{T}{2}$
$u_C < 0$ mais $\lvert u_C \rvert$ ↑	$u_C = -U_{Cmax}$
$i = C\frac{du_C}{dt} < 0$	$i = 0$

Fin

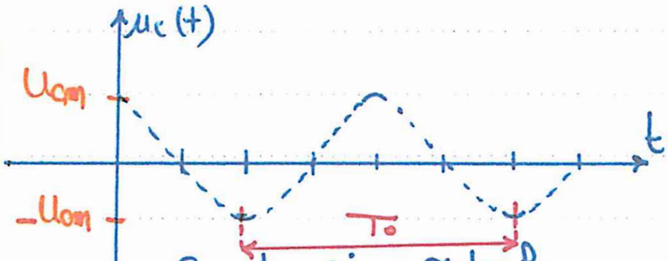
Les oscillations libres non amorties

* Ken1 : Le condensateur se charge instantanément (car $\Delta t = 5\tau = 5RC \to 0$)



* Ken2 :

à $t=0$ $\begin{cases} u_C = E \\ i = 0 \Rightarrow u_R = 0 \end{cases}$



Courbe sinusoïdale

1°) Equation différentielle

* Loi des mailles

$u_C + u_L = 0$ or $u_C = \frac{q}{C}$

$u_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$

$\Rightarrow \frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0 \quad (I)$$

Éq diff d'un circuit LC en régime sinusoïdal

* $u_C + L\frac{di}{dt} = 0$ or $i = C\frac{du_C}{dt}$

$\frac{di}{dt} = C\cdot\frac{d^2u_C}{dt^2}$

$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{u_C}{LC} = 0$$

* $\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$ or $i = \frac{dq}{dt}$

en dérive par rapport au temps

$L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = 0$

$L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C}i = 0$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{LC} = 0$$

*

$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{u_C}{LC} = 0$.

or $u_C = -u_L$.

d'où $\frac{d^2}{dt^2}(-u_L) - \frac{u_L}{LC} = 0$

$$\frac{d^2u_L}{dt^2} + \frac{u_L}{LC} = 0$$

* pulsation propre : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (rad s^{-1})

* période propre : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ (s)

* fréquence propre :

$N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L.C}}$ (Hz)

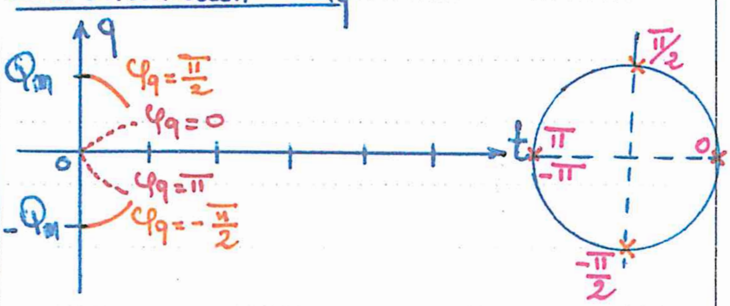
$\omega_0 = 2\pi N_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$

* L'équation diff (I) a pour solution :

$q(t) = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_q)$

avec
- Q_m : amplitude des oscillations
- φ_q : phase initiale
- $-Q_m \leq q(t) \leq Q_m$
- $-\pi \leq \varphi \leq \pi$

Détermination de φ_q



* **Expression de $i(t)$.**

$i = \frac{dq}{dt}$

$= \omega_0 . Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_q)$

$= \omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_q + \frac{\pi}{2})$

$i(t) = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi_i)$

$\begin{cases} I_m = \omega_0 Q_m \\ \varphi_i = \varphi_q + \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$i(t)$ est en quadrature avance de phase par rapport à $q(t)$.

* **Expression de $u_C(t)$**

$u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$

$= \frac{Q_m}{C} \sin(\omega_0 t + \varphi_q)$

$u_C(t) = U_{Cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{uC})$

$\begin{cases} U_{Cm} = \frac{Q_m}{C} \\ \varphi_{uC} = \varphi_q \end{cases}$

$u_C(t)$ et $q(t)$ sont en phase.

* **Expression de $U_b(t)$**

$U_b(t) = L\frac{di}{dt} = -u_C(t).$

$= -U_{Cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{uC})$

$= U_{Cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{uC} + \pi)$

$U_b(t) = U_{bm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{ub})$

$\begin{cases} U_{Cm} = U_{bm} \\ \varphi_{ub} = \varphi_{uC} + \pi \end{cases}$

$u_C(t)$ et $u_b(t)$ sont en opposition de phase

* **Energie électromagnétique (Totale)**

$E = E_C + E_L$

$= \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}L i^2$

* **energie électrostatique :**

$E_C = \frac{1}{2C} Q_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_q)$

$E_C = \frac{Q_m^2}{2C}\left(\frac{1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_q)}{2}\right)$

$\Rightarrow$ E_C est une fonction périodique non sinusoïdale de période T ?

$\omega_{E_C} = 2\omega_0$

$\frac{2\pi}{T} = 2 . \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T = \frac{T_0}{2}$

* **energie magnétique :**

$E_L = \frac{1}{2} L i^2$

$= \frac{1}{2} L \omega_0^2 Q_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_q)$

$= \frac{1}{2} L\omega_0^2 Q_m^2 \left(\frac{1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_q)}{2}\right)$

$= \frac{1}{4} L\omega_0^2 Q_m^2 \left(1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_q)\right)$

$\Rightarrow$ E_L est une fonction périodique non sinusoïdale de période $T = \frac{T_0}{2}$

* **energie électromagnétique :**

$E = \frac{1}{2C} Q_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_q) + \frac{1}{2} L \omega_0^2 Q_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_q)$

or $L\omega_0^2 = \frac{1}{C}$

d'où $E = \frac{1}{2C} Q_m^2 \underbrace{\left(\sin^2(\omega_0 t + \varphi_q) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_q)\right)}_{1}$

$E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C} = \frac{1}{2} C U_{Cm}^2 = \frac{1}{2} L I_m^2$

$= \text{constante}$

2ème Méthode pour Montrer que $E = \text{cte}$

$E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2$

$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2C} 2q \frac{dq}{dt} + \frac{1}{2} L 2i \frac{di}{dt}$

$= i\underbrace{\left(\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt}\right)}_{0 \text{ Eq diff}} = 0$

d'où $E = \text{cte}$

$E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C} = \frac{1}{2} C U_{Cm}^2 = \frac{1}{2} L I_m^2$

* Relation indépendante du temps entre $i(t)$ et $q(t)$.

1ère méthode

- $q(t) = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_q)$
- $i(t) = \dfrac{dq}{dt}$

$= \omega_0 Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_q)$

$\Rightarrow \sin(\omega_0 t + \varphi_q) = \dfrac{q(t)}{Q_m}$

$\cos(\omega_0 t + \varphi_q) = \dfrac{i}{\omega_0 . Q_m}$

$\underbrace{\sin^2(\omega_0 t + \varphi_q) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_q)}_{1} = \dfrac{q^2}{Q_m^2} + \dfrac{i^2}{\omega_0^2 . Q_m^2}$

$\dfrac{q^2}{Q_m^2} + \dfrac{i^2}{\omega_0^2 . Q_m^2} = 1$

$q^2 = -\dfrac{1}{\omega_0^2} i^2 + Q_m^2$

de la forme $q^2 = a . i^2 + b$

2è méthode

$E = E_C + E_L = cte$

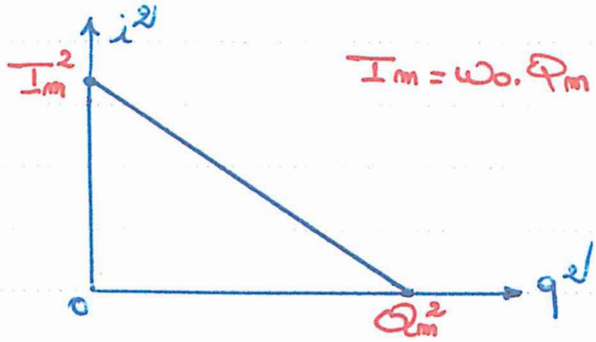
$\cancel{\frac{1}{2}} \dfrac{Q_m^2}{C} = \cancel{\frac{1}{2}} \dfrac{q^2}{C} + \cancel{\frac{1}{2}} L i^2$

$i^2 = \dfrac{Q_m^2}{LC} - \dfrac{q^2}{LC}$

or $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ d'où

$i^2 = -\omega_0^2 q^2 + \omega_0^2 Q_m^2$

de la forme $i^2 = a q^2 + b$

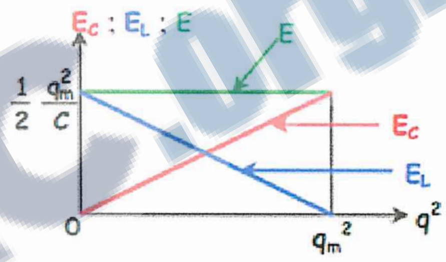


* Courbe $E = f(q^2)$; $E_C = f(q^2)$; $E_L = f(q^2)$

- $E_C = \dfrac{1}{2} \dfrac{q^2}{C}$: $E_C = f(q^2)$ est une droite linéaire de coef directeur $\dfrac{1}{2C}$

q	0	$\pm Q_m$
E_C	0	$\dfrac{1}{2}\dfrac{Q_m^2}{C}$

- $E_L = E - E_C = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q_m^2}{C} - \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C}$ droite affine de coef directeur $-\dfrac{1}{2C}$

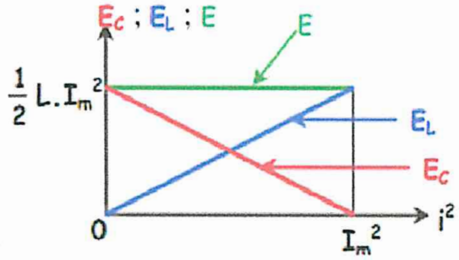


* Courbe $E = f(i^2)$; $E_C = f(i^2)$; $E_L = f(i^2)$

$E_L = \dfrac{1}{2} L i^2$

$E_C = E - E_L = \dfrac{1}{2} L I_m^2 - \dfrac{1}{2} L i^2$

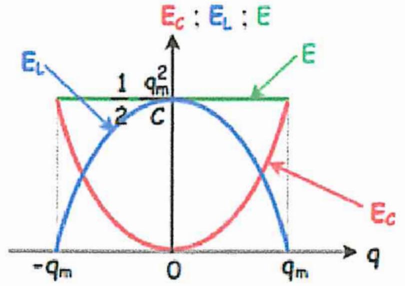
$E = cte = \dfrac{1}{2} L I_m^2$



* Courbe $E_C = f(q)$; $E_L = f(q)$; $E = f(q)$

- $E_C = \dfrac{1}{2} \dfrac{q^2}{C}$: $E_C = f(q)$ parabole de concavité dirigée vers le haut de sommet $S(0,0)$
- $E_L = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q_m^2}{C} - \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C}$; $E_L = f(q)$ parabole

de concavité dirigée vers le bas et de sommet $(0, E)$

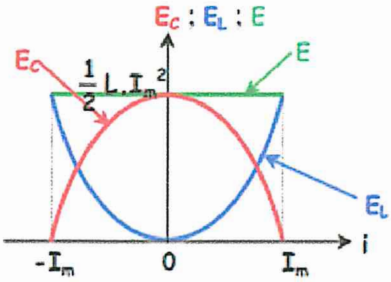


* Courbe $E_C = f(i)$; $E_L = f(i)$; $E = f(i)$

$E_C = E - \frac{1}{2}Li^2$

$E_L = \frac{1}{2}Li^2$

$E = \frac{1}{2}LI_m^2 = cte$

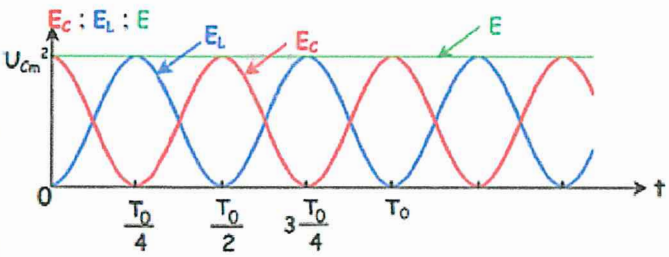


* Courbe $E_C = f(t)$; $E_L = f(t)$ et $E = f(t)$

$E_C = \frac{1}{2C}Q_m^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi_q\right)$; $\varphi_q = \frac{\pi}{2}$

$E_L = \frac{1}{2}L\omega_0^2 Q_m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi_q\right)$

$E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C} = \frac{1}{2}LI_m^2 = cte$



Remarque

1°/ Si $E = cte$ alors on peut déterminer l'équation différentielle par méthode énergétique :

$E = E_C + E_L = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}LC^2\left(\frac{du_C}{dt}\right)^2$

$\frac{dE}{dt} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}C\,2u_C\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{2}LC^2\,2\frac{du_C}{dt}\cdot\frac{d^2u_C}{dt^2} = 0$

$C\frac{du_C}{dt}\left(u_C + LC\frac{d^2u_C}{dt^2}\right) = 0$

d'où $LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$

$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{u_C}{LC} = 0$

2°/ * $i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \varphi_i = \varphi_q + \frac{\pi}{2}$

i est en quadrature avance de phase par rapport à $q(t)$

* $i = C\frac{du_C}{dt} \Rightarrow \varphi_i = \varphi_{u_C} + \frac{\pi}{2}$

u_C est en quadrature retard de phase par rapport à $i(t)$

* $u_C = \frac{q}{C} \Rightarrow \varphi_{u_C} = \varphi_q$

$u_C(t)$ et $q(t)$ sont en phase

* $u_L = -u_C \Rightarrow \varphi_{u_L} = \varphi_{u_C} + \pi$

u_L et u_C sont en opposition de phase.

$\Rightarrow$ Dérivée on ajoute $+\frac{\pi}{2}$

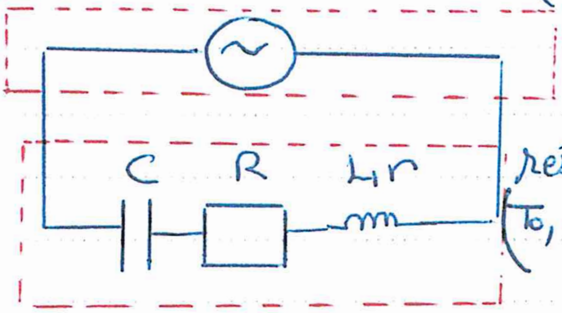
$\Rightarrow$ primitive on retranche $-\frac{\pi}{2}$

Fin

Les oscillations électriques forcées

*

GBF : excitateur (T, N, ω)



résonateur (T_0, N_0, ω_0)

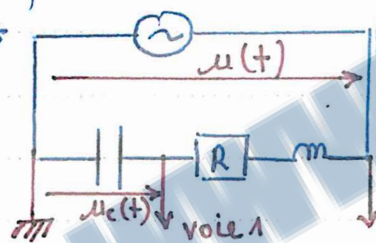
excitateur $\xrightarrow{\text{energie}}$ résonateur

excitateur $\xrightarrow{\text{Energie}}$ résonateur

* oscillations forcées ?

Le résonateur $(u_R(t))$ oscille avec la fréquence imposée par le GBF $(u(t))$ $(N \neq N_0)$ donc les oscillations sont forcées.

*



$\forall N$, $u(t)$ est toujours en avance de phase par rapport à $u_c(t)$.

Démonstration

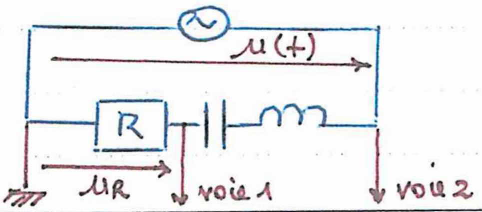
$-\frac{\pi}{2} < \varphi_u - \varphi_i < \frac{\pi}{2}$ or $\varphi_i = \varphi_{u_c} + \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} < \varphi_u - \varphi_{u_c} - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$

$0 < \varphi_u - \varphi_{u_c} < \pi$ d'où $\varphi_u - \varphi_{u_c} > 0$

$\Rightarrow \varphi_u > \varphi_{u_c}$

*



3 cas se présente :

- si $N < N_0$: $u_R(t)$ est en avance de phase par rapport à $u(t)$. or $u_R(t)$ et $i(t)$ sont en phase d'où $i(t)$ est en avance de phase par rapport à $u(t)$
- si $N = N_0$: $i(t)$ et $u(t)$ sont en phase
- si $N > N_0$: $u(t)$ est en avance de phase par rapport à $i(t)$.

$\Rightarrow \forall N$ $U_m > U_{Rm}$

Démonstration

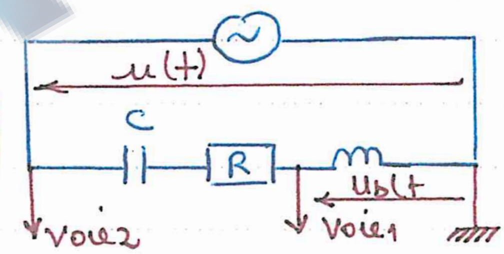
on a $Z = \sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} > R$

$Z \cdot I_{max} > R \cdot I_{max}$

$U_{max} > U_{R\,max}$.

la courbe dont l'amplitude le plus élevée $u(t)$.

*



$\forall N$; $u_b(t)$ et $u_L(t)$ sont toujours en avance de phase par rapport à $u(t)$.

Démonstration

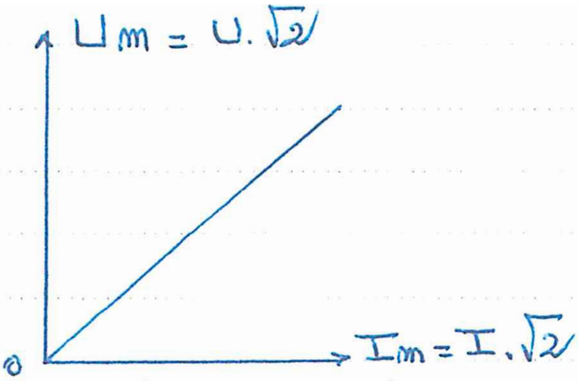
$-\frac{\pi}{2} < \varphi_u - \varphi_i < \frac{\pi}{2}$ or $\varphi_{u_L} = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} < \varphi_u - (\varphi_{u_L} - \frac{\pi}{2}) < \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} < \varphi_u - \varphi_{u_L} + \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$

$-\pi < \varphi_u - \varphi_{u_L} < 0$

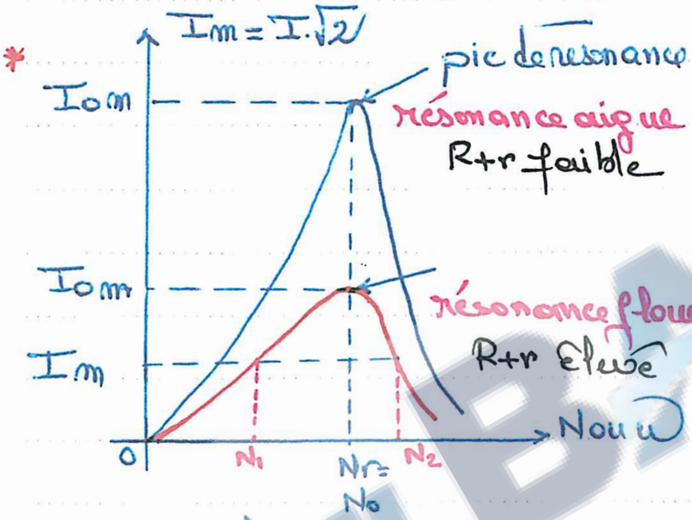
d'où $\varphi_{u_L} > \varphi_u$.

* 

La courbe a pour équation

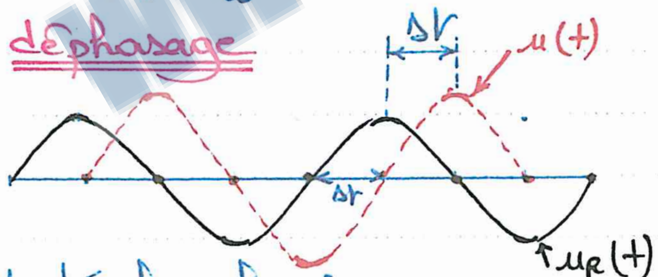
$U_m = Z.I_m$ avec Z : impédance du circuit RLC
(V) (Ω) (A)

U : tension efficace mesurée par (V)
I : intensité efficace mesurée par (A)

* 

pour toute valeur de $I_m \neq I_{0m}$ on a : $N_1 . N_2 = N_0^2$

* dephasage



Δt : décalage horaire

déphasage : $|\Delta\varphi| = \omega . \Delta t$

• $u_R(t)$ est en avance de phase par rapport à $u(t)$.

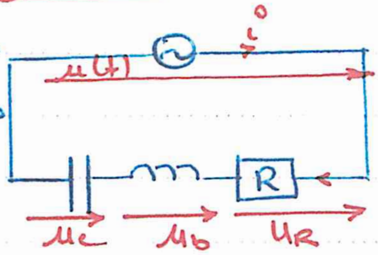
$\Rightarrow \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\omega.\Delta t = -\frac{2\pi}{T}.\frac{T}{4}$

$\Rightarrow \Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_u = \omega.\Delta t = \frac{2\pi}{T}.\frac{T}{4}$

Equation différentielle

Loi des mailles

$u_b + u_R + u_c - u = 0$



$L\frac{di}{dt} + (r+R)i + \frac{q}{C} = u(t)$ or $i = \frac{dq}{dt}$

$q = \int i dt$

$L\frac{di}{dt} + (r+R)i + \frac{1}{C}\int i dt = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$

⇒ L'équation différentielle a pour solution

$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$

cherchons I_m ? et φ_i ?

* Vecteurs de Fresnel :

• $(R+r)i = (R+r)I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$

$\longrightarrow \vec{V_1} \begin{cases} (R+r)I_m \\ \varphi_i \end{cases}$

• $L\frac{di}{dt} = L\omega I_m \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2})$

$\longrightarrow \vec{V_2} \begin{cases} L\omega I_m \\ \varphi_i + \frac{\pi}{2} \end{cases}$

• $\frac{1}{C}\int i dt = \frac{1}{C\omega} I_m \sin(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2})$

$\longrightarrow \vec{V_3} \begin{cases} \frac{I_m}{C\omega} \\ \varphi_i - \frac{\pi}{2} \end{cases}$

• $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$

$\longrightarrow \vec{V} \begin{cases} U_m \\ \varphi_u \end{cases}$ telle que $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3}$

$\vec{V_1} \perp \vec{V_2}$ et $\underbrace{\vec{V_2} \parallel \vec{V_3}}_{\text{3 cas se présente}}$

$\vec{V_1} \perp \vec{V_3}$

* Construction de Fresnel

Comparons $L\omega$ et $\frac{1}{C\omega}$

ou ω et ω_0

ou N et N_0

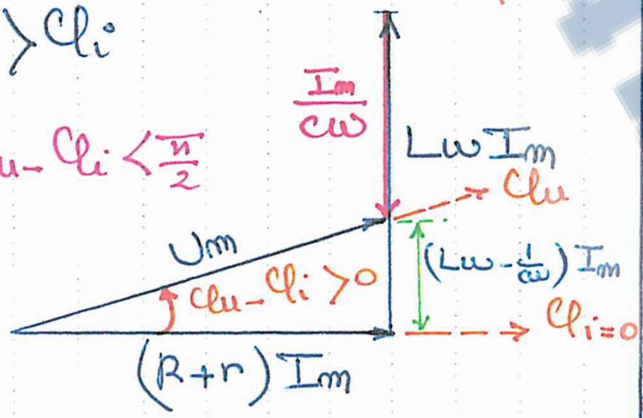
ou φ_u et φ_i

1er Cas . si $L\omega > \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \omega > \omega_0$

$N > N_0$

• $\varphi_u > \varphi_i$

• $0 < \varphi_u - \varphi_i < \frac{\pi}{2}$



Le circuit est inductif

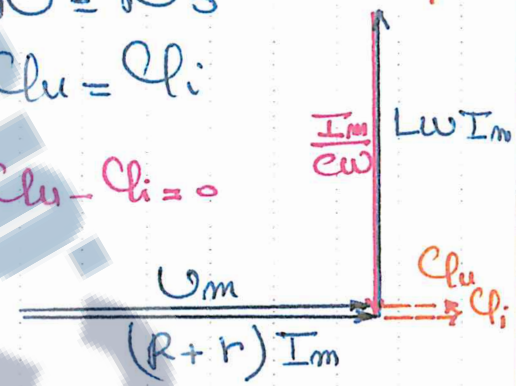
2e Cas . $L\omega = \frac{1}{C\omega}$

• $\omega = \omega_0$

• $N = N_0$

• $\varphi_u = \varphi_i$

$\varphi_u - \varphi_i = 0$



Le circuit est résistif

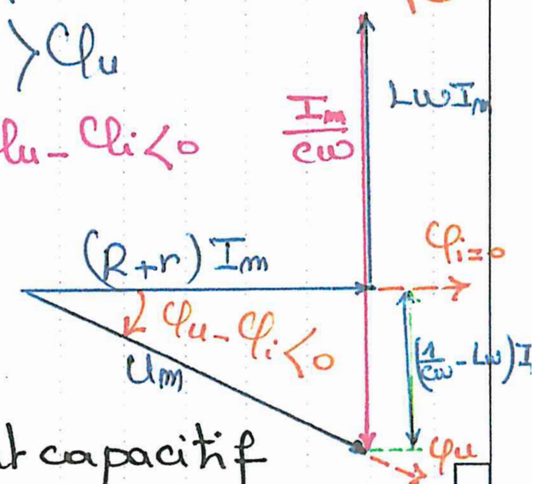
3e Cas . $\frac{1}{C\omega} > L\omega$

• $\omega < \omega_0$

• $N < N_0$

• $\varphi_i > \varphi_u$

$-\frac{\pi}{2} < \varphi_u - \varphi_i < 0$



circuit capacitif

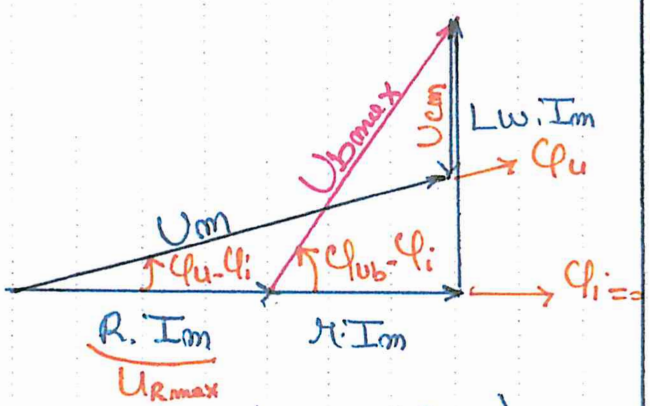
<u>Construction de Fresnel relatif aux tensions maximales</u>

U_{Rmax}

U_{Cmax}

U_{bmax}

U_{max}



$u_b(t) = U_{bm} \sin(\omega t + \varphi_{ub})$

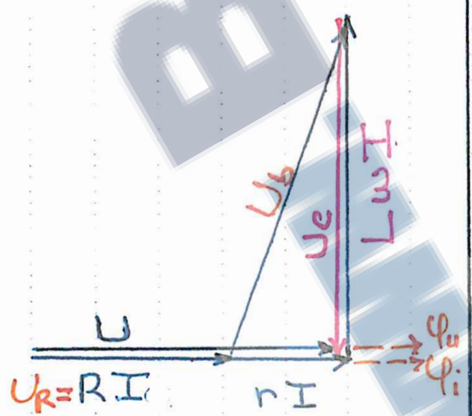
<u>relatif aux tensions efficaces</u>

U_R

U_C

U_b

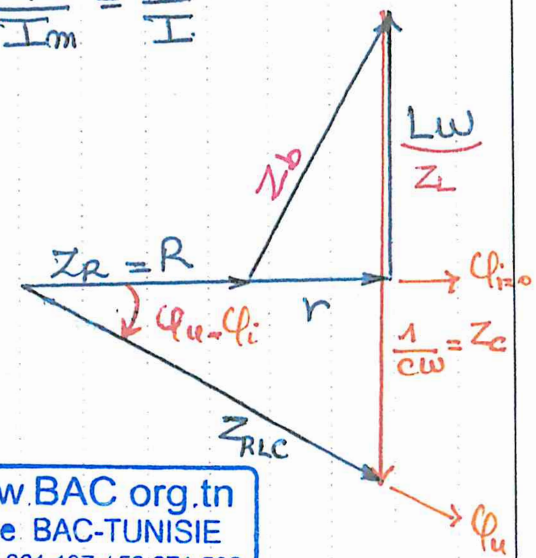
U



$-\frac{\pi}{2} < \varphi_u - \varphi_i < \frac{\pi}{2}$

<u>relatif aux impédances</u>

$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}$



Exemple 1

• on donne :

$u(t) = 3\sin(100\pi t)$

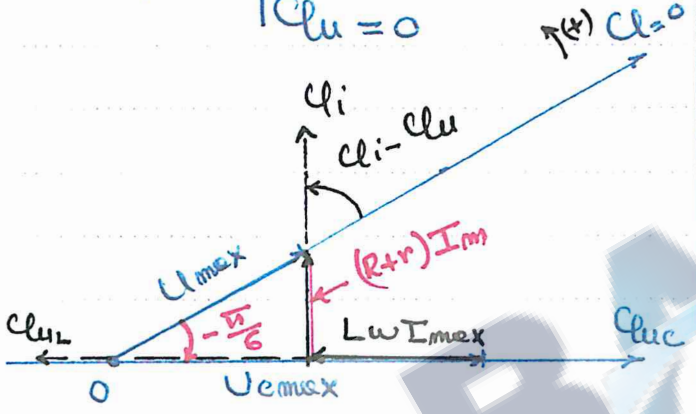
$u_C(t) = 6\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$

faire la construction de Fresnel relative aux tension maximales

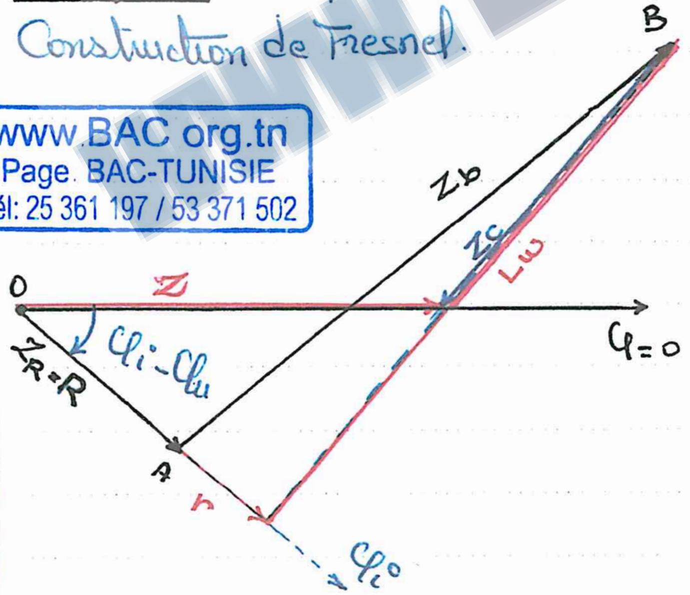
Echelle $1V \longrightarrow 1cm$

• $u_C(t) \rightarrow \begin{cases} U_{Cm} = \frac{I_m}{C\omega} = 6V \rightarrow 6cm \\ \varphi_{uC} = \varphi_i - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6}\ rad \end{cases}$

• $u(t) \rightarrow \begin{cases} U_m = 3V \rightarrow 3cm \\ \varphi_u = 0 \end{cases}$



Exemple 2. Completer la Construction de Fresnel.



Remarque

N<N_0	N=N_0	N>N_0
$\varphi_u < \varphi_i$	$\varphi_u = \varphi_i$	$\varphi_u > \varphi_i$
$L\omega < \frac{1}{C\omega}$	$L\omega = \frac{1}{C\omega}$	$L\omega > \frac{1}{C\omega}$
C	R	I

Determination de I_{max} :

D'après Pythagore 1er ou 3e Cas

$$U_m^2 = (R+r)^2 I_m^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 . I_m^2$$
$$= I_m^2 \left((R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right)$$

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{U_m}{Z}$$

avec

$$Z = \sqrt{(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

• Determination de φ_i

• $\mathrm{tg}(\varphi_u - \varphi_i) = \dfrac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R+r} = \dfrac{Z_L - Z_C}{R+r}$

• $\mathrm{tg}(\varphi_i - \varphi_u) = \dfrac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R+r} = \dfrac{Z_C - Z_L}{R+r}$

• $\underbrace{\cos(\varphi_u - \varphi_i)}_{\text{facteur de puissance}} = \cos(\varphi_i - \varphi_i)$

$$= \frac{(R+r)\,I_m}{U_m} = \frac{(R+r)\,I}{U} = \frac{(R+r)}{Z}$$

Remarque

• $U_m = Z\,I_m = \sqrt{(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}\; I_m$

$\Rightarrow U_{Cm} = Z_C . I_m$ avec $Z_C = \frac{1}{C\omega}$

$\Rightarrow U_{bm} = Z_b . I_m$ avec $Z_b = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2}$

$\Rightarrow U_{Lm} = Z_L . I_m$ avec $Z_L = L\omega$

$\Rightarrow U_{bCm} = Z_{bC} . I_m$ avec $Z_{bC} = \sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

$\Rightarrow U_{RCm} = Z_{RC} . I_m$ avec $Z_{RC} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}$

Résonance d'intensité

Déf : à la résonance d'intensité I_m passe par son max I_{om}.

Conséquence

$$I_m = \frac{U_m \text{ (cte } \forall N)}{\sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

$\Rightarrow$ Z est minimale

$\Rightarrow$ $Z_{min} = R+r$: le circuit est résistif

$\Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$

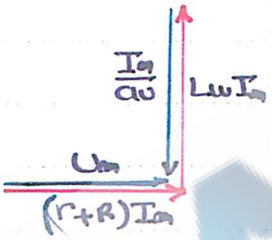
* $L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow LC\omega^2 = 1$

$\Rightarrow U_m = (R+r) I_{om}$

$\Rightarrow \omega = \omega_0$

$\Rightarrow N = N_0$

* $\Rightarrow \varphi_u = \varphi_i$



$u(t)$ et $i(t)$ sont en phase

$\Rightarrow \varphi_u = \varphi_i$ or $\varphi_i = \varphi_{uc} + \frac{\pi}{2}$

$\varphi_u = \varphi_{uc} + \frac{\pi}{2}$

$u(t)$ est en quadrature avance de phase par rapport à $u_c(t)$.

$\Rightarrow \varphi_u = \varphi_i$; $u_L = L\frac{di}{dt}$

$\varphi_{u_L} = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$

$\varphi_u = \varphi_{u_L} - \frac{\pi}{2}$

$u(t)$ est en quadrature retard de phase par rapport à $u_L(t)$.

* $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$
$= (R+r) I_{om} \sin(\omega_0 t + \varphi_i)$

$u(t) = (R+r)\, i(t)$

* L'équation diff :

$$L\frac{di}{dt} + (R+r)i + \frac{q}{C} = u(t)$$

$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{or } i = \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$$

à la résonance d'intensité le circuit se comporte comme un circuit LC

* Mq L'énergie est constante et calculer sa valeur.

$E = E_C + E_L$

$= \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$

$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2C} 2q \frac{dq}{dt} + \frac{1}{2} L\, 2i \frac{di}{dt}$

$= i\left(\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt}\right)$

$= i\left(u(t) - (R+r)i\right)$

or $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$

$= (R+r) I_{om} \sin(\omega_0 t + \varphi_i)$

$u(t) = (R+r)\, i(t)$

d'où $\frac{dE}{dt} = 0$ donc E = Constante

AN $E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C} = \frac{1}{2} C U_{cm}^2$

$E = \frac{1}{2} L I_{om}^2$

• Le facteur de Qualité ou le coefficient de surtension (à la résonance d'intensité)

$$Q = \frac{U_{Cmax}}{U_{max}} = \frac{U_{Lmax}}{U_{max}} = \frac{1}{(R+r)\omega_0 C}$$

$$= \frac{L\omega_0}{R+r} = \frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

• Si $Q<1$: pas de surtension

• Si $Q>1 \Rightarrow U_{Cm} > U_{max}$: il y a phénomène de surtension aux bornes du condensateur.

• La puissance moyenne

• $P_{moy} = U.I.\cos(\varphi_u - \varphi_i)$

• $P_{moy} = (R+r)I^2$
(Watt)

or $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ et $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

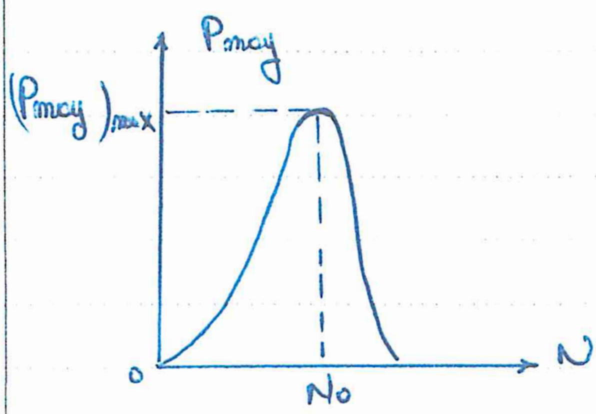
sig $P_{moy} = \frac{1}{2} U_m . I_m \cos(\varphi_u - \varphi_i)$

$P_{moy} = \frac{1}{2}(R+r) I_m^2$

Remarque

$P_{moy} = \frac{1}{2}(R+r)I_m^2$

à la résonance d'intensité I_m passe par son maximum or P_{moy} et I_m^2 sont proportionnelle donc P_{moy} passe aussi par son maximum : c'est la résonance de puissance



Montrons que lorsque R augmente alors $(P_{moy})_{max}$ diminue ?

$(P_{moy})_{max} = \frac{1}{2}(R+r)I_{om}^2$

or

$U_m = (R+r)I_{om} \Rightarrow I_{om} = \frac{U_m}{R+r}$

$(P_{moy})_{max} = \frac{1}{2}(R+r) . \frac{U_m^2}{(R+r)^2}$

$= \frac{1}{2}\frac{U_m^2}{(R+r)}$ ← cte

donc lorsque R augmente alors $P_{moy\,max}$ diminue

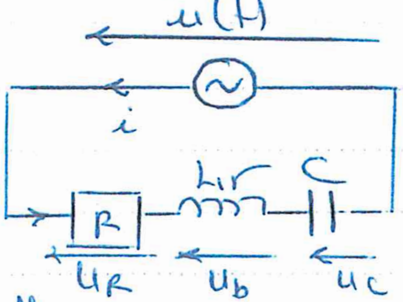
Energie dissipée

$E_d = P_{moy} . t$
(j) (watt) (s)

Fin

Résonance de charge

1°) Equation différentielle



Loi des mailles

$u_b + u_R + u_C - u = 0$

$L\frac{di}{dt} + ri + Ri + \frac{q}{C} = u(t)$

or $i = \frac{dq}{dt}$

$L\frac{d^2q}{dt^2} + (R+r)\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$

L'eq diff a pour solution

$q(t) = Q_m \sin(\omega t + \varphi_q)$

Vecteurs de Fresnel

- $\frac{q}{C} = \frac{1}{C} Q_m \sin(\omega t + \varphi_q)$

$\rightarrow \vec{V_1} \begin{cases} \frac{Q_m}{C} \\ \varphi_q \end{cases}$

- $(R+r)\frac{dq}{dt} = (R+r)\omega Q_m \sin(\omega t + \varphi_q + \frac{\pi}{2})$

$\rightarrow \vec{V_2} \begin{cases} (R+r)\omega . Q_m \\ \varphi_q + \frac{\pi}{2} \end{cases}$

- $L\frac{d^2q}{dt^2} = L\omega^2 Q_m \sin(\omega t + \varphi_q + \pi)$

$\rightarrow \vec{V_3} \begin{cases} L\omega^2 Q_m \\ \varphi_q + \pi \end{cases}$

- $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$

$\rightarrow \vec{V} \begin{cases} U_m \\ \varphi_u \end{cases}$ / $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3}$

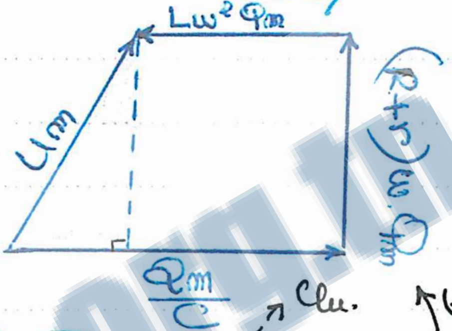
$\Rightarrow \vec{V_1} \perp \vec{V_2}$; $\vec{V_2} \perp \vec{V_3}$

et $\vec{V_1}$ et $\vec{V_3}$ sont // de sens contraire

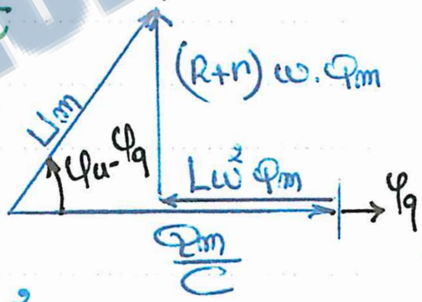
Construction de Fresnel

- Si $\frac{1}{C} > L\omega^2$ ou $\omega_0 > \omega$ ou $N_0 > N$

1er Cas



$0 < \varphi_u - \varphi_q < \frac{\pi}{2}$

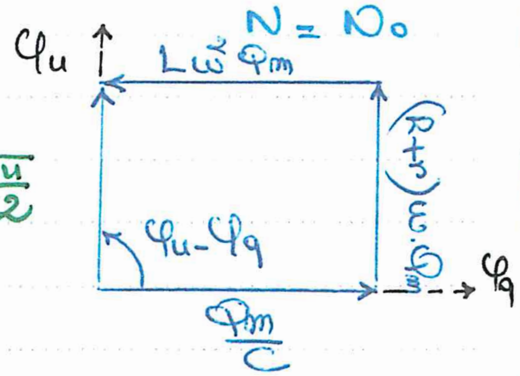


- Si $\frac{1}{C} = L\omega^2$ ou $\omega = \omega_0$

$N = N_0$

2ème Cas

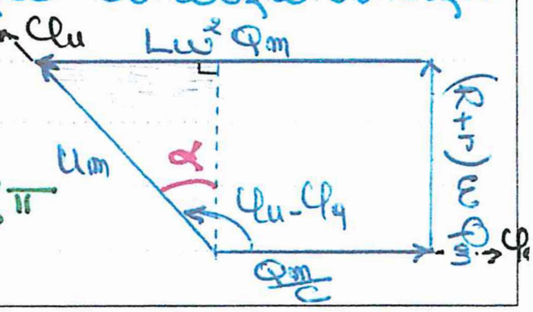
$\varphi_u - \varphi_q = \frac{\pi}{2}$



- Si $\frac{1}{C} < L\omega^2$ ou $\omega_0 < \omega$ ou $N_0 < N$

3ème Cas

$\frac{\pi}{2} < \varphi_u - \varphi_q < \pi$



$\Rightarrow \quad 0 < \varphi_u - \varphi_q < \pi$

$\Rightarrow$ $u(t)$ est toujours en avance de phase par rapport à $q(t)$

$\Rightarrow$ $u(t)$ est toujours en avance de phase par rapport à $u_c(t)$

Expression de Q_m

$$U_m^2 = (R+r)^2 \omega^2 Q_m^2 + \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 Q_m^2$$

$$= Q_m^2 \left((R+r)^2\omega^2 + \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2\right)$$

$U_m = cte$

- $Q_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{(R+r)^2\omega^2 + \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2}}$

- $Q_m = \dfrac{I_m}{\omega}$

Expression du déphasage:

1er Cas

$$tg(\varphi_u - \varphi_q) = \frac{(R+r)\omega}{\frac{1}{C} - L\omega^2} > 0$$

3ème Cas

$$tg(\varphi_u - \varphi_q) = \frac{(R+r)\omega}{L\omega^2 - \frac{1}{C}} > 0$$

Résonance de charge:

à la résonance de charge Q_{max} passe par son maximum

càd

$$g(\omega) = (R+r)^2\omega^2 + \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2$$

est minimale

sig

$$\frac{dg(\omega)}{d\omega} = 0 \quad \text{pour } \omega = \omega_r$$

$$(R+r)^2 . 2\omega_r + 2\left(\frac{1}{C} - L\omega_r^2\right)\cdot(-2L\omega_r) = 0$$

$$\underbrace{2\omega_r}_{\neq 0}\left((R+r)^2 - 2L\left(\frac{1}{C} - L\omega_r^2\right)\right) = 0$$

$$(R+r)^2 - \frac{2L}{C} + 2L^2\omega_r^2 = 0$$

$$2L^2\omega_r^2 = \frac{2L}{C} - (R+r)^2$$

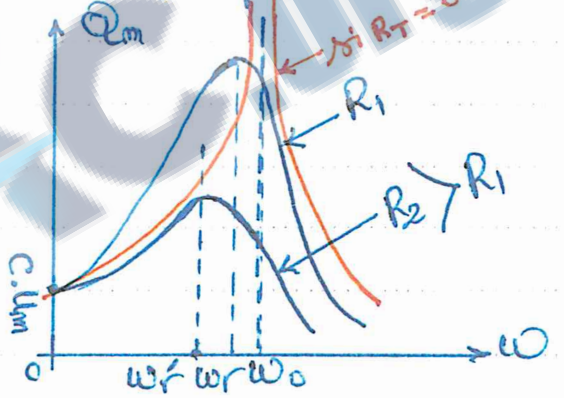
$$\omega_r^2 = \frac{2L}{C.2L^2} - \frac{(R+r)^2}{2L^2}$$

$$\omega_r^2 = \frac{1}{LC} - \frac{(R+r)^2}{2L^2}$$

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{(R+r)^2}{2L^2}$$

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{(R+r)^2}{2L^2}}$$

ω_0 est supérieur à ω_r



Rq 1). si $R_T = R + r = 0$

$$Q_m = \frac{U_m}{\left|\frac{1}{C} - L\omega^2\right|}$$

pour $\omega_r = \omega_0$ alors $\frac{1}{C} - L\omega^2 = 0$ dans ce cas

$Q_m \longrightarrow +\infty$

2) pour qu'il y a résonance de charge il faut que ω_r existe càd

$$\omega_0^2 - \frac{(R+r)^2}{2L^2} > 0$$

$$\omega_0^2 > \frac{(R+r)^2}{2L^2}$$

$$(R+r)^2 < 2\omega_0^2 L^2$$

$$(R+r)^2 < 2 \cdot \frac{1}{\cancel{L}C} \cdot L^{\cancel{2}}$$

$$(R+r)^2 < 2\frac{L}{C}$$

$$R+r < \sqrt{\frac{2L}{C}}$$

• pour qu'il n'y pas résonance de charge:

il faut que $R+r \geq \sqrt{\frac{2L}{C}}$

Fin

Lycée Hédi Chaker
SFAX

28/10

Devoir de synthèse N°1
Décembre 2011

2011 / 2012

Section : Sciences Expérimentales Coefficient : 4 Durée : 3 heures

EPREUVE : SCIENCES PHYSIQUES

M. Abdmouleh Nabil

Le devoir comporte deux exercices de chimie et deux exercices de physique répartis sur cinq pages numérotées de 1/5 à 5/5. La page 5/5 est à remplir par l'élève et à remettre avec la copie.

Chimie : - Document scientifiques
- Equilibre chimique.

Physique : - Circuit RLC
- Circuit RL

CHIMIE (9.0 points)

Exercice N°1 (3,00 points) La lampe à iode

Considérons d'abord la lampe à incandescence représentée sur la figure-1-. Elle est constituée d'une ampoule de verre dans laquelle on a remplacé l'air par un gaz inerte. Un filament de tungstène est parcouru par un courant électrique et est porté à très haute température. Ce qui génère la lumière. Il est indispensable que l'air soit remplacé par un gaz inerte sinon le tungstène brûlerait par oxydation avec l'oxygène.

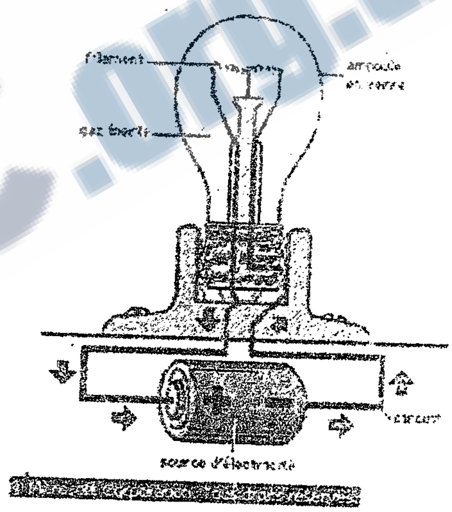


Figure-1-

Malgré cette précaution, la lampe à une durée de vie limitée (+/- 1000 h), car le tungstène se sublime (Sublimation = passage de la phase solide à la phase gazeuse). Cette sublimation entraîne un amincissement du filament qui finit par se briser. Le tungstène gazeux va se déposer sur la paroi de l'ampoule qui devient noire, car cette paroi est plus froide.

On a donc un équilibre : $W_{(g)} \rightleftharpoons W_{(s)}$ (1)

Dans la lampe à iode, le gaz inerte est remplacé par l'iode qui va réagir avec le tungstène gazeux : $I_{2\,(g)} + W_{(g)} \rightleftharpoons WI_{2\,(g)}$ (2) Cette réaction est exothermique. Or au niveau du filament la température est très élevée. Par conséquent, l'équilibre va se déplacer vers la gauche : l'iodure de tungstène se décompose, donc augmentation de la concentration en tungstène gazeux près du filament, et finalement l'équilibre de l'équation (1) est déplacée vers la droite. Une partie du tungstène gazeux se redépose sur le filament. La présence d'iode protège donc le filament. tout en produisant plus de lumière.

Questions :

29

1°/ En se basant sur le texte, définir une lampe à iode.

2°/

a°/ Enoncer la loi d'action de masse.

b°/ Donner l'expression de la constante d'équilibre K relative à la réaction (2).

3°/ En s'appuyant sur le texte, préciser le sens de la réaction qui se produit dans un système en équilibre formé par le tungstène, l'iode et l'iodure de tungstène suite à une augmentation de sa température.

4°/ On lit dans le texte la phrase suivante : « La présence d'iode protège donc le filament, tout en produisant plus de lumière » Expliquer comment l'iode protège le filament.

Exercice N°2 **(6,00 points)**

On prépare à l'instant de date $t = 0$ un tube à essai contenant les quantités $n_1 = 2{,}1.10^{-2}$ mol d'acide éthanoïque de formule brute $C_2H_4O_2$ et $n_2 = 1{,}6.10^{-2}$ mol de méthanol de formule brute CH_4O. On scelle le tube à essai puis on place ce dernier dans un bain marie de température constante $\theta = 80°C$.

1°/ Expliquer l'intérêt des opérations suivantes :

- ✓ On scelle le tube à essai.
- ✓ On porte le tube à essai à une température élevée.

2°/

a°/ En utilisant les formules semi-développées, écrire l'équation chimique de la réaction limitée qui se produit dans le tube à essai. Nommer l'ester (E) obtenu.

b°/ Dresser le tableau descriptif d'évolution du système contenu dans le tube à essai.

3°/ La réaction chimique étudiée a un taux d'avancement final $\tau_f = 0{,}75$.

a°/ Déterminer l'avancement final x_f de cette réaction.

b°/ Calculer la constante d'équilibre K relative à la réaction d'estérification.

4°/ A un instant de date t_1, on refroidit le contenu du tube à essai, puis, on dose la quantité d'acide restant par une solution aqueuse (S) d'hydroxyde de sodium de concentration molaire $C_B = 2\ mol.L^{-1}$ en présence de phénolphtaléine. A l'équivalence acido-basique, le volume d'hydroxyde de sodium ajouté est $V_{BE} = 5$ mL.

a°/ Déterminer à la date t_1 l'avancement x_1 de la réaction d'estérification. En déduire la composition du système à cette date.

b°/ Montrer que la date t_1 ne correspond pas à un état d'équilibre chimique dynamique du système chimique réalisé.

5°/ On prépare un système chimique formé par les quantités 0,1 mol d'acide éthanoïque, 0,2 mol de méthanol, 0, 3 mol d'ester(E) et 0,4 mol d'eau.

a°/ Montrer que le système obtenu n'est pas en état d'équilibre dynamique.

b°/ Préciser, en justifiant la réponse, le sens dévolution spontané.

30

PHYSIQUE (11.0 points)

Exercice N°1 (4,75 points)

A l'aide d'un condensateur de capacité C, d'une bobine d'inductance L et de résistance interne $r = 10\ \Omega$, d'un commutateur K, d'un conducteur ohmique de résistance $R = 40\ \Omega$ et d'un dipôle générateur idéal de tension de f. é. m. E_0, on réalise le circuit électrique schématisé sur la figure-2-.

On place le commutateur K en position (1) puis on le bascule en position (2) et en même temps on déclenche un système d'acquisition de données à une date prise comme origine du temps.

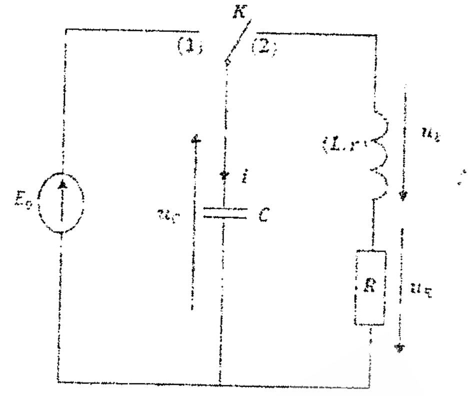


Figure-2-

1°/ Quel est le phénomène physique qui se produit dans le circuit au moment où K est en position (2) ? Justifier la réponse.

2°/ L'équation différentielle qui régit les variations de la tension u_C aux bornes du condensateur peut s'écrire sous la forme : $\frac{d^2u_C}{d^2t} + \alpha\frac{du_C}{dt} + \beta u_C = 0$

Déterminer l'expression de α et celle de β en fonction des données de l'exercice.

3°/

a°/ Donner l'expression de l'énergie électrique E du circuit RLC en fonction de C, L, u_C et i où i représente l'intensité du courant électrique qui circule dans le circuit.

b°/ Etablir que $\frac{dE}{dt} = -(R+r)i^2$.

Interpréter cette relation.

4°/ Les courbes de la figure-3- représentent l'évolution au cours du temps de l'énergie électrique E et de la tension u_C.

a°/ Déterminer graphiquement et à $t = 0$, l'énergie électrique E_1, la tension U_1 aux bornes du condensateur et la pseudo-période T. En déduire la valeur de C et celle de E_0.

b°/ En se servant de la courbe $E = f(t)$ et de la tangente (Δ), trouver à la date $t_2 = 3.10^{-3}$s la valeur de l'énergie magnétique E_L emmagasinée dans la bobine

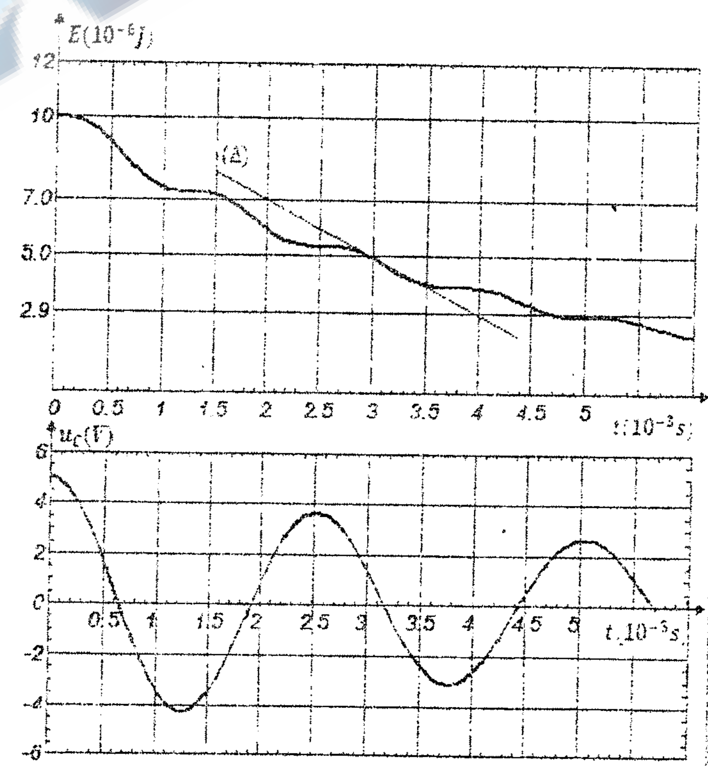


Figure-3-

et celle de l'intensité électrique i_2. En déduire la valeur de L.

5°/ On reprend le circuit électrique de la figure-2- et pour différents conducteurs ohmiques, on représente les variations au cours du temps de la tension u_C. On obtient les courbes du document-1- de la page 5/5. Compléter le tableau du document-1- en associant à chaque courbe la résistance R et le nom du régime d'oscillation correspondants.

Exercice N°2 (4,25 points)

A l'aide d'une bobine d'inductance L et de résistance interne r, d'un conducteur ohmique de résistance R, d'un dipôle générateur idéal de tension de f. é. m. E et d'un interrupteur K, on réalise le circuit électrique schématisé sur la figure-4-. A l'instant de date t = 0, on ferme l'interrupteur K.

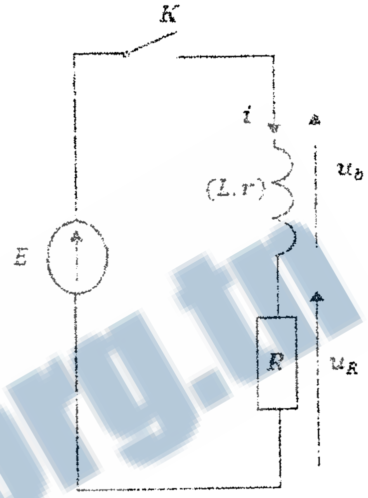


Figure-4-

1°/ Préciser le phénomène physique qui se produit dans le circuit électrique du document-2- page 5/5.

2°/ En appliquant la loi des mailles, montrer qu'en régime permanent l'intensité du courant est $I = \frac{E}{R+r}$ et la tension aux bornes de la bobine est $U_b = \frac{rE}{R+r}$.

3°/ L'équation différentielle qui régit les variations au cours du temps de l'intensité i du courant électrique peut s'écrire sous la forme : $\alpha \frac{di(t)}{dt} + i = \beta$ avec α et β sont des constantes positives.

a°/ Exprimer α et β en fonction des données de l'exercice. Que représente α pour le circuit RL étudié.

b°/ Quelle est parmi les fonctions suivantes $i(t) = \frac{E}{R+r}(1-e^{-\frac{R+r}{L}t})$ et $i(t) = \frac{E}{R+r}e^{-\frac{R+r}{L}t}$ celle qui constitue une solution de l'équation différentielle trouvée ? Justifier la réponse.

4°/ Un système d'acquisition non représenté sur la figure-3- suit l'évolution au cours du temps de la tension $u_b(t)$ aux bornes de la bobine et de l'intensité i du courant électrique. On obtient les courbes du document-2- page 5/5

a°/ Déterminer, graphiquement, les valeurs I, U_b, E et la constante de temps τ du dipôle RL.

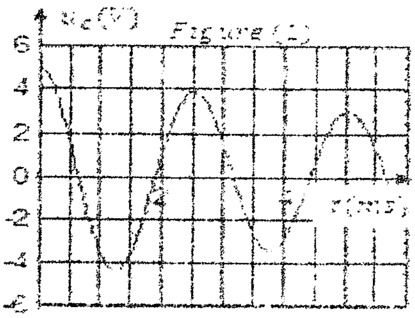
b°/ En déduire r, R, et L

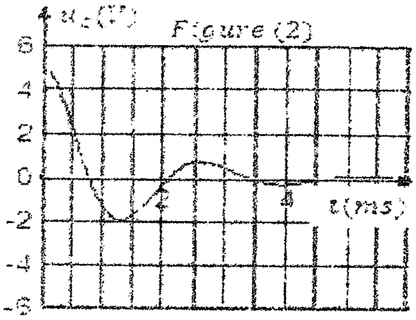
5°/ Donner. en fonction du temps, l'expression de la tension u_R aux bornes du résistor et représenter son allure sur le document-2- de la page 5/5

32

Lycée Hédi Chaker Sfax

Epreuve Sciences Physique Devoir de synthèse	Décembre 2011	M. Abdmouleh Nabil
Nom :	Prénom :	Classe :





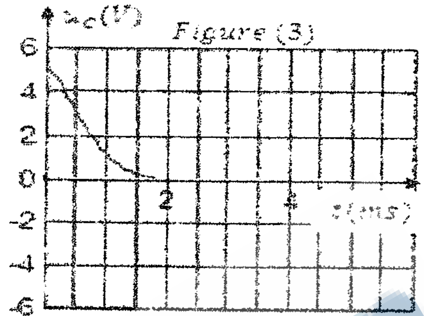
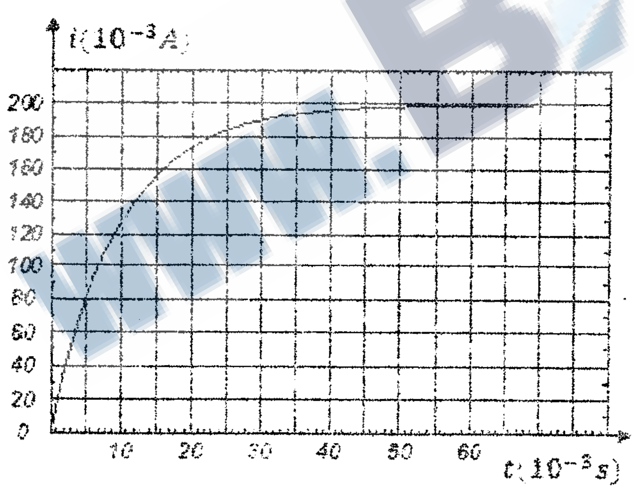
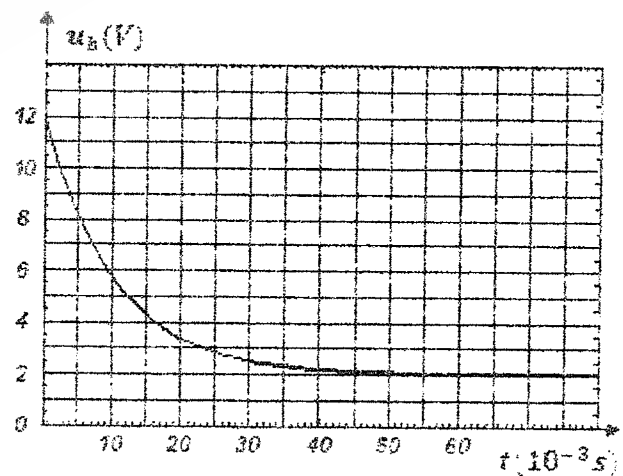


Figure n°			
Valeur de la résistance R (Ω)	860	30	280
Régime d'oscillation			

Document-1-





Document-2-

Chimie 33

Exercice n°1 :

1/ La lampe à iode est constituée d'une ampoule de verre dans laquelle on a remplacé l'air par l'iode. Un filament de tungstène est parcouru par un courant électrique porté à très haute température.

2/a/ Pour un système chimique aboutissant à un état d'équilibre la fraction de concentration π prend une valeur constante lorsque cet équilibre est atteint appelée la constante d'équilibre notée K.

$$\boxed{\pi_{éq.dyn} = K}$$

b/ à l'équilibre dynamique π = K.

$$\Rightarrow K = \frac{[WI_2]_{éq}}{[I_2]_{éq} \cdot [W]_{éq}}$$

3/ Suite à une augmentation de la température l'équilibre se déplace à gauche donc la réaction qui se produit spontanément est :

$$WI_{2(g)} \longrightarrow I_{2(g)} + W_{(g)}$$

4) La presence de l'iode permet d'obtenir le tungstène gazeux qui à son tour subit une condensation en donnant de tungstène solide qui se dépose sur le filament de tungstène ce qui empêche l'amincissement de ce filament assez rapidement ⇒ Obtenir une durée de vie de la lampe plus importante que celle de la lampe à incandescence.

Exercice n°2 :

1/a 80°C on peut obtenir la vaporisation de la matière organique (alcool, ester et l'acide carboxylique) donc on scelle le tube à essai pour condenser la vapeur du ~~cette~~ matière formée et donc empêcher toute perte.

– La réaction d'estérification est lente donc on porte le tube à essai à une température élevée pour l'accélérer.

2/a/

$$CH_3-C\begin{matrix}=O \\ \\ OH\end{matrix} + CH_3-OH \rightleftharpoons H_2O + CH_3-C\begin{matrix}=O \\ \\ O-CH_3\end{matrix}$$

Ester : éthanoate de méthyle

b/

Equation de la Rct : Acide + alcool ⇄ Ester + eau					
Etat	Avanc	Quantité de matière (mol)			
initial	0	$2,1.10^{-2}$	$1,6.10^{-2}$	0	0
qql	x	$2,1.10^{-2}-x$	$1,6.10^{-2}-x$	x	x
final	x_f	$2,1.10^{-2}-x_f$	$1,6.10^{-2}-x_f$	x_f	x_f

3/ a/ $\tau_f = \frac{x_f}{x_{max}} \Rightarrow x_f = x_{max}\,\tau_f$

valeur x_{max}.

on $\begin{cases} n_0(\text{acide}) > n_0(\text{alcool}) \\ \text{la R}^{ct}\text{ se produit mole à mole (1 mol acide réagit avec 1 mol d'alcool)} \end{cases}$

D'où l'alcool est le réactif limitant donc

$1,6.10^{-2} - x_{max} = 0$

$\Rightarrow x_{max} = 1,6\,10^{-2}$ mol

Par suite

$x_f = 1,6.10^{-2} \times 0,75$

$= 1,2.10^{-2}$ mol

b/ la composition finale du système

$n_f(ac) = 2,1.10^{-2} - x_f = 2,1.10^{-2} - 1,2.10^{-2}$

$= 0,9\,10^{-2}$ mol

$n_f(al) = 1,6\,10^{-2} - x_f = 1,6.10^{-2} - 1,2\,10^{-2}$

$= 0,4.10^{-2}$ mol

(2)

$n_f(est) = n_f(eau) = x_f = 1,2.10^{-2}$ mol.

valeur K

D'après la loi d'action de masse

$\pi_{eq} = K$

dn $K = \frac{[ester]_{éq}\,.\,[eau]_{éq}}{[acide]_{éq}\,.\,[alcool]_{éq}}$

$= \frac{\frac{n(est)}{V}\,.\,\frac{n(eau)}{V}}{\frac{n(acide)}{V}\,.\,\frac{n(alcool)}{V}}$

$\Rightarrow K = \frac{n_f(ester)\,.\,n_f(eau)}{n_f(acide)\,.\,n_f(alcool)}$

$= \frac{(1,2\,10^{-2})^2}{0,9\,10^{-2} \times 0,4.10^{-2}}$

$\boxed{K = 4}$

4) a/ A l'équivalence du dosage

$n(\text{acide}) = n(\text{base})$

$\Rightarrow n(\text{acide}) = C_B . V_{B_{Eq}} = 2 \times 5.10^{-3}$

$= 10^{-2}$ mol

or à l'instant t_1

$n(ac) = n_1 - x_1 \Rightarrow x_1 = n_1 - n(ac)$

dn $x_1 = 2,1.10^{-2} - 10^{-2} = 1,1.10^{-2}$ mol.

b) $\pi_1 = \frac{n(est)\,.\,n(eau)}{n(ac)\,.\,n(al)} = \frac{x_1^2}{(n_1-x_1)(n_2-x_1)} = \frac{(1,1.10^{-2})^2}{10^{-2} \times 0,6\,10^{-2}}$

$\pi_1 = 2,016$.

On constate que $\pi_1 \neq K$

⇒ la date t_1 ne correspond à un état d'équilibre.

5/ a/ $\pi = \frac{n(est)\,n(eau)}{n(ac)\,n(al)} = \frac{0,3 \times 0,4}{0,1 \times 0,2}$

$= 6$

On a $\pi \neq K$ ⇒ le système n'est pas en état d'équilibre dynamique.

b/ $\pi < K$ ⇒ le système évolue spontanément dans le sens qui diminue π pour atteindre K donc la réaction inverse se produit spontanément

⇒ le système évolue spontanément dans le sens de l'hydrolyse de l'ester

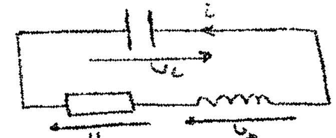
(3)

Exercice n°2.

1/ Lorsque le commutateur est à position 1, le condensateur se charge par le générateur.

Au moment t on bascule commutateur sur la position 2 le condensateur se décharge à travers la bobine et le conducteur ohmique

2/



d'après la loi des mailles

$u_C + u_R + u_b = 0$

$\Rightarrow u_C + Ri + L\frac{di}{dt} + ri = 0$

$\Rightarrow u_C + (R+r)i + L\frac{di}{dt} = 0$

or $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(Cu_C) = C\frac{du_C}{dt}$

d'où

$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + (R+r)C\frac{du_C}{dt} + u_C$

$\Rightarrow \frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R+r}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}$

L'équation différentielle s'écrit la forme

$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \alpha\frac{du_C}{dt} + \beta u_C = 0$

avec $\alpha = \frac{R+r}{L}$ et $\beta = \frac{1}{LC}$

Page Facebook : BAC – TUNISIE Site Web : www.BAC.org.tn Admin : Saber Gù Tél : 28.355.106

36

4) a/ $E = E_e + E_m = \frac{1}{2C}q^2 + \frac{1}{2}Li^2$

$= \frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}Li^2$

b/ $\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}Li^2\right)$

$= C\,u_c\frac{du_c}{dt} + L\,i\frac{di}{dt}$

or $i = C\frac{du_c}{dt}$

$\frac{dE}{dt} = i\left(u_c + L\frac{di}{dt}\right)$

d'après l'équation différentielle

$u_c + L\frac{di}{dt} = u_c + LC\frac{d^2u_c}{dt^2}$

$= -(R+r)C\frac{du_c}{dt} = -(R+r)i$

d'où $\frac{dE}{dt} = i\left(-(R+r)i\right)$

$= -(R+r)i^2$

$\frac{dE}{dt} = -(R+r)i^2 \Rightarrow dE = -(R+r)i^2 dt$

$\Rightarrow$ L'énergie totale de l'oscillateur diminue au cours du temps

cette diminution due à la perte d'énergie transformée en chaleur par effet Joule

1) a/ valeur E_1 : $E_1 = 10.10^{-6}$ J

valeur U_1 : $U_1 = 5V$

valeur I : $I = 2,5\ 10^{-3}$ A

valeur C

à $t = 0$: $E_1 = E_{e_1} + E_{L_1} = E_{e_1} = \frac{1}{2}CU_1^2$

$\Rightarrow C = \frac{2E_1}{U_1^2} = \frac{2.10\,10^{-6}}{(5)^2}$

$\boxed{C = 8.10^{-7}\,F}$

valeur E_0

à l'instant $t = 0$ le condensateur est chargé par le générateur donc $E_0 = U_1 \Rightarrow E_0 = 5V$

b/ valeur de i_2

la pente de la tangente Δ à la courbe de l'énergie est $a = -(R+r)i_2^2$

$\Rightarrow i_2^2 = -\frac{a}{R+r}$

d'après la courbe de $u_c = f(t)$ à l'instant $t_2 = 3\ 10^{-3}$ s le condensateur se décharge tel que la courbe est décroissante

$\frac{dq}{dt} < 0 \Rightarrow i_2 < 0$

d'où $i_2 = -\sqrt{-\frac{a}{R+r}}$

valeur a

$a = \frac{5\,10^{-6} - 8.10^{-6}}{3\,10^{-3} - 1,5.10^{-3}} = -2.10^{-3}$ J.

valeur i_2

$i_2 = -\sqrt{\frac{-2\,10^{-3}}{50}} = -6,32\ 10^{-3}$ A

valeur E_{L_2}

$E_{L_2} = E_2 - E_{e_2} = E_2 - \frac{1}{2}CU_2^2$

$= 5\,10^{-6} - \frac{1}{2}\,8\,10^{-7}(1,5)^2$

$E_{L_2} = 4,1\,10^{-6}$ J

(4)

valeur de L

$E_{L_2} = \frac{1}{2}Li_2^2 \Rightarrow L = \frac{2E_{L_2}}{i_2^2}$

$L = \frac{2\times4,1\,10^{-6}}{(6,32.10^{-3})^2} = 0,205$ H

37

Exercice n°2.

1/ L'établissement du courant électrique dans le circuit n'est pas instantané. Il y a un certain retard de temps. Ce retard est dû au phénomène d'auto-induction qui apparait dans le circuit

2/ La loi des mailles donne

$E - u_b - u_R = 0$

$\Rightarrow E = u_b + u_R = ri + L\frac{di}{dt} + Ri$

en régime permanent $i = I$

$\Rightarrow i = I$ donc $\frac{di}{dt} = 0$

$E = rI + RI = (r+R)I$

d'où $\boxed{I = \frac{E}{R+r}}$

la tension aux bornes de la bobine est $u_b = ri + L\frac{di}{dt}$

en régime permanent $\frac{di}{dt} = 0$

$\Rightarrow u_b = rI$

$U_b = r\frac{E}{r+R}$

(5)

3/ La loi des mailles donne

$E - u_b - u_R = 0$

$\Rightarrow E = u_b + u_R = ri + L\frac{di}{dt} + Ri$

$= (r+R)i + L\frac{di}{dt}$

$\Rightarrow \frac{L}{r+R}\frac{di}{dt} + i = \frac{E}{r+R}$

Equation différentielle s'écrit sous la forme $\alpha\frac{di}{dt} + i = \beta$

avec $\begin{cases}\alpha = \frac{L}{R+r}\\ \beta = \frac{E}{R+r}\end{cases}$

La constante α constitue une grandeur physique caractéristique du circuit appelée la constante de temps notée τ

b/ les conditions initiales

$\begin{cases}\text{lorsque } t = 0 \text{ , } i = 0\\ \text{lorsque } t \to +\infty \quad i = I = \frac{E}{R+r}\end{cases}$

l'expression $i = \frac{E}{R+r}\left(1 - e^{-\frac{R+r}{L}t}\right)$

$t = 0$: $i = 0$

$t \to +\infty$: $e^{-\frac{R+r}{L}t} = 0 \Rightarrow i = \frac{E}{R+r}$

Cette expression vérifie les conditions initiales.

2^{eme} expression : $i(t) = \frac{E}{R+r} e^{-\frac{1}{\tau} \cdot t}$ 38

pour $t=0$: $i = \frac{E}{R+r}$

pour $t \to \infty$: $i = 0$

n'est pas en accord avec les condition initiale

3) L'expression de l'intensité qui est solution de l'équation différentielle est

$$i(t) = \frac{E}{R+r}\left(1 - e^{-\frac{R+r}{L} \cdot t}\right)$$

4) a/ D'après la courbe n°1

$I = 200 \cdot 10^{-3} A$

• D'après la courbe n°2

valeur E : $E = U_b(t=0) \Rightarrow E = 12V$

valeur U_b : $U_b = 2V$

• valeur de τ :

la tangente à l'origine des temps à la courbe n°1 ($i = f(t)$) coupe l'asymptote à cette courbe au point d'abscisse

$\tau = 10 \cdot 10^{-3} s$

Autre méthode

• $t = \tau$: $i = 0,63 \cdot I_0 = 0,63 \times 200 \cdot 10^{-3}$
$= 126 \cdot 10^{-3} A$.

• La tangente à l'origine des temps à la courbe n°2 ($U_b = g(t)$) coupe à l'asymptote à cette courbe au point d'abscisse τ.

b/ valeur R

$U_R = E - U_b = 12 - 2 = 10V$

$U_R = RI \Rightarrow R = \frac{U_R}{I} = \frac{10}{200 \cdot 10^{-3}} = 50\,\Omega$

valeur de r

$I = \frac{E}{r+R} \Rightarrow r + R = \frac{E}{I}$

$\Rightarrow r = \frac{E}{I} - R$

AN $r = \frac{12}{200 \cdot 10^{-3}} - 50 = 10\,\Omega$

valeur L

$\tau = \frac{L}{R+r} \Rightarrow L = (R+r)\tau$

AN $L = 60 \times 10 \cdot 10^{-3} = 0,6\,H$

5/ $U_R(t) = R\,i(t)$

$= R \cdot I\left(1 - e^{-\frac{R+r}{L} \cdot t}\right)$

$= R \cdot I\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

AN

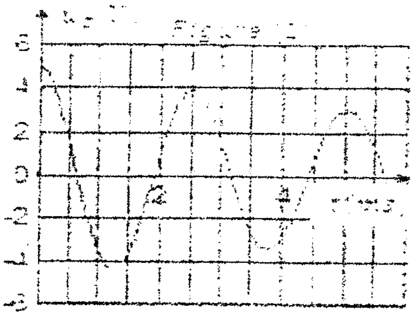
$$\boxed{U_R(t) = 10\left(1 - e^{-100t}\right)}$$

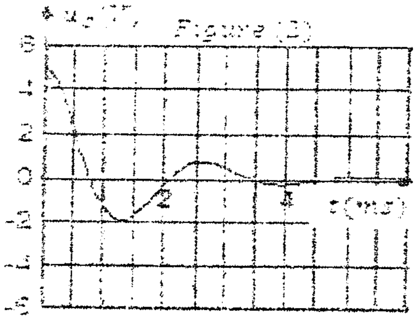
t	0	τ	3τ	5τ
$U_R(V)$	0	6,32	9,5	10

($\tau = 10 \cdot 10^{-3} s$)

Lycée Hédi Chaker Sfax		
Epreuve Sciences Physique Devoir de synthèse	Décembre 2011	M. Abdmouleh Nabil
Nom :	Prénom :	Classe :

39





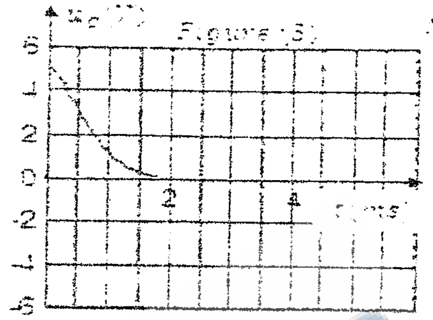
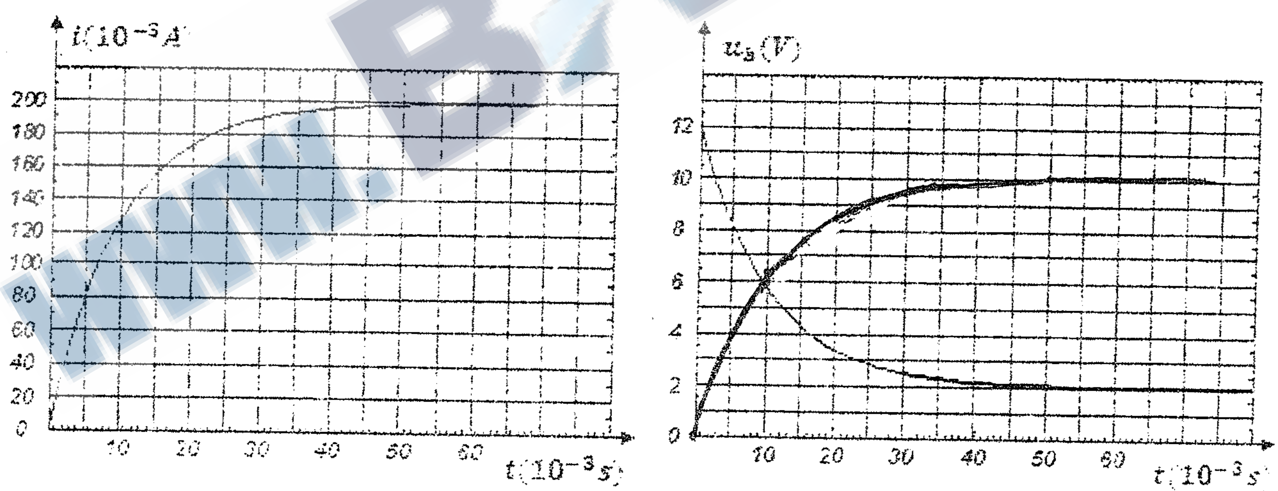


Figure n°	3	1	2
Valeur de la résistance R (Ω)	560	30	280
Régime d'oscillation	apériodique	pseudopériodique	pseudopériodique

Document-1-



Document-2-

Lycée 9 Avril 1938 SFAX	Devoir de synthèse n°1	Année scolaire 2011/2012
Date :9-12-2011	Sciences physiques	Classes : $4^{ème}$ Tec-Math

CHIMIE : (7pts)

Exercice n°1 :

L'hydrolyse d'un ester (E) de formule brute $C_4H_8O_2$ donne un alcool (A) et un acide carboxylique (B).

La constante d'équilibre relative à cette réaction est $K = \frac{1}{(1,5)^2}$.

La température du milieu réactionnel reste constante durant la réaction chimique qui se termine après 2 heures.

1) Ecrire en utilisant les formules semi-développées l'équation de la réaction d'hydrolyse sachant que (A) est un alcool secondaire.
2) a- Donner à partir des données les caractères de cette réaction.
   b- Comment peut-on accélérer cette réaction chimique ?
3) Dans une première expérience on part à t=0 d'un mélange équimolaire contenant n_1 mol de l'ester (E) et n_1 mol d'eau. **A l'équilibre** on obtient **2.10^{-2} mol** d'alcool.
   a- Dresser le tableau descriptif de la réaction d'hydrolyse.
   b- Déterminer n_1
   c- En déduire la composition du mélange à l'équilibre.
   d- Calculer le taux d'avancement final τ_f.
4) Déterminer la valeur du taux d'avancement de la réaction lorsque $\pi = 0,25$.
5) Dans une deuxième expérience on part à t=0 d'un mélange contenant 10^{-2} **mol** de l'ester (E), **2.10^{-2} mol** de l'alcool (A) et **2.10^{-2} mol** de l'acide (B).
   a- Dans quel sens évolue ce système chimique?
   b- Calculer le pourcentage de l'ester dans le mélange lorsque l'équilibre est atteint.
   c- On veut augmenter ce pourcentage obtenu à l'équilibre. En utilisant la fonction des concentrations, dire si à l'équilibre il faut ajouter ou diminuer la quantité d'eau.

Exercice n°2 :

En solution aqueuse les ions A^{3+} réagissent avec les ions B^- pour donner les ions C^{2+} selon l'équation :

$$A^{3+} + B^- \rightleftarrows C^{2+}$$

La constante d'équilibre relative à cette réaction est K = 1000 à une température T.

1) A t=0 et à la température T, on mélange : **2.10^{-4} mol** d'ions A^{3+} avec **2.10^{-4} mol** d'ions B^-. On obtient une solution de volume **V = 450 mL**.
   a- Dresser le tableau descriptif de cette réaction.
   b- Donner l'expression de la fonction des concentrations en fonction de l'avancement x.
2) Sachant qu'à $t = t_1$ le nombre de moles d'ions B^- est égal 4 fois au nombre de moles d'ions C^{2+}.
   a- Le système est- il en état d'équilibre chimique à l'instant de date t_1?
   b- Déterminer la composition du mélange à l'équilibre chimique.
3) Au mélange obtenu à l'équilibre on ajoute sans variation de volume à la température T 10^{-5} mol d'ions C^{2+} et 10^{-5} mol d'ions B^-.
   a- Comment varie le nombre de moles d'ions A^{3+} dans ce mélange? Justifier.
   b- Déterminer la nouvelle composition du mélange lorsque l'équilibre est atteint sachant que le nombre de moles d'ions total à l'équilibre est égal à **$3,74.10^{-4}$ mol**.

PHYSIQUE : (13 pts)

Exercice n°1 :

Un circuit est composé d'un générateur de tension constante E, d'une bobine d'inductance **L = 0,3 H** et de résistance r, d'un interrupteur K, de deux conducteurs ohmiques **$R_1 = 200\ \Omega$ et R_2** inconnue et une diode (Figure 1). A un instant pris comme origine des temps on ferme K et on suit avec un oscilloscope à mémoire l'évolution au cours du temps de la tension $u_{R_1}(t)$ aux bornes de R_1 et la tension $u_b(t)$ aux bornes de la bobine. On obtient les enregistrements de la figure 2.

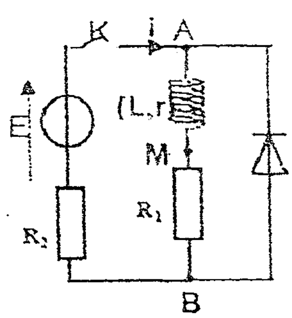


figure n°1

) a- Montrer que l'oscillogramme (a) correspond à la tension $u_{R_1}(t)$.

b- Quelle est l'influence de la bobine lors de l'établissement du courant dans le circuit ?

) a- Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension $u_{R_1}(t)$.

b- La solution de cette équation différentielle est : $u_{R_1}(t) = U_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

Déterminer les expressions des constantes U_1 et τ.

) a- Déterminer graphiquement :

* La f e m E du générateur.
* L'intensité du courant en régime permanent.
* La valeur de la tension aux bornes de la bobine en régime permanent. Déduire la valeur de r
* La constante de temps τ .

b- Déduire de deux façons la valeur de R_2.

) Calculer l'énergie emmagasinée dans la bobine en régime permanent.

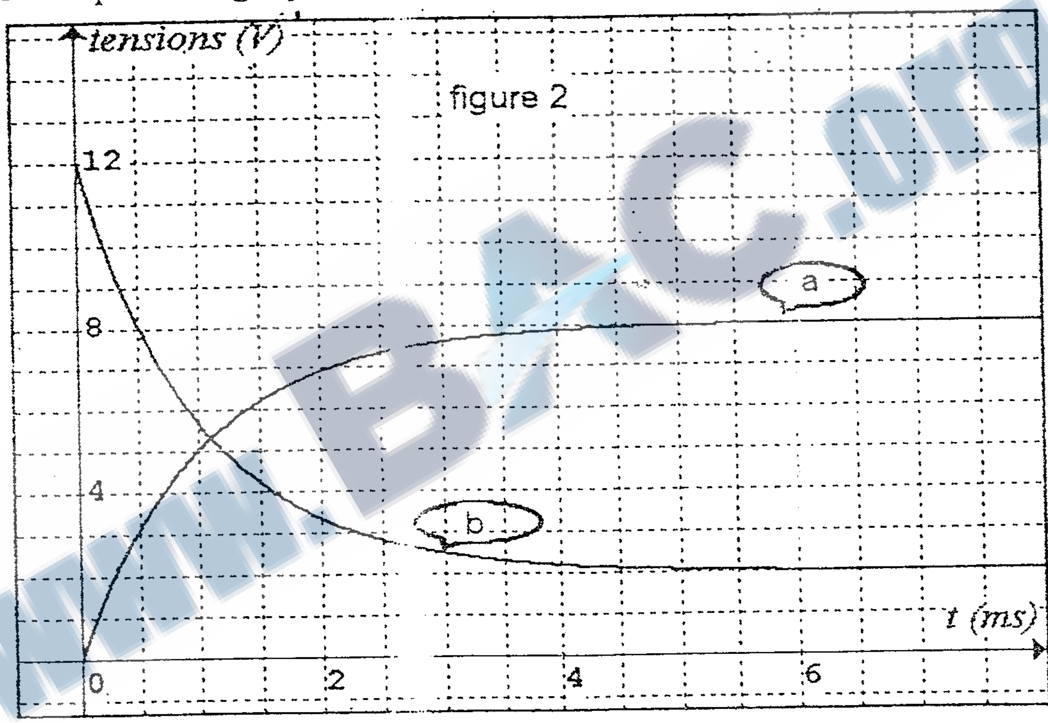
) Le régime permanent étant établi. A une nouvelle origine des temps t'= 0, on ouvre l'interrupteur K

a- Donner l'expression de la constante de temps τ_1 du dipôle AB.

b- Quel est le phénomène le plus rapide ; l'établissement ou la rupture du courant dans le dipôle AB ? Justifier.

c- Représenter l'allure de la tension $u_{R_1}(t)$ au cours de cette rupture en précisant les points remarquables

d- Que se passe –t-il pour l'énergie qui était dans la bobine ? Calculer la partie qui apparaît dans chaque dipôle.



Exercice n°2 :

Le montage permettant d'étudier expérimentalement les oscillations libres d'un circuit RLC série comporte:

*Un générateur idéal de tension de f e m constante E=10V.

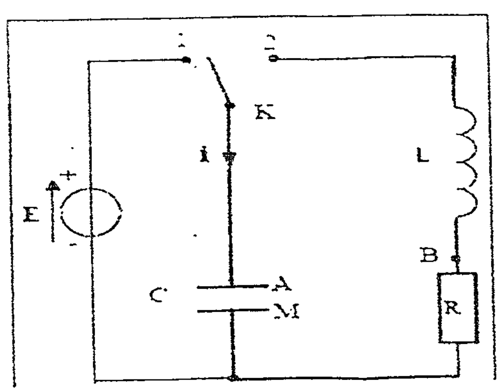
*Un condensateur de capacité C = 4 µF .

* Une bobine purement inductive d'inductance L= 1 H.

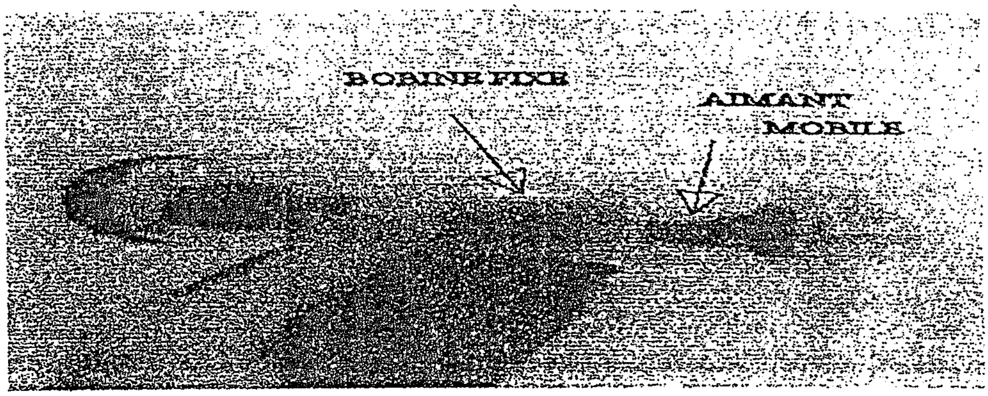
* Un résistor de résistance R= 254 Ω .

* Un commutateur K. (voir figure ci-contre)

On charge complètement le condensateur.



Exercice n°3 : Une lampe de poche qui ne nécessite aucune pile



En 1821 M. Faraday a découvert l'induction électromagnétique: Le principe général est qu'un aimant passant dans un bobinage de fil produit un courant.
La lampe à induction est une lampe de poche qui ne nécessite aucune pile.
Cette lampe se charge en la secouant. Il n'est pas nécessaire de secouer avec force mais plutôt avec régularité. L'objectif est d'obtenir le déplacement de l'aimant principal a travers le bobinage.
Le mouvement de vas et vient de l'aimant lorsque on secoue la lampe produit une énergie qui est transformée en électricité .L'énergie électrique produite est alors stockée dans un condensateur capable de la conserver pendant des mois et capable d'être rechargé plus d'un million de fois.
Le condensateur se charge puis se décharge dans une diode électroluminescente (DEL). La DEL à une durée de vie estimée d'au moins 50 000 heures, même exposée à des chocs répétés.

La lampe à induction peut délivrer de 30 à 50 minutes de luminosité pour 20 à 30 min d'agitation.

De ce fait la "Night Star" fournira toujours une lumière efficace sans utiliser de pile ni nécessiter le changement d'aucune pièce.

Secouer : agiter rapidement et plusieurs fois.

Questions:

1) Expliquer le phénomène physique origine du courant dans la lampe.
2) Préciser l'inducteur et l'induit dans cette lampe.
3) Quelles sont les formes d'énergie qui apparaissent dans cette lampe. Justifier.
4) Donner les avantages d'une lampe à induction par rapport à une lampe de poche traditionnelle.

I/ A t= 0, on bascule K sur la position -2-.

On observe, sur l'oscilloscope, la tension $u_R(t)$ aux bornes du résistor (figure 3).

1) a- Pourquoi la tension $u_R(t)$ est dite grandeur oscillante?

b- De quel régime oscillatoire s'agit-il ? Justifier.

2) Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de la tension u_C.

3) a- Calculer la valeur algébrique de la charge q_M de l'armature M du condensateur à l'instant t=0.

b- Déterminer la pseudo-période T des oscillations puis la comparer à T_0 période propre du même oscillateur non amorti. Comment peut-on qualifier cet amortissement ?

c- Pour $t \in \left[0 ; \frac{T}{4}\right]$: Quel est le signe de l'intensité du courant dans le circuit? Représenter sur un schéma le sens de i et le sens de déplacement des électrons dans le circuit RLC fermé.

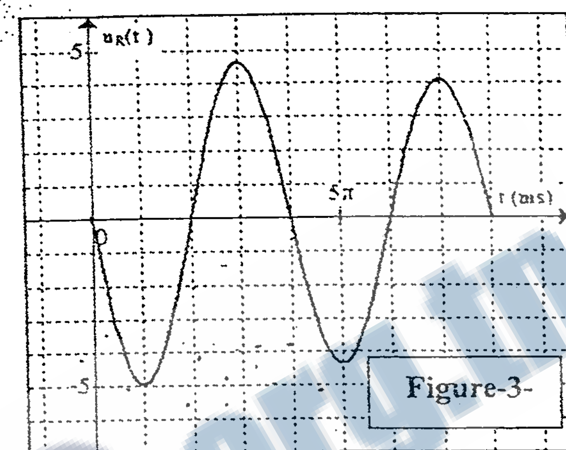


Figure-3-

4) a- Donner l'expression de l'énergie totale E_T dans le circuit, puis montrer qu'elle diminue au cours du temps.

b- Sous quelles formes se trouve l'énergie dans l'oscillateur à chacune des dates $t_0 = 0$ et $t_1 = \frac{T}{4}$?

c- Calculer la variation de l'énergie dans l'oscillateur entre les deux instants t_0 et t_1. Interpréter cette variation.

d- Sachant que l'oscillateur perd 6 % de son énergie chaque demi-oscillation:

- Calculer l'énergie totale de l'oscillateur à t = T.
- Déduire la valeur de la tension aux bornes du condensateur à cette date.

II / Dans une 2ème expérience, on réalise un circuit (L, C) formé par le condensateur de capacité C =4 µF chargé sous la tension U=10V et la bobine purement inductive d'inductance L=1 H

1) Quelle est la nature des oscillations électriques dans ce circuit ?

2) a- Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de la charge q du condensateur.

b- La solution de cette équation différentielle est : $q(t) = Q_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi_q)$

Déterminer les valeurs de ω_0 ,Q_{max} et φ_q ,en prenant pour origine des temps l'instant ou q= - Qmax.

c- Déterminer l'expression de l'intensité du courant dans le circuit.

3) a- Montrer que l'énergie totale se conserve, calculer sa valeur.

b- Donner les expressions de E_C (énergie électrostatique, et de E_L (énergie magnétique) en fonction de la charge q du condensateur. Pour quelles valeurs de q a-t-on $E_C = E_L$?

c- Représenter les courbes de E_C et de E_L en fonction de q en précisant les points remarquables.

Chimie

Ex. 1 : hydrolyse d'un ester (E) de formule brute $C_4H_8O_2$ → alcool (A) et un acide carboxylique (B)

- la constante d'équilibre : $K = \frac{1}{(1,5)^2} = \frac{1}{2,25}$
- T = constante
- durée de la réaction 2 heures

1/ équation de la réaction ?

(0,5) (A) : alcool secondaire → $R_1-\underset{R_2}{\overset{H}{C}}-OH$

or puisque l'ester contient 4 carbone ⇒ l'alcool contient 3 carbone et l'acide 1 carbone d'où

la formule de l'alcool est $CH_3-\underset{CH_3}{CH}-OH$

la formule de l'ester est : $R-C\begin{smallmatrix}=O\\ -O-R'\end{smallmatrix} \rightarrow H-C\begin{smallmatrix}=O\\ -O-\underset{CH_3}{CH}-CH_3\end{smallmatrix}$

l'acide a pour formule $R-C\begin{smallmatrix}=O\\ -OH\end{smallmatrix} \rightarrow H-C\begin{smallmatrix}=O\\ -OH\end{smallmatrix}$

l'équation de la réaction est :

ester (E) + eau ⇄ acide (B) + alcool (A)

$H-C\begin{smallmatrix}=O\\ -O-\underset{CH_3}{CH}-CH_3\end{smallmatrix} + H_2O \rightleftarrows H-C\begin{smallmatrix}=O\\ -OH\end{smallmatrix} + CH_3-\underset{CH_3}{CH}-OH$

2/ b/ Pour accélérer cette réaction

(0,25)
- on augmente la température ou
- on ajoute un catalyseur (H_2SO_4)

ou encore on fait les deux opérations

a/ les caractères de cette réaction ?

(0,5)
- athermique (T = cte)
- lente (durée = 2 heures)

3/ 1ère expérience : à t=0 mélange équimolaire n_1 mol d'ester et n_1 mol d'eau.

A l'équilibre on a 2.10^{-2} mol d'alcool

a/ Tableau descriptif de cette hydrolyse

(0,25)

	$HC\begin{smallmatrix}=O\\ -O-\underset{CH_3}{CH}-CH_3\end{smallmatrix}$ +	H_2O ⇄	$HC\begin{smallmatrix}=O\\ -OH\end{smallmatrix}$ +	$CH_3-\underset{CH_3}{CH}-OH$
à t=0	n_1	n_1	0	0 (mol)
t>0	n_1-x	n_1-x	x	x (mol)
t_f	n_1-x_f	n_1-x_f	x_f	$x_f = 2.10^{-2}$ (mol)

b/ $n_1 = ?$

(0,5) $K = \pi_{eq.dyn} = \frac{[A]^1_{eq}.[B]^1_{eq}}{[E]^1_{eq}[eau]^1_{eq}} = \frac{(\frac{x_f}{V})(\frac{x_f}{V})}{(\frac{n_1-x_f}{V})(\frac{n_1-x_f}{V})}$

$K = \frac{x_f^2}{(n_1-x_f)^2} = \frac{1}{(1,5)^2} \Rightarrow \frac{x_f}{n_1-x_f} = \frac{1}{1,5} \Rightarrow$

$1,5x_f = n_1 - x_f \Rightarrow 2,5x_f = n_1$ donc

$n_1 = 2,5x_f = 2,5 . 2.10^{-2}$ mol $= 5.10^{-2}$ mol.

c/ Composition du mélange à l'équilibre

(0,25) $(n_{ac})_f = (n_{al})_f = x_f = 2.10^{-2}$ mol

$(n_{ester})_f = (n_{eau})_f = n_1 - x_f = 5.10^{-2} - 2.10^{-2} = 3.10^{-2}$ mol.

d/ le taux d'avancement final ?

(0,25) $\tau_f = \frac{x_f}{x_{max}}$ or $x_f = 2.10^{-2}$ mol et $n_1 - x_{max} = 0$

$\Rightarrow x_{max} = n_1 = 5.10^{-2}$ mol

$\tau_f = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{2.10^{-2}}{5.10^{-2}} = \frac{2}{5} = 0,4 < 1$

⇒ réaction limitée

4/ Taux d'avancement ? / $\pi = 0,25$

(0,5) $\tau = \frac{x}{x_{max}}$ avec $x_{max} = 5.10^{-2}$ mol.

$\Rightarrow x = ?$ / $\pi = 0,25$

$\pi = \frac{x^2}{(n_1-x)^2} = 0,25 = 25.10^{-2} = (5.10^{-1})^2$

$\Rightarrow \frac{x}{n_1-x} = 5.10^{-1} = 0,5 \Rightarrow 0,5(n_1-x) = x$

$0,5n_1 - 0,5x = x \Rightarrow 1,5x = 0,5n_1$

$\Rightarrow x = \frac{0,5}{1,5}n_1 = \frac{1}{3}n_1 = \frac{1}{3}.5.10^{-2}$ mol

$\tau = \frac{x}{x_{max}} = \frac{\frac{1}{3}n_1}{n_1} = \frac{1}{3} = 0,333$

2ème méthode $\tau = \frac{x}{x_{max}} = \frac{x}{n_1} \Rightarrow x = n_1\tau$.

$\pi = \frac{x^2}{(n_1-x)^2} = \frac{(n_1\tau)^2}{(n_1-n_1\tau)^2} = \frac{\tau^2}{(1-\tau)^2} = 0,25$

$\Rightarrow \frac{\tau}{1-\tau} = 0,5 \Rightarrow 0,5(1-\tau) = \tau \Rightarrow$

$0,5 - 0,5\tau = \tau \Rightarrow 1,5\tau = 0,5 \Rightarrow$

$\tau = \frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3} = 0,333$.

5/ 2ème expérience

A t=0 on a $(n_{ester})_0 = 10^{-2}$ mol

(0,25) $(n_{ac})_0 = (n_{al})_0 = 2.10^{-2}$ mol

a/ sens d'évolution du système ?

$\pi_0 = \frac{[A]_0.[B]_0}{[E]_0.[eau]_0} = +\infty$ car $[eau]_0 = 0$, $(n_{eau})_0 = 0$

$\pi_0 = +\infty > K = \frac{1}{(1,5)^2} \Rightarrow$

le système évolue spontanément dans le sens inverse (c.à.d dans le sens de l'estérification).

b/ Pourcentage de l'ester dans le mélange à l'équilibre ?

(0,5)

	(E) +	eau ⇄	(A) +	(B)
à t=0	10^{-2}	0	2.10^{-2}	2.10^{-2} (mol)
t>0	$10^{-2}+x$	x	$2.10^{-2}-x$	$2.10^{-2}-x$
t_f	$10^{-2}+x_f$	x_f	$2.10^{-2}-x_f$	$2.10^{-2}-x_f$

A l'équilibre on a $K = \pi_{eq.dyn} = \frac{(2.10^{-2}-x_f)^2}{(10^{-2}+x_f)x_f}$

$K = \frac{1}{\ldots} = \frac{1}{\ldots}$

$U_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2+r}.E = \frac{R_1}{R}.E$

3/ a/ Déterminons graphiquement :

* E = ?

on a : $u_b + u_{R_1} + u_{R_2} = E$

à t = 0, $u_{R_1} = u_{R_2} = 0$ car $i = 0$

(0,25) $\Rightarrow u_b = E$

d'après la courbe (b), à t = 0, $u_b = 12V$

donc $E = 12 V$

* l'intensité du courant en régime permanent ?

(0,25) $u_{R_1 max} = R_1 I_{max} \Rightarrow I_{max} = \frac{u_{R_1 max}}{R_1}$

avec $u_{R_1 max} = U_1 = 8V$

$I_{max} = \frac{8V}{200\Omega} = 0,04 A = 40 mA$

* u_b en régime permanent, r = ?

$u_b = 2V$

(0,5) $u_b = r.I_{max} \Rightarrow r = \frac{u_b}{I_{max}} = \frac{2V}{0,04A} = 50\Omega$

donc $r = 50\Omega$

* la constante de temps τ = ?

(0,25) si $t = \tau \Rightarrow u_{R_1} = U_1(1-e^{-1})$

$u_{R_1} = 0,63 U_1 = 0,63 . 8V = 5,04 V$

$u_{R_1} = 5,04V \longrightarrow \tau = 1 ms = 10^{-3} s$

d'après la courbe (a)

b/ déduction de R_2 = ?

(0,5) 1ère méthode : $\tau = \frac{L}{R_1+R_2+r}$

$\Rightarrow (R_1+R_2+r)\tau = L$

$R_2\tau + (R_1+r)\tau = L$

$R_2\tau = L - (R_1+r)\tau$

$R_2 = \frac{L}{\tau} - (R_1+r) = \frac{0,3}{10^{-3}} - (200+50)$

$R_2 = 300 - 250 = 50\Omega$

$R_2 = 50\Omega$.

2ème méthode : en régime permanent

on a $(R_1+R_2+r) I_{max} = E$

$\Rightarrow R_2 I_{max} = E - (R_1+r)I_{max}$

$\Rightarrow R_2 = \frac{E}{I_{max}} - (R_1+r)$

$R_2 = \frac{12}{0,04} - (200+50)$

$R_2 = 300 - 250 = 50\Omega$.

$R_2 = 50\Omega$

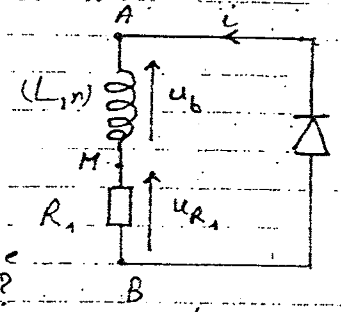
4/ Energie emmagasinée dans la bobine en régime permanent ?

(0,25) $E_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L I_{max}^2 = \frac{1}{2} 0,3.(0,04)^2 = 2,4.10^{-4} J$

$E_L = 0,24.10^{-3} J = 0,24 mJ$

a/ Expression de la constante de temps τ_1 du dipole AB.

(0,25) $\tau_1 = \frac{L}{R_1+r}$



b/ le phénomène le plus rapide ? (l'établissement ou la rupture du courant)

(0,25) $\tau = \frac{L}{R_1+R_2+r} < \tau_1 = \frac{L}{R_1+r}$

$\Rightarrow$ l'établissement du courant électrique est plus rapide que sa rupture dans le dipôle AB.

c/ $u_{R_1}(t) = U_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}$ avec $U_1 = U_{R_1 max} = 8V$

(0,5) et $\tau_1 = \frac{L}{R_1+r} = \frac{0,3}{250} = 1,2.10^{-3} s$; $\tau_1 = 1,2 ms$.

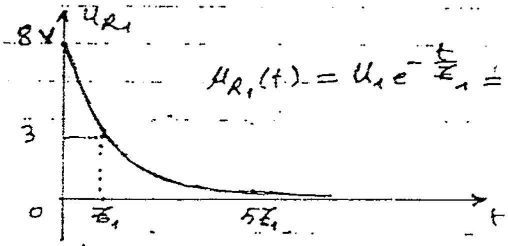
si $t = 0 \Rightarrow u_{R_1} = U_1 = U_{R_1 max} = 8V$

si $t \rightarrow +\infty \Rightarrow u_{R_1} = 0$

si $t = \tau_1 \Rightarrow u_{R_1} = 0,37 U_1 = 2,96 V \simeq 3V$

$\frac{du_{R_1}}{dt} = -\frac{U_1}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} < 0 \Rightarrow u_{R_1}(t)$ est décroissante

t	0		+∞
$\frac{du_{R_1}}{dt}$		−	
u_{R_1}	8V	↘	0



$u_{R_1}(t) = U_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} = 8 e^{-\frac{t}{\tau_1}}$

d/ l'énergie emmagasinée dans la bobine est dissipée par effet Joule dans la bobine ($r \neq 0$) et dans le Résistor R_1.

E_L est l'énergie dissipée dans (R_1+r).

$\Rightarrow$ Joule $R_1+r \longrightarrow E_L$

$r \longrightarrow E(r) = \frac{r}{R_1+r} E_L$

(0,5) $R_1 \longrightarrow E(R_1) = \frac{R_1}{R_1+r} E_L$.

$E(r) = \frac{r}{R_1+r} E_L = \frac{50}{250} . 2,4.10^{-4} = 0,48.10^{-4} J$

$E(R) = \frac{R_1}{R_1+r} E_L = \frac{200}{250} . 2,4.10^{-4} = 1,92.10^{-4} J$

$2{,}25(4.10^{-4} + x_f^2 - 4.10^{-2}x_f) = 10^{-2}x_f + x_f^2$

$9.10^{-4} + 2{,}25x_f^2 - 9.10^{-2}x_f = 10^{-2}x_f + x_f^2$

$1{,}25x_f^2 - 0{,}1x_f + 9.10^{-4} = 0$

$ax_f^2 + bx_f + c = 0$ avec $a = 1{,}25$; $b = -0{,}1$; $c = 9.10^{-4}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0{,}01 - 0{,}0045$

$\Delta = 55.10^{-4} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 7{,}42.10^{-2}$

$(x_f)_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0{,}1 + 0{,}0742}{2{,}5} = 0{,}07$

$(x_f)_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0{,}1 - 0{,}0742}{2{,}5} = 0{,}01$

on a $0 \leq x \leq 2.10^{-2} = 0{,}02$

donc la 1ère solution (0,07) est à rejeter et on prend la 2ème solution c.à.d $x_f = 0{,}01$ mol

$x_f = 10^{-2}$ mol

$(n_{ester})_f = 10^{-2} + x_f = 10^{-2} + 10^{-2} = 2.10^{-2}$ mol

$(n_{eau})_f = x_f = 10^{-2}$ mol

$(n_{ac})_f = (n_{al})_f = 2.10^{-2} - x_f = 2.10^{-2} - 10^{-2} = 10^{-2}$ mol

$(n_T)_f = (n_{est})_f + (n_{eau})_f + (n_{ac})_f + (n_{al})_f$

$= 2.10^{-2} + 10^{-2} + 10^{-2} + 10^{-2}$

$(n_T)_f = 5.10^{-2}$ mol

dans 5.10^{-2} mol du mélange on a 2.10^{-2} mol d'ester

" 100 mol $\longrightarrow \frac{2.10^{-2}.100}{5.10^{-2}} = 40$ mol d'ester

donc le pourcentage d'ester est de 40 %

ou encore $\frac{(n_{ester})_f}{(n_T)_f} = \frac{2.10^{-2}}{5.10^{-2}} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

$\Rightarrow$ % ester = 40 %

c/ on veut augmenter ce pourcentage (0,25) $\Rightarrow$ faut-il ajouter ou diminuer la quantité d'eau ?

$K = \pi_{eq.dyn} = \frac{(n_{ac})_{eq}.(n_{al})_{eq}}{(n_{ester})_{eq}.(n_{eau})_{eq}}$

pour augmenter ce pourcentage il faut augmenter le nombre de mole d'ester final $\Rightarrow$ déplacer l'équilibre dans le sens inverse (l'estérification)

$\Rightarrow \pi$ doit être supérieur à K

$\pi > K \Rightarrow$ il faut diminuer le nombre de mol d'eau ($n_{eau} \searrow$)

$K = 1000 = 10^3$ à une température T

1/ A t = 0 et à T on mélange $(n_{A^{3+}})_0 = 2.10^{-4}$ mol et $(n_{B^-}) = 2.10^{-4}$ $\longrightarrow$ solution de volume $V = 450$ m ; $V = 0{,}45$ L

a/ Tableau descriptif (0,25)

	A^{3+} +	B^- $\rightleftarrows$	C^{2+}	
à t=0	2.10^{-4}	2.10^{-4}	0	(mol)
t>0	$2.10^{-4}-x$	$2.10^{-4}-x$	x	"
t_f	$2.10^{-4}-x_f$	$2.10^{-4}-x_f$	x_f	"

b/ $\pi = f(x)$?

(0,5) $\pi = \frac{[C^{2+}]^1}{[A^{3+}]^1[B^-]^1} = \frac{\frac{x}{V}}{\left(\frac{2.10^{-4}-x}{V}\right)\left(\frac{2.10^{-4}-x}{V}\right)}$

$$\boxed{\pi = V.\frac{x}{(2.10^{-4}-x)^2}}$$

2/ à $t = t_1$ on a $n_{B^-} = 4\,n_{C^{2+}}$

a/ le système est-il en équilibre à t_1

(0,5) $n_{B^-} = 4\,n_{C^{2+}}$ à $t_1 \rightarrow$

$2.10^{-4} - x_1 = 4x_1 \Rightarrow 5x_1 = 2.10^{-4}$

$\rightarrow x_1 = \frac{2}{5}.10^{-4}$ mol $= 4.10^{-5}$ mol $= 0{,}4.10^{-4}$ mol

$\pi_1 = 0{,}45.\frac{0{,}4.10^{-4}}{(2.10^{-4} - 0{,}4.10^{-4})^2} = \frac{0{,}45.0{,}4}{(1{,}6)^2.10^{-4}}$

$\pi_1 = 703{,}125 \simeq 703$

$\pi_1 = 703 < K = 1000$

$\pi_1 \neq K$ le système n'est pas en équilibre

b/ Composition du mélange à l'équilibre ! (0,5)

$\Rightarrow x_f = ?$

on a $\pi_{eq\,dy} = K = V.\frac{x_f}{(2.10^{-4}-x_f)^2} = 1000$

$\Rightarrow 0{,}45.x_f = 1000(2.10^{-4} - x_f)^2$

$0{,}45x_f = 1000(4.10^{-8} + x_f^2 - 4.10^{-4}x_f)$

$0{,}45x_f = 4.10^{-5} + 1000x_f^2 - 4.10^{-1}x_f$

$10^3x_f^2 - 0{,}85x_f + 4.10^{-5} = 0$

$x_f^2 - 8{,}5.10^{-4}x_f + 4.10^{-8} = 0$

$\Delta = (8{,}5.10^{-4})^2 - 4.1.4.10^{-8} =$

$\Delta = 72{,}25.10^{-8} - 16.10^{-8} = 56{,}25.10^{-8}$

$\rightarrow \sqrt{\Delta} = 7{,}5.10^{-4}$

$(x_f)_1 = \frac{+8{,}5.10^{-4} - 7{,}5.10^{-4}}{2} = \frac{1}{2}.10^{-4}$

$(x_f)_1 = 0{,}5.10^{-4}$ mol

2

$(x_f)_2 = 8.10^{-4}$ mol or

$0 \le x \le 2.10^{-4}$ mol

donc ce dernier résultat est à rejeter

on a donc $x_f = 0,5.10^{-4}$ mol ⇒

$(n_{A^{3+}})_f = (n_{B^-})_f = 2.10^{-4} - x_f = 2.10^{-4} - 0,5.10^{-4}$

$= 1,5.10^{-4}$ mol

$(n_{C^{2+}})_f = x_f = 0,5.10^{-4}$ mol

0,5 3/ a/

	A^{3+}	$+ B^-$	$\rightleftarrows C^{2+}$
à t_{eq}	$1,5.10^{-4}$	$1,5.10^{-4}$	$0,5.10^{-4}$
à $t'=0$	$1,5.10^{-4}$	$1,5.10^{-4}+10^{-5}$	$0,5.10^{-4}+10^{-5}$
à $t'=0$	$1,5.10^{-4}$	$1,6.10^{-4}$	$0,6.10^{-4}$

$$\pi' = V.\frac{0,6.10^{-4}}{1,5.10^{-4}\,1,6.10^{-4}} = 0,45.\frac{0,6}{1,5.1,6}.10^{4}$$

$\pi' = 1125 > K = 1000$

⇒ le système évolue spontanément dans le sens inverse

⇒ $n_{A^{3+}}$ augmente

b/ la nouvelle composition du mélange lorsque l'équilibre est 0,25 atteint et $(n_t)_{eq} = 3,74.10^{-4}$ mol.

	A^{3+}	$+ B^-$	$\rightleftarrows C^{2+}$
à $t'=0$	$1,5.10^{-4}$	$1,6.10^{-4}$	$0,6.10^{-4}$
$t'>0$	$1,5.10^{-4}+x$	$1,6.10^{-4}+x$	$0,6.10^{-4}-x$
t'_{eq}	$1,5.10^{-4}+x_f$	$1,6.10^{-4}+x_f$	$0,6.10^{-4}-x_f$

$(n_t)_f = 1,5.10^{-4}+x_f + 1,6.10^{-4}+x_f + 0,6.10^{-4}-x_f$

$(n_t)_f = x_f + 3,7.10^{-4} = 3,74.10^{-4}$

$\Rightarrow x_f = (3,74-3,70)10^{-4} = 0,04.10^{-4}$

$x_f = 0,04.10^{-4}$ mol $= 4.10^{-6}$ mol.

donc la composit° finale est:

$(n_{A^{3+}})_f = 1,5.10^{-4}+x_f = 1,5.10^{-4}+0,04.10^{-4}$

$= 1,54.10^{-4}$ mol

$(n_{B^-})_f = 1,6.10^{-4}+x_f = 1,6.10^{-4}+0,04.10^{-4}$

$= 1,64.10^{-4}$ mol

$(n_{C^{2+}})_f = 0,6.10^{-4} - x_f = 0,6.10^{-4} - 0,04.10^{-4}$

$= 0,56.10^{-4}$ mol.

③

$L = 0,3$ H ; $r = ?$

$R_1 = 200\ \Omega$; $R_2 = ?$

A $t=0$, on ferme K → $\begin{cases} u_{R_1}(t) \text{ et} \\ u_b(t) \end{cases}$

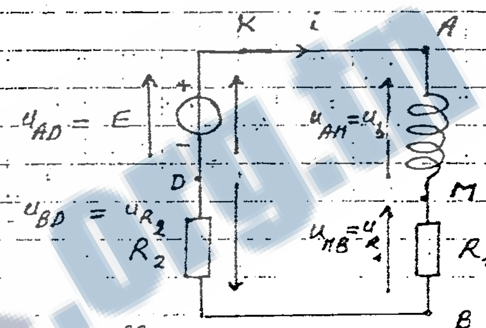
1/ a/ m.q. l'oscillogramme (a) → $u_{R_1}(t)$?

0,25 à $t=0$, $i=0$ → $u_{R_1} = R_1 i = 0$

et progressivement il s'établit un courant permanent ⇒ (a) → $u_{R_1}(t)$

b/ l'établissement du courant 0,25 permanent n'est pas instantanée (régime transitoire ou s'établit avec un retard) car la bobine s'oppose par son inductance L (ou par sa f.e.m d'auto-induction) à l'établissement du courant dans le circuit.

2/ a/ éq. diff. en $u_{R_1}(t)$



0,5

Loi des mailles:

$u_{AM} + u_{MB} + u_{BD} + u_{DA} = 0$

$u_b + u_{R_1} + u_{R_2} - E = 0$

$ri + L\frac{di}{dt} + R_1 i + R_2 i = E$ or $u_{R_1} = R_1 i \Rightarrow i = \frac{u_{R_1}}{R_1}$

$L\frac{di}{dt} + (R_2+r)i + u_{R_1} = E$

$\frac{L}{R_1}\frac{du_{R_1}}{dt} + \frac{(R_2+r)}{R_1}u_{R_1} + u_{R_1} = E$

$\frac{L}{R_1}\frac{du_{R_1}}{dt} + \frac{(R_1+R_2+r)}{R_1}u_{R_1} = E$

$$\boxed{L\frac{du_{R_1}}{dt} + (R_1+R_2+r)u_{R_1} = R_1 E} \text{ ou}$$

$$\boxed{\frac{du_{R_1}}{dt} + \frac{(R_1+R_2+r)}{L}u_{R_1} = \frac{R_1}{L}.E}$$

éq. diff. du 1er ordre en u_{R_1} avec second membre non nul.

b/ la solution de cette éq. diff est

0,5 $u_{R_1}(t) = U_1(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$ → $\begin{cases} U_1 = ? \\ \tau = ? \end{cases}$

à $t=0$, $u_{R_1} = 0$

si $t \to +\infty \Rightarrow u_{R_1} = U_1$

$\frac{du_{R_1}}{dt} = \frac{U_1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$ → on remplace ds l'éq. diff.

→ $\frac{U_1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} + \left(\frac{R_1+R_2+r}{L}\right)U_1(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{R_1 E}{L}$

$\left(\frac{1}{\tau} - \frac{R_1+R_2+r}{L}\right)U_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + \left(\frac{R_1+R_2+r}{L}\right)U_1 = \frac{R_1.E}{L}$ $\forall t$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\tau} - \frac{R_1+R_2+r}{L} = 0 \\ \text{et} \\ (R_1+R_2+r)U_1 = R_1 E \end{cases}$

circuit RLC série

$E = 10\,V$; $C = 4\,\mu F = 4.10^{-6}\,F$

bobine purement inductive $L = 1\,H$

$R = 25{,}4\,\Omega$

On charge complètement le condensateur

I/ A $t = 0$, on bascule K sur la position 2. $\rightarrow u_R(t)$

1/ a/ Au cours du temps, la tension $u_R(t)$ prend des valeurs positives et négatives (alternativement) (0,25)

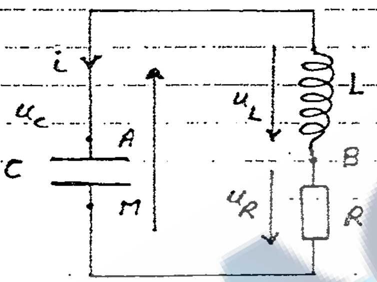
$\Rightarrow u_R(t)$ est une grandeur oscillante

b/ Il s'agit d'un régime pseudo-périodique car $u_R(t)$ oscille mais l'amplitude des oscillations diminue au cours du temps. (0,25)

2/ Equation différentielle en u_C ?

Loi des mailles

(0,5) $u_{AM} + u_{MB} + u_{BA} = 0$



$u_C + u_R + u_L = 0$

$u_C + Ri + L\dfrac{di}{dt} = 0$

avec $\begin{cases} i = \dfrac{dq}{dt} \quad \text{et} \\ q = C.u_C \end{cases}$

$\Rightarrow i = C\dfrac{du_C}{dt}$ et $\dfrac{di}{dt} = C.\dfrac{d^2u_C}{dt^2}$

$\Rightarrow LC.\dfrac{d^2u_C}{dt^2} + RC.\dfrac{du_C}{dt} + u_C = 0$

ou $\boxed{\dfrac{d^2u_C}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{1}{LC}u_C = 0}$

éq. diff. du second ordre en u_C avec second membre nul.

3/ a/ $q_M = ?$ à $t = 0$.

à $t = 0$ le condensateur est chargé et sa charge $q = q_A = C.u_C = CE$

(0,25) $q = C.E = 4.10^{-6}.10 = 4.10^{-5}\,C > 0$

or $q_M = -q = -CE = -4.10^{-5}\,C < 0$

b/ la pseudo-période T ?

$5\,\text{div} \rightarrow 5\pi$; $1\,\text{div} \rightarrow \pi$ $\Big\}$ or $T = 4\,\text{div} = 4\pi\,ms$

(0,5) $\underline{T = 4\pi\,ms}$.

or la période propre est $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

$T_0 = 2\pi\sqrt{1.4.10^{-6}} = 2\pi.2.10^{-3}\,s$

$T_0 = 4\pi.10^{-3}\,s = 4\pi\,ms$

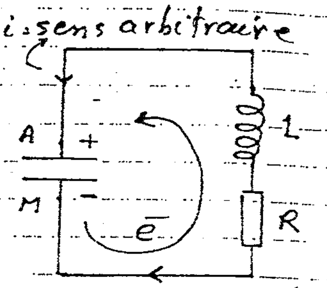
$T = T_0 = 4\pi\,ms \Rightarrow$ amortissement faible.

l'intensité du courant ?

$u_R < 0 \rightarrow i < 0$ car $u_R = Ri$

$i < 0 \Rightarrow i$ circule dans le sens contraire du sens (+) choisi arbitrairement. (0,5)

– le courant réel i circule de A vers M à travers le circuit



– les électrons circulent dans le sens inverse du courant réel c.à.d. de M vers A à travers le circuit

4/ a/ Expression de l'énergie totale E_T dans le circuit

(0,5) $E_T = E_C + E_L = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2$

$\dfrac{dE_T}{dt} = Cu_C\dfrac{du_C}{dt} + Li\dfrac{di}{dt}$ or $i = C\dfrac{du_C}{dt}$

$\dfrac{dE_T}{dt} = i\left(u_C + L\dfrac{di}{dt}\right) = i(-Ri) = -Ri^2$ d'après l'éq. diff.

donc $\dfrac{dE_T}{dt} = -Ri^2 < 0 \Rightarrow E_T$ est une fonction décroissante

(E_T diminue au cours du temps)

b/ à $t_0 = 0$, $u_R = 0 \Rightarrow i = 0 \Rightarrow E_L = 0$

donc $E_T = E_C + E_L = E_C$

(0,5) l'énergie est purement électrostatique

à $t_1 = \dfrac{T}{4}$; $u_R = -u_{Rmax_1} \Rightarrow E_L$ est max

et E_C minimale E_C pratiquement nulle.

donc $E_T = E_C + E_L = E_L$ l'énergie est purement magnétique.

c/ $\Delta E = E_1 - E_0$

(0,5) $E_0 = \frac{1}{2}C\,u_{Cmax_0}^2 = \frac{1}{2}C.E^2 = \frac{1}{2}.4.10^{-6}(10)^2 = 2.10^{-4}\,J$

$E_1 = \frac{1}{2}LI_{max_1}^2 = \frac{1}{2}L\left(\dfrac{u_{Rmax_1}}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}\dfrac{L}{R^2}.u_{Rmax_1}^2$

$E_1 = \frac{1}{2}.\dfrac{1}{(25{,}4)^2}(-5)^2 = 1{,}9375.10^{-4}\,J \simeq 1{,}94.10^{-4}\,J$

$\Delta E = E_1 - E_0 = (1{,}94 - 2).10^{-4}\,J$

$\Delta E = -0{,}0625.10^{-4}\,J = -6.10^{-6}\,J$

$\underline{\Delta E = -6.10^{-6}\,J = -6\,\mu J} < 0$ cette variation est due à l'énergie thermique dissipée par effet Joule dans le circuit

⑤

* $E_T(t=T) = ?$

$E'(\frac{T}{2}) = E_0 - 0{,}06E_0 = 0{,}94\,E_0$

$E(T) = E' - 0{,}06E' = 0{,}94E'$

(0,5) $= 0{,}94(0{,}94E_0) = (0{,}94)^2E_0$

$= (0{,}94)^2 \cdot 2.10^{-4} = 1{,}7672.10^{-4}\,J$

$\underline{E(T) \simeq 1{,}77.10^{-4}J = 0{,}177\,mJ}$

* $u_c = ?$ pour $t = T$

$E_T = \frac{1}{2}c\,u_{c\,max_2}^2$, à $t=T \Rightarrow u_c = u_{c\,max_2}$

$\Rightarrow u_c = u_{c\,max_2} = \sqrt{\frac{2E_T}{c}}$

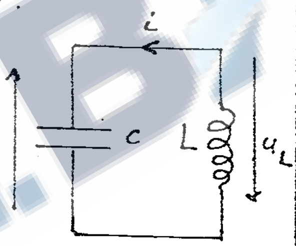
(0,25) $u_c = u_{c\,max_2} = \sqrt{\frac{2.1{,}7672.10^{-4}}{4.10^{-6}}} = 9{,}4V$

$\underline{u_c = u_{c\,max_2} = 9{,}4\,V}$ à $t = T$.

II/ circuit (L, C), $C = 4\mu F$
$U = 10V$ $L = 1H$ (pure)

1/ les oscillations se produisent sans agent extérieur (générateur) et sans resistor (amortissement)
(0,25) $\Rightarrow$ les oscillations sont libres non amorties (oscillations sinusoïdales)

2/ a/ éq. diff. en q?
Loi des mailles



$u_c + u_L = 0$

(0,25) $\frac{q}{c} + L\frac{di}{dt} = 0$ or $i = \frac{dq}{dt}$

$\Rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{c}\cdot q = 0$ ou

$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{Lc}\cdot q = 0$. éq. diff. du second ordre en q avec second membre nul.

b/ la solution de cette équation est:
$q(t) = Q_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi_q)$

(0,5) $\omega_0 = ?$ $Q_{max} = ?$ $\varphi_q = ?$ / à $t=0$ $q = -Q_{max}$

• $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1.4.10^{-6}}} = 0{,}5.10^3\,rad.s^{-1}$ $= \underline{500\,rad.s^{-1}}$

• $Q_{max} = CE = 4.10^{-6}.10 = \underline{4.10^{-5}C}$

• à $t=0$, $\begin{cases} q = Q_{max}\sin\varphi_q \\ q = -Q_{max} \end{cases} \Rightarrow$

$\sin\varphi_q = -1 \Rightarrow \underline{\varphi_q = -\frac{\pi}{2}}$

donc $\underline{q(t) = 4.10^{-5}\sin(500t - \frac{\pi}{2})}$

(0,25) $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \omega_0 Q_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi_q)$

$i(t) = \omega_0 Q_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi_q + \frac{\pi}{2})$

$i(t) = 500.4.10^{-5}\sin(500t - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})$

$\underline{i(t) = 0{,}02\sin(500t)}$

$i(t) = I_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi_i)$ avec
$I_{max} = 0{,}02A$, $\varphi_i = 0$
$\omega_0 = 500\,rad.s^{-1}$

3/ a/ m.q E se conserve?
(0,5) $E = E_c + E_L = \frac{1}{2}cu_c^2 + \frac{1}{2}Li^2$

$\frac{dE}{dt} = c\,u_c\frac{du_c}{dt} + Li\frac{di}{dt} = i(u_c + L\frac{di}{dt})$

$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = \text{constante}$!!
l'énergie E se conserve

$E = E_{c\,max} = E_{L\,max} = \frac{1}{2c}Q_{max}^2$

$E = \frac{1}{2}LI_{max}^2 = \frac{1}{2}.1.(0{,}02)^2 = 2.10^{-4}$

b/ $E_c = f(q)$? $E_L = g(q)$?

(0,25) $\begin{cases} E_c = \frac{1}{2c}q^2 \text{ or } E = E_c + E_L \\ E_L = E - E_c = E - \frac{1}{2c}q^2 \end{cases}$

$E_c = E_L \Rightarrow \frac{1}{2c}q^2 = E - \frac{1}{2c}q^2$
$= \frac{1}{2c}Q_m^2 - \frac{1}{2c}q^2$

(0,25) $\Rightarrow 2q^2 = Q_m^2 \Rightarrow q = \pm\frac{Q_m}{\sqrt{2}}$

$q = \pm\frac{4.10^{-5}}{1{,}414} = \pm 2{,}829.10^{-5}C$

$\underline{q = \pm 2{,}83.10^{-5}C}$

c/ les courbes $E_c = f(q)$ et $E_L = g(q)$

$E_c = \frac{1}{2c}q^2$ branche parabolique de concavité dirigée vers le haut ($\frac{1}{2c}$

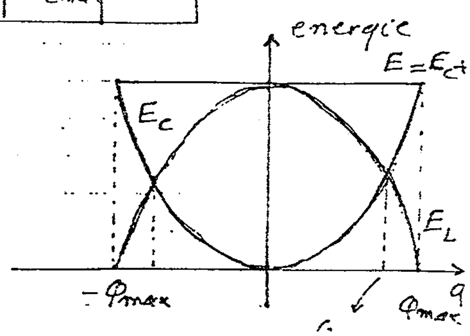
$E_L = -\frac{1}{2c}q^2 + E$

E_L est une branche parabolique de concavité dirigée vers le bas ($-\frac{1}{2c}$<

avec $q \in [-Q_m, Q_m]$

q	$-Q_m$	0	Q_m
E_c	$E_{c\,max}$	0	$E_{c\,max}$
E_L	0	$E_{L\,max}$	0

(0,25)



Ex III

1/ le mouvement de l'aimant à travers la bobine produit un courant induit : c'est le phénomène d'induction électromagnétique. (0,5)

2/ - l'inducteur est l'aimant
- l'induit est la bobine (0,5)

3/ Energie lumineuse (rayonnant) dû à
→ E_c électrostatique dans le condensateur
E_L magnétique dans la bobine (0,5)

4/ Les avantages de cette lampe à induction
- sans pile
- sans pièce de rechange (0,5)

Lycée El Khalij Sfax Professeur : Mr Mourad Fgaier	Devoir de contrôle N°2 Sciences physiques	Durée : 2h	Date : 19-01-12	Classe : 4ème Math

- Le sujet comporte :

251
6

Chimie : - Loi de modération.
- Loi d'action de masse appliquée aux réactions acide- base.

Physique : -Oscillations électriques libres non amorties.
-Oscillations électriques forcées.

- *Le sujet est réparti sur 4 pages numérotées de 1 à 4.*
- *La page -4- est à remplir et à remettre avec la copie.*

CHIMIE : (7 points)

Exercice N°1 : (3,25 points)

Dans un récipient préalablement vide de volume V, on mélange **0,8 mol** de monoxyde de carbone CO(gaz) et **1,5 mol** de dihydrogène H_2 (gaz) à une température T_1.
L'équation de la réaction ayant lieu est : $CO_{(gaz)} + 2\ H_{2(gaz)} \rightleftarrows CH_3OH_{(gaz)}$.

Un dispositif approprié permet de mesurer le nombre de mole de H_2 (gaz) restant à un instant t.
Les mesures ont montré que lorsque l'équilibre est atteint le nombre de mole de dihydrogène restant est égal à **0,9 mol**.

1°/ Déterminer la valeur du taux d'avancement final de la réaction à la température T_1.

2°/ L'équilibre précédent étant atteint, on augmente la température à pression constante on constate que le nombre de mole de dihydrogène présent à la fin de la réaction augmente.
Préciser, en le justifiant, le caractère énergétique de la réaction de synthèse du méthanol.

3°/ La température étant maintenue constante et égale à T_1. Préciser, en le justifiant, l'effet d'une augmentation de la pression sur l'équilibre et sur la constante d'équilibre de la réaction.

4°/ Comment varie la quantité de monoxyde de carbone CO présent à l'équilibre, si on additionne à température et volume constants du dihydrogène H_2? Justifier la réponse.

Exercice N°2 : (3,75 points)

Un mélange de volume V contient à l'état d'équilibre dynamique les entités chimiques suivantes :

Entité chimique	HF	$C_2O_4^{2-}$	$HC_2O_4^-$	F^-
Quantité de matière (mol)	10^{-2}	10^{-2}	$2{,}5.10^{-3}$	4.10^{-3}

1°/
a- Donner les couples acide base formés à partir des quatre entités chimiques inscrites dans le tableau.
b- Ecrire l'équation de la réaction qui met en jeu les deux couples tel que $HC_2O_4^-$ est un réactif.
c- Calculer la constante d'équilibre K de la réaction.
d- Classer les deux couples selon la force croissante de leurs bases.

2°/ On ajoute au système en équilibre **$1{,}5.10^{-3}$ mol** de $HC_2O_4^-$ à la même température.
a- Indiquer, en justifiant la réponse, le sens d'évolution spontané de la transformation.
b- Calculer la nouvelle composition du mélange à l'équilibre.

PHYSIQUE (13 points)

Exercice N°1 : (6,5 points)

259

On étudie les oscillations libres non amorties d'un oscillateur électrique formé d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance **L = 0,2 H** et de résistance nulle. Figure-1-.
Le condensateur est initialement chargé sous une tension U_0.

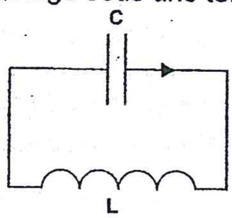


Figure-1-

1°/

a- Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension instantanée $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

b- Vérifier que $u_C(t)$ ... $n(\frac{1}{\sqrt{LC}} t + \varphi_{u_C})$ est solution de l'équation différentielle précédente.

2°/ Les courbes (... la figure-2- représentent l'évolution en ... temps de la tension instantanée u ... bornes du condensateur et de l'intensité ins... née i(t) du courant qui traverse le circuit.

a- Montrer que la courbes (1) correspond à $u_C(t)$.

b- Soit I_m : l'intensité maximale de i(t).

Montrer que la capacité C du condensateur est exprimée par : $C = \frac{L.I_m^2}{U_0^2}$. Calculer sa valeur.

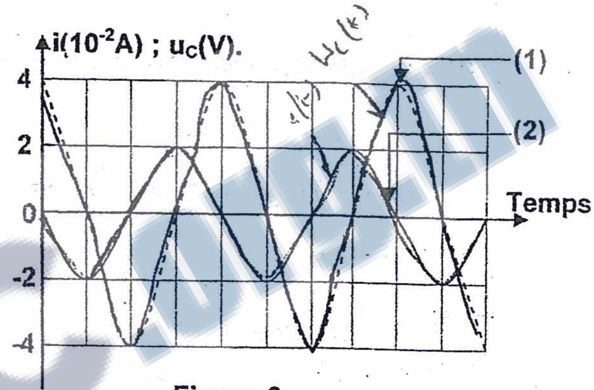


Figure-2-

3°/

a- Déterminer l'expression de i(t) et celle de la charge q(t) du condensateur. On précisera pour chacune de ces grandeurs l'amplitude, la pulsation et la phase initiale.

b- Etablir la relation liant q^2, i^2, ω_0^2 et Q_0^2 tel que ω_0 et Q_0 sont respectivement la pulsation propre de l'oscillateur et la charge maximale acquise par le condensateur.

c- Déduire les valeurs de i lorsque $q = \frac{1}{\sqrt{2}} Q_0$.

4°/

a- Montrer que l'énergie électromagnétique totale E emmagasinée par l'oscillateur étudié est constante.

b- Calculer sa valeur.

5°/ En exploitant le caractère conservatif de l'oscillateur étudié retrouver l'équation différentielle établie précédemment.

6°/

a- Montrer que l'énergie électrostatique $E_e(t)$ emmagasinée dans le condensateur et l'énergie magnétique $E_m(t)$ s'écrivent sous la forme de :

$$E_e(t) = \frac{1}{2} E\,[1 - \cos(2\omega_0 t + \pi)] \text{ et } E_m(t) = \frac{1}{2} E\,[1 + \cos(2\omega_0 t + \pi)].$$

b- La courbe de la figure-3- de la page-4- représente l'évolution en fonction du temps de l'une de ces deux formes d'énergies. Laquelle? Justifier.

c- Préciser l'échelle sur la figure-3- de la page-4- et tracer la courbe correspondante à l'autre forme d'énergie.

253

Exercice N°2 : (6,5 points)

Le circuit électrique de la figure-4- comporte en série :
Un résistor de résistance **R = 80Ω**.
Une bobine d'inductance L et de résistance r.
Un condensateur de capacité **C = 16µF**.
Un ampèremètre de résistance négligeable.
Un générateur G de basse fréquence impose aux bornes de l'ensemble une tension alternative sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(2\pi Nt + \varphi_u)$ de fréquence N réglable et d'amplitude U_m constante.
Lorsqu'on ajuste la fréquence N à la valeur N_1**=50Hz**, un oscilloscope bicourbe à deux entrées Y_1 et Y_2 permet de visualiser les oscillogrammes de la figure -5-.

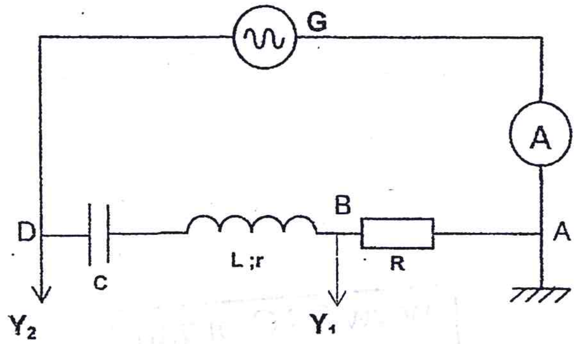


Figure-4-

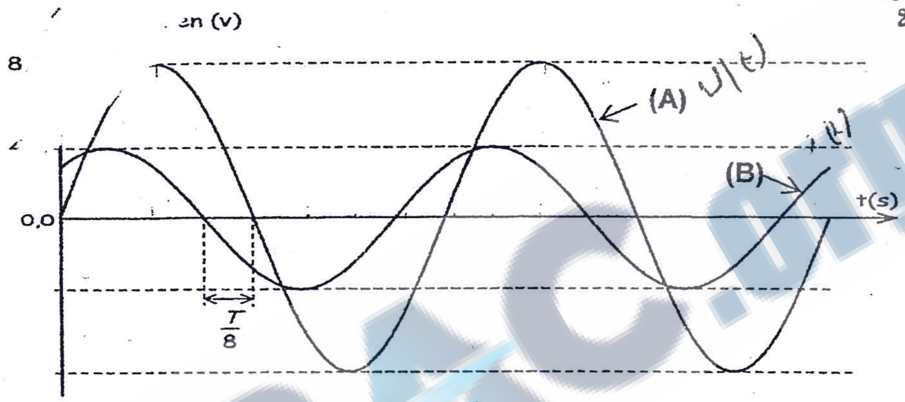


Figure-5-

1°/ En utilisant les oscillogrammes de la figure-5- :

a- Montrer que l'oscillogramme (A) correspond à la tension u(t).

b- Quelle grandeur électrique, autre que la tension, peut être déterminée à partir de l'oscillogramme (B)?

c- Déterminer le déphasage $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ de la tension u(t) par rapport à i(t).
Déduire si le circuit est inductif, capacitif ou résistif.

d- Préciser les valeurs U_m, U_{Rm} et I_m. Calculer U_{Cm}.

2°/ L'équation différentielle reliant i(t), sa dérivée première $\frac{di}{dt}$ et sa primitive $\int i dt$ est :

$$L\frac{di}{dt} + (R+r)\,i(t) + \frac{1}{C}\int i\,dt = U_m \sin(2\pi N t + \varphi_u)$$

Cette équation différentielle admet comme solution $i(t) = I_m \sin(2\pi Nt + \varphi_i)$

a- Compléter la construction de Fresnel sur la figure -6- de la page -4- sur laquelle est représentée le vecteur qui correspond à la fonction sinusoïdale $\frac{1}{C}\int i\,dt$: Echelle : **1cm** pour **1V.**

b- Déduire les valeurs de L et r.

3°/ Lorsqu'on ajuste la fréquence N du générateur à la valeur N_2 différente de N_1, on constate que :

$U_{BA} = 2\,.U_{DB}$.

a- Montrer que le circuit est en état de résonance d'intensité.

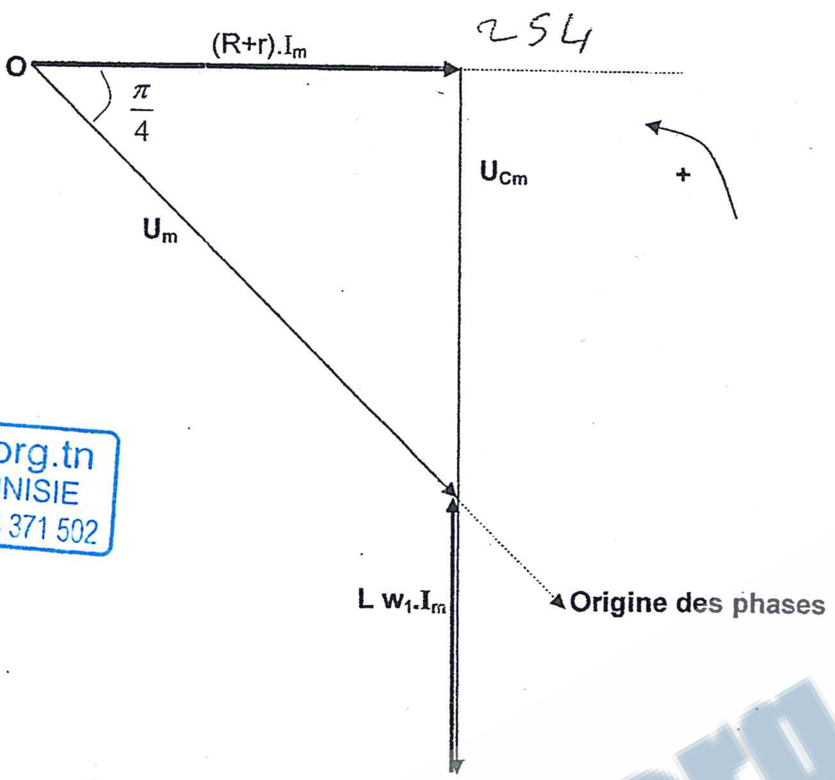
b- Déterminer l'expression de l'intensité du courant i(t).

c- Calculer le rapport $\frac{U_{C_m}}{U_m}$. De quel phénomène s'agit-il ?

d- Représenter dans le même système d'axes les tensions u(t) et $u_R(t)$ pour $N=N_2$.

Suite d'ex n° 2

254



0,75

(Tout ou rien)

b- (R+r).Im = 6V alors $r=\frac{6}{Im}-R$ AN: $r=\frac{6}{0,05}-80=40\Omega$. 0,25

L w_1.I_m= 3,9V alors $L=\frac{3,9}{w_1 I_m}$ AN: $L=\frac{3,9}{100\pi.0,05}=0,248H\approx0,25H$. 0,25

3°/

a- On a $U_{BA}=U_{DB}\Rightarrow Z_{BA}I=Z_{DB}I\Rightarrow Z_{BA}=Z_{DB}\Rightarrow R=2\sqrt{r^2+(\frac{1}{Cw_2}-Lw_2)^2}\Rightarrow$

$R^2=4r^2+(\frac{1}{Cw_2}-Lw_2)^2\Rightarrow(\frac{1}{Cw_2}-Lw_2)^2=R^2-4r^2$. AN: $(\frac{1}{Cw_2}-Lw_2)^2=80^2-4\times40^2=0\Rightarrow$ 0,5

$\frac{1}{Cw_2}-Lw_2=0\Rightarrow\frac{1}{Cw_2}=Lw_2\Rightarrow w_2=\frac{1}{\sqrt{LC}}=w_0$ d'où le circuit est en état de résonance d'intensité.

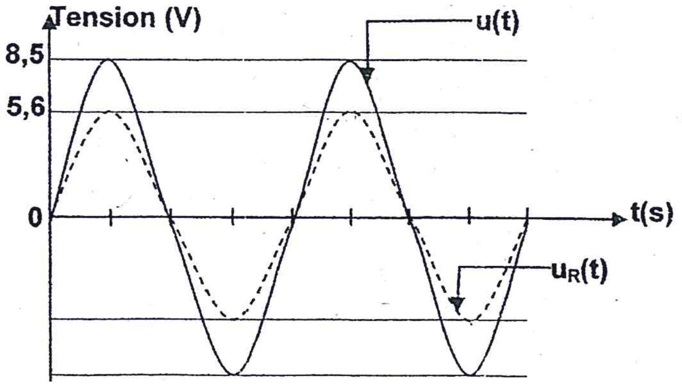
b- i(t)= $I_m\sin(w_2t+\varphi_i)$. Avec $I_m=\frac{U_m}{R+r}$. AN : $I_m=\frac{8,5}{80+40}$= 0,07A, w_2=

$w_2=\frac{1}{\sqrt{0,25\times16.10^{-6}}}$=500 rad.s^{-1} et $\Delta\varphi=\varphi_u-\varphi_i=0$ alors $\varphi_i=\varphi_i=$

i(t)= 0,07 sin(500t) (A). 0,5

c- $\frac{U_{Cm}}{U_m}=\frac{9,94}{8,5}$= 1,17 > 1 alors il ya le phénomène de surtension. 0,5

d- U_{Rm}= RI_m . AN : U_{Rm}=80× 0,07= 5,6 A et $w_2=w_0$= 500 rad.s^{-1}> $w_1=100\pi$ rad.s^{-1}. 0,5



0,5

Lycée secondaire El Khalij Sfax	Sciences physiques
Professeur : • Mr Rekik Fathi	**Correction du devoir de contrôle N°2** (2011-2012)

CHIMIE : (9 points)

Exercice N°1 : (3,25 points)

1°/

	CO(g)	+ 2 H_2 (g) $\rightleftarrows$	CH_3OH (g)	
t=0s	0,8	1,5	0	mol.
t	0,8 - x	1,5 - 2x	x	mol.
t=t$_f$	0,8 - x_f	1,5 - 2x_f	x_f	mol.

• Détermination de X_m : On suppose que la réaction est totale et on a $\frac{n_{CO_0}}{1} > \frac{n_{H_2 0}}{2}$ alors

1,5 - 2x_m = 0 d'où x_m = 0,75 mol.

• Détermination de X_f : $n_{H_2)_{restant}}$ = 1,5 - 2x_f = 0,9 mol d'où X_f= 0,3 mol.

• Détermination de τ_f : $\tau_f = \frac{x_f}{x_m}$. AN : $\tau_f = \frac{0,3}{0,75} = 0,4$. 0,75

2°/ Une augmentation de la température provoque l'augmentation du nombre de moles de dihydrogène restant c-à-d que l'équilibre a évolué dans le sens inverse qui est endothermique car d'après la loi de modération un système est en état d'équilibre à pression constante, une augmentation de la température favorise l'évolution du système dans le sens de la réaction endothermique par suite le sens direct (synthèse de méthanol) est exothermique. 0,75

3°/ Un système est en état d'équilibre à température et à volume constants, une augmentation de la pression favorise la réaction qui tend à diminuer le nombre de mole du mélange gazeux (le sens direct) alors que la constante d'équilibre K reste constante, car elle dépend que de la température. 1

4°/ Un système est en état d'équilibre à température et à volume constants, une augmentation de concentration de H_2 favorise la réaction qui tend à diminuer la concentration de H_2 (sens direct) par suite la quantité de monoxyde de carbone CO diminue. 0,75

Exercice N°2 : (3,75 points)

1°/

a- HF / F^- ; $HC_2O_4^-$ / $C_2O_4^{2-}$. 0,5

b- $HC_2O_4^-$ + F^- $\rightleftarrows$ $C_2O_4^{2-}$ + HF. 0,5

c- $K = \pi_{éq} = \frac{[C_2O_4^{2-}][HF]}{[HC_2O_4^-][F^-]} = \frac{\frac{n_{C_2O_4^{2-}}}{V} \times \frac{n_{HF}}{V}}{\frac{n_{HC_2O_4^-}}{V} \times \frac{n_{F^-}}{V}} = \frac{n_{C_2O_4^{2-}} \times n_{HF}}{n_{HC_2O_4^-} \times n_{F^-}}$ AN : $K = \frac{10^{-2} \times 10^{-2}}{2,5.10^{-3} \times 4.10^{-3}} = 10$. 0,75

d- $K = 10 > 1$, alors les espèces figurés dans les réactifs sont plus forts que ceux figurés dans les produits, par suite la base F^- est plus forte que $C_2O_4^{2-}$. 0,5

$HC_2O_4^-$ / $C_2O_4^{2-}$ —— HF / F^- ⟶ Ordre de basicité croissante des couples

2°/

a- D'après la loi de modération relative aux concentrations, toute augmentation de la concentration de l'un des constituants d'un système en état d'équilibre chimique, à pression et température constante favorise le sens qui tend à diminuer la concentration de ce constituant ; par suite l'ajout de 1,5.10^{-3} mol de ~~$HC_2O_4^-$ au système en équilibre favorise le sens directe~~. 0,5

b-

	$HC_2O_4^-$	+ F^- $\rightleftarrows$	$C_2O_4^{2-}$	+ HF	
A t=0	4.10^{-3}	4.10^{-3}	10^{-2}	10^{-2}	(En mol)
A t$_f$	4.10^{-3} - x_f	4.10^{-3} - x_f	10^{-2} + x_f	10^{-2} + x_f	(En mol)

$K = \pi_{éq} = \frac{n_{C_2O_4^{2-}} \times n_{HF}}{n_{HC_2O_4^-} \times n_{F^-}}$ alors $K = \frac{(10^{-2}+x_f)^2}{(4.10^{-3}-x_f)^2}$ par suite $\sqrt{10} = \frac{(10^{-2}+x_f)}{(4.10^{-3}-x_f)}$

d'où $0,0026 - 4,16 \times xf = 0$ on trouve alors $xf = 6,24.10^{-4} mol$.

Composition molaire du mélange final :

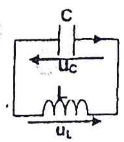
$n_{HC_2O_4^- f} = n_{F^- f} = 4.10^{-3} - x_f . AN : n_{HC_2O_4^- f} = n_{F^- f} = 3,37.10^{-3} mol.$ 1

$n_{C_2O_4^{2-} f} = n_{HF f} = 10^{-2} + x_f . AN : n_{C_2O_4^{2-} f} = n_{HF f} = 1,06.10^{-2} mol.$

PHYSIQUE : (13 points)

Exercice N°1 : (6,5 points)

1°/



a- D'après la loi de maille $u_L(t) + u_C(t) = 0$ alors $L\frac{di}{dt} + u_C = 0$ or $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt}$

alors $LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$ alors $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C = 0$. 0,5

b- On a : $u_C(t) = U_0.\sin(\frac{1}{\sqrt{LC}}.t + \varphi_{u_C})$ alors $\frac{du_C}{dt} = U_0\frac{1}{\sqrt{LC}}.\cos(\frac{1}{\sqrt{LC}}.t + \varphi_{u_C})$

alors $\frac{d^2u_C}{dt^2} = -U_0\frac{1}{LC}.\sin(\frac{1}{\sqrt{LC}}.t + \varphi_{u_C})$

$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C = -U_0\frac{1}{LC}.\sin(\frac{1}{\sqrt{LC}}.t + \varphi_{u_C}) + U_0\frac{1}{LC}.\sin(\frac{1}{\sqrt{LC}}.t + \varphi_{u_C}) = 0.$

$u_C(t) = U_0.\sin(\frac{1}{\sqrt{LC}}.t + \varphi_{u_C})$ est une solution de l'équation différentielle précédente. 0,5

255

2°/

a- On a $u_C(t)$ est en quadrature retard par rapport à i(t) or la courbe (1) atteint sa valeur max après la courbe (2) d'où la courbe (1) correspond à la tension $u_C(t)$. 0,25

b- On a $I_m = Q_0 w_0 \Rightarrow I_m^2 = Q_0^2 w_0^2 = (C^2 U_0^2) \times (\frac{1}{LC}) = \frac{C.U_0^2}{L} \Rightarrow C = \frac{L I_m^2}{U_0^2}$

. AN: $C = \frac{0,2 \times (2.10^{-2})^2}{4^2} = 5.10^{-6}$ F. 0,5

3°/

a- • $i(t) = I_m.\sin(\omega_0.t + \varphi_i)$ or $I_m = 2.10^{-2}$A ; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. AN : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0,25 \times 5.10^{-6}}} = 10^3$ rad.s^{-1}.

à t=0 s, i= $I_{max}.\sin\varphi_i = 0$ alors $\sin\varphi_i = 0$ alors φ_i =0 rad ou $\varphi_i = \pi$ rad or à t=0 s, la courbe i(t) est décroissante alors $\frac{di(t)}{dt} < 0$ alors $\cos\varphi_i < 0$ par suite $\varphi_i = \pi$ rad d'où i(t) = 2.10^{-2}sin (10^3.t + π) (A). 0,5

• q(t) = c.u_C(t)= C.U_0.sin (ω_0.t + φ_{u_C}) or $\varphi_{u_C} = \varphi_q$ donc t=0 : q = $Q_0.\sin\varphi_q$ = Q_0 alors $\sin\varphi_q$ = 1 d'où

$\varphi_q = \frac{\pi}{2}$ rad d'où q(t) = 5.10^{-6}.4.sin (10^3.t + $\frac{\pi}{2}$) (C). 0,5

b- On a : q(t) = Q_0.sin (ω_0.t + φ_q) et i(t) = Q_0 ω_0.cos (ω_0.t + φ_q) alors

$q^2(t) = Q_0^2.\sin^2(\omega_0.t + \varphi_q)$ et $i^2(t) = Q_0^2\omega_0^2.\cos^2(\omega_0.t + \varphi_q)$ alors

$\frac{q^2(t)}{Q_0^2} = \sin^2(\omega_0.t + \varphi_q)$ et $\frac{i^2(t)}{Q_0^2\omega_0^2} = \cos^2(\omega_0.t + \varphi_q)$ alors $\frac{q^2(t)}{Q_0^2} + \frac{i^2(t)}{Q_0^2\omega_0^2} = 1$ alors

$\frac{\omega_0^2 q^2(t) + i^2(t)}{Q_0^2\omega_0^2} = 1$ alors $\omega_0^2 q^2(t) + i^2(t) = Q_0^2\omega_0^2$ alors $i^2(t) = -\omega_0^2 q^2(t) + Q_0^2\omega_0^2$. 0,5

c- Si $q = \frac{1}{\sqrt{2}} Q_0$ alors $i^2 = -\frac{1}{2}\omega_0^2 Q_0^2 + Q_0^2\omega_0^2 = \frac{1}{2}\omega_0^2 Q_0^2$ alors $i = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0 Q_0$.

AN : $i = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(2.10^{-6}\times10^3) = \pm 1{,}414.10^{-3}$A. 0,5

4°/ a- On a: $\xi = \xi_e + \xi_m = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}L.i^2$.

$\frac{d\xi}{dt} = \frac{q}{c}i + L.i.\frac{di}{dt} = i.(\frac{q}{c} + L.\frac{di}{dt}) = i.(\frac{q}{c} + L.\frac{d^2q}{dt^2})$ or d'après l'équation différentielle on a :

$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{c} = L\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{C}u_C = 0$ 0,5

alors l'énergie totale est conservée. $\frac{d\xi}{dt}$ d'où

b- A t=0s, ona $u_C = U_{Cm}$ alors $q = Q_0$ et i=0 alors $\xi = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$ .AN : $\xi = \frac{1}{2}\frac{2.10^{-5}}{5.10^{-6}} = 4.10^{-5}$J. 0,25

5°/ On a : ξ est constante alors $\frac{d\xi}{dt} = 0$ alors $\frac{d\xi}{dt} = i.(\frac{q}{c} + L.\frac{d^2q}{dt^2}) = 0$ or $i \neq 0$ d'où $(\frac{q}{c} + L.\frac{d^2q}{dt^2}) = 0$ alors

$L\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{C}u_C = 0$ alors $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C = 0$. 0,5

6°/

a- • $\xi_e(t) = \frac{1}{2}\frac{q(t)^2}{C}$ or $q(t) = Q_0.\sin(\omega_0.t + \varphi_q)$ alors $\xi_e(t) = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}\sin^2(w_0.t + \varphi_q)$ or

$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$ d'où $\xi_e(t) = \frac{1}{4}\frac{Q_0^2}{C}[1-\cos(2w_0.t + 2\varphi_q)]$. on a $E = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$ et $\varphi_q = \varphi_{u_C} = \frac{\pi}{2}$ rad

par suite $\xi_e(t) = \frac{E}{2}[1-\cos(2w_0.t + \pi)]$. 0,25

• $\xi_m(t) = \frac{1}{2}Li^2$ or $i(t) = Q_0 w_0 \cos(\omega_0.t + \varphi_q)$ alors $\xi_m(t) = \frac{1}{2}L.Q_0^2 w_0^2\cos^2(w_0.t + \varphi_q)$ or

$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$ et $L.w_0^2 = \frac{1}{C}$ d'où $\xi_m(t) = \frac{1}{4}\frac{Q_0^2}{C}[1+\cos(2w_0.t + 2\varphi_q)]$. on a $E = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$ et

$\varphi_q = \varphi_{u_C} = \frac{\pi}{2}$ rad par suite $\xi_m(t) = \frac{E}{2}[1+\cos(2w_0.t + \pi)]$. 0,25

b- A t=0s, on a $U_C = U_0$ et i=0 alors $\xi_m = 0$ et $\xi_C = \xi_{C\,max} = \frac{1}{2}C\,U_0^2$ d'où la courbe de la figure-3- correspond à $\xi_e(t)$. 0,5

c- On a $\xi_e(t)$ est périodique et de période $T_{\xi_e(t)} = \frac{T_0}{2} = \frac{2\pi\sqrt{LC}}{2} = \pi\sqrt{LC}$.

AN : $T_{\xi_e(t)} = \pi\sqrt{0{,}2\times5.10^{-6}} = \pi.10^{-3}$s $= \pi$ m.s. 0,5

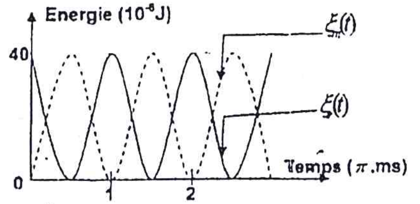


Figure-2-

Exercice N°2 : (6,5 points)

1°/

a- on a $U_m = Z\,I_m$, avec $Z = \sqrt{(R+r)^2 + (\frac{1}{Cw} - Lw)^2}$ et $U_{Rm} = Z_R\,I_m$, avec $Z_R = R$ alors $Z > Z_R$ par suite $U_m > U_{Rm}$. Or $Um_{courbe\,(A)} > Um_{courbe\,(B)}$ alors la courbe (A) correspond à la tension u(t). 0,5

b- La grandeur électrique qu'on peut déterminer à partir de l'oscillogramme (B) est i(t) puisque $u_R(t) = R.\,i(t)$ d'où $i(t) = \frac{u_R(t)}{R}$ et R=Constante >0 alors $u_R(t)$ et i(t) sont deux fonctions sinusoïdales synchrones et en phase ($\varphi_{u_R} = \varphi i$). 0,25

c- $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_{u_R} = \varphi_u - \varphi i < 0$ puisque $u_R(t)$ est en avance de phase par rapport à u(t) ($u_R(t)$ atteint sa valeur maximale avant u(t)) par suite $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi i = -w.\Delta t = -\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{8} = -\frac{\pi}{4}rad$. 0,5

Puisque $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi i = -\frac{\pi}{4}rad < 0$ alors le circuit est capacitif. 0,25

d- $U_m = 8{,}5$V ; $U_{Rm} = 4$V. 0,25

$U_{Rm} = R.\,I_m$ alors $I_m = \frac{U_{R_m}}{R}$ AN : $I_m = \frac{4}{80} = 0{,}05A$. 0,5

$U_{Cm} = \frac{I_m}{2\pi N_1 C}$ AN : $U_{Cm} = \frac{0{,}05}{100\pi.16.10^{-6}}$ d'ou $U_{Cm} = 9{,}947V \approx 9{,}95V$. 0,5

256

2°/

a- $L\frac{di}{dt}$ + (R+r) i(t) + $\frac{1}{C}\int i\,dt$ = $U_m \sin(2\pi N t + \varphi_u)$

$\overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix} LW_1.Im \\ \varphi_i + \frac{\pi}{2}\end{pmatrix}$ + $\overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix} (R+r).Im \\ \varphi_i \end{pmatrix}$ + $\overrightarrow{V_3}\begin{pmatrix} U_{C_m} = \frac{Im}{C.W_1} = 9{,}95V \\ \varphi_i - \frac{\pi}{2}\end{pmatrix}$ = $\overrightarrow{V}\begin{pmatrix} U_m = 8{,}5V \\ \varphi u \end{pmatrix}$

Avec : $w_1 = 100\pi$ rad.s^{-1}.

$U(t=0) = U_m \sin(\varphi_u) = 0$ alors $\varphi_u = 0$ ou $\varphi_u = \pi$ rad.

Puisque u(t) est croissante à t=0 alors $\cos(\varphi_u) > 0$ donc $\varphi_u = 0$ et par suite $\varphi i = \frac{\pi}{4}rad$.

Page Facebook : BAC – TUNISIE Site Web : www.BAC.org.tn Admin : Saber Gù Tél : 28.355.106

A S 2012 – 2013 4^{eme} M-Sc	Résumé du chapitre Nombres complexes	Prof : MOALLA MOHAMED

$Z \in \mathbb{C}, \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 / Z = x + iy$; x : <u>partie réelle</u> ; y : <u>partie imaginaire</u>

$\overline{Z} = x - iy$ est le <u>conjugué</u> de Z

$\overline{Z+Z'} = \overline{Z} + \overline{Z'}$; $\overline{ZZ'} = \overline{Z}\,\overline{Z'}$; $\overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)} = \frac{\overline{Z}}{\overline{Z'}}$; $\overline{Z^n} = \overline{Z}^n$; $Z\overline{Z} = x^2 + y^2$

$Z + \overline{Z} = 2x$ et $Z - \overline{Z} = 2y$

***Z* est réel** $\Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow \overline{Z} = Z$

***Z* est imaginaire pur** $\Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow \overline{Z} = -Z$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$;

M (x , y) ou M(Z) ; $|Z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$; $|Z|^2 = Z\overline{Z}$

$A(Z_A)$, $B(Z_B)$; $\overrightarrow{AB}$ $(Z_B - Z_A)$ et $AB = |Z_B - Z_A|$

FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

$Z = x + iy$, $|Z| = \sqrt{x^2+y^2} = r$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$ et $\sin\theta = \frac{y}{r}$ où θ est l'argument de Z

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r, \theta] = re^{i\theta}$ $\quad$ <u>$[1, \theta] = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$</u>

$\Uparrow$ $\quad$ $\Uparrow$ $\quad$ $\Uparrow$

Forme trigonométrique ***forme polaire*** ***forme exponentielle***

Exemple : $a = 1 + i$; $|a| = \sqrt{2}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $\theta \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

$$a = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$1 = [1, 0] = e^{i0}$; $(-1) = [1, \pi] = e^{i\pi}$; $i = [1, \frac{\pi}{2}] = e^{i\frac{\pi}{2}}$; $(-i) = [1, -\frac{\pi}{2}] = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$Z = [r, \theta]$ et $\alpha > 0$; $\alpha Z = [\alpha r, \theta]$; $-\alpha Z = [\alpha r, \theta + \pi]$; $i\alpha Z = [\alpha r, \theta + \frac{\pi}{2}]$, $-i\alpha Z = [\alpha r, \theta - \frac{\pi}{2}]$

$\overline{[r,\theta]} = [r, -\theta]$	$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
$-[r, \theta] = [r, \theta + \pi]$	$-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$
$[r, \theta].[r', \theta'] = [rr', \theta + \theta']$	$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
$\frac{1}{[r,\theta]} = [\frac{1}{r}, -\theta]$	$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
$\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']} = [\frac{r}{r'}, \theta - \theta']$	$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
$[r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$	$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$
$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$	$2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$
$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$	$2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$
$1 + e^{i\theta} = 2\cos(\frac{\theta}{2})\, e^{i\frac{\theta}{2}}$ (*à démontrer*)	$1 - e^{i\theta} = -2i\sin(\frac{\theta}{2})\, e^{i\frac{\theta}{2}}$ (*à démontrer*)

Résumé de Cours Continuité et limites

Rappels

Branches infinies

Asymptote horizontale :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme [a ; + ∞ [où a est un réel et L un réel donné .

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ alors la droite d'équation y = L est asymptote horizontale à la courbe Cf en + ∞ .

Asymptote verticale :

Soit f une fonction .

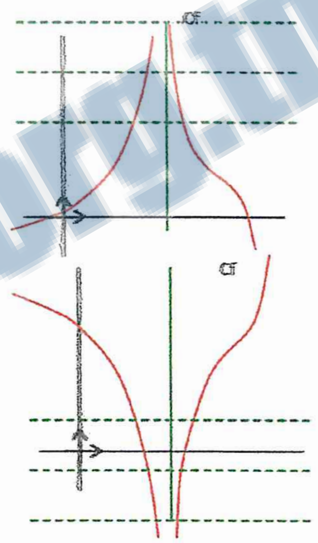
- Si « *f (x) est aussi grand que l'on veut dès que x est assez proche de a* » , alors on dit que f a pour limite + ∞ en a .

On note :

$$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$$

On définit de la même façon $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

- On dit que la droite d'équation x = a est asymptote verticale à la courbe Cf .



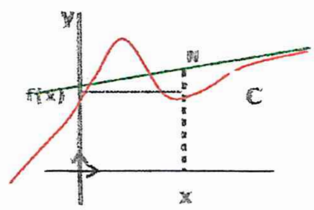
Asymptote oblique :

Soit a (a ≠ 0) et b deux réels et C la courbe représentant une fonction f dans un repère.

Dire que la droite d'équation y = a x + b est asymptote oblique à C en + ∞ (respectivement en – ∞) revient à dire que :

$$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$$

$$\left(\text{respectivement } \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0\right)$$



Continuité et limite d'une fonction composée

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble I et g une fonction définie sur ensemble J tel que $f(I) \subset J$.

La fonction notée $g \circ f$, définie sur I par $g \circ f(x) = g[f(x)]$, est appelée fonction composée de f et g.

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant le réel $f(a)$.

Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Conséquence :

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur I} \\ g \text{ est continue sur J} \\ f(I) \subset J \end{cases}$ alors $g \circ f$ est continue sur I.

Théorème :

Soit f et g deux fonctions. Soit a, b et c finis ou infinis.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = c$.

Limites et ordre

Théorème :

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I sauf peut être en un réel a de I.

Soit deux réels ℓ et ℓ'.

Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I^*_{x_0}$ et si $\lim\limits_{a} f = \ell$ et $\lim\limits_{a} g = \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$.

Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I^*_{x_0}$ et si $\lim\limits_{a} h = \lim\limits_{a} g = \ell$, alors $\lim\limits_{a} f = \ell$.

Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in I^*_{x_0}$ et si $\lim\limits_{a} g = +\infty$, alors $\lim\limits_{a} f = +\infty$.

Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I^*_{x_0}$ et si $\lim\limits_{a} g = -\infty$, alors $\lim\limits_{a} f = -\infty$.

Ces résultats restent aussi valables lorsqu'on remplace a par $\pm\infty$ ou par a^+ ou a^-.

Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème :

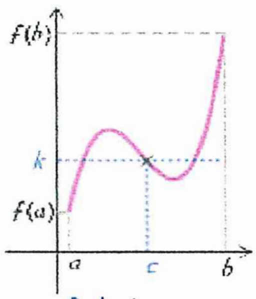
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires :

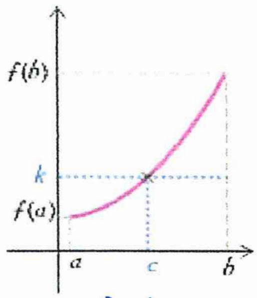
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.

Soient $a \in I$ et $b \in I$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$



f n'est pas strictement monotone



f est strictement monotone

Si de plus f est strictement monotone sur I, alors c est unique.

Image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue :

Théorème :

Si f est continue sur $[a,b]$ alors $f([a,b])=[m,M]$

Où m est le minimum de f sur $[a,b]$ et M est le maximum de f sur $[a,b]$.

Cas des fonctions monotones :

Théorème :

* Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a,b[$ (b fini ou infini).

  Si f est croissante et majorée alors f possède une limite finie en b.

  Si f est croissante et non majorée alors f tend vers $+\infty$ en b.

* Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a,b[$ (b fini ou infini) .

  Si f est décroissante et minorée alors f possède une limite finie en b .

  Si f est décroissante et non minorée alors f tend vers $-\infty$ en b.

Théorème :

L'image d'un intervalle I par une fonction continue et monotone sur I est un intervalle de même nature.

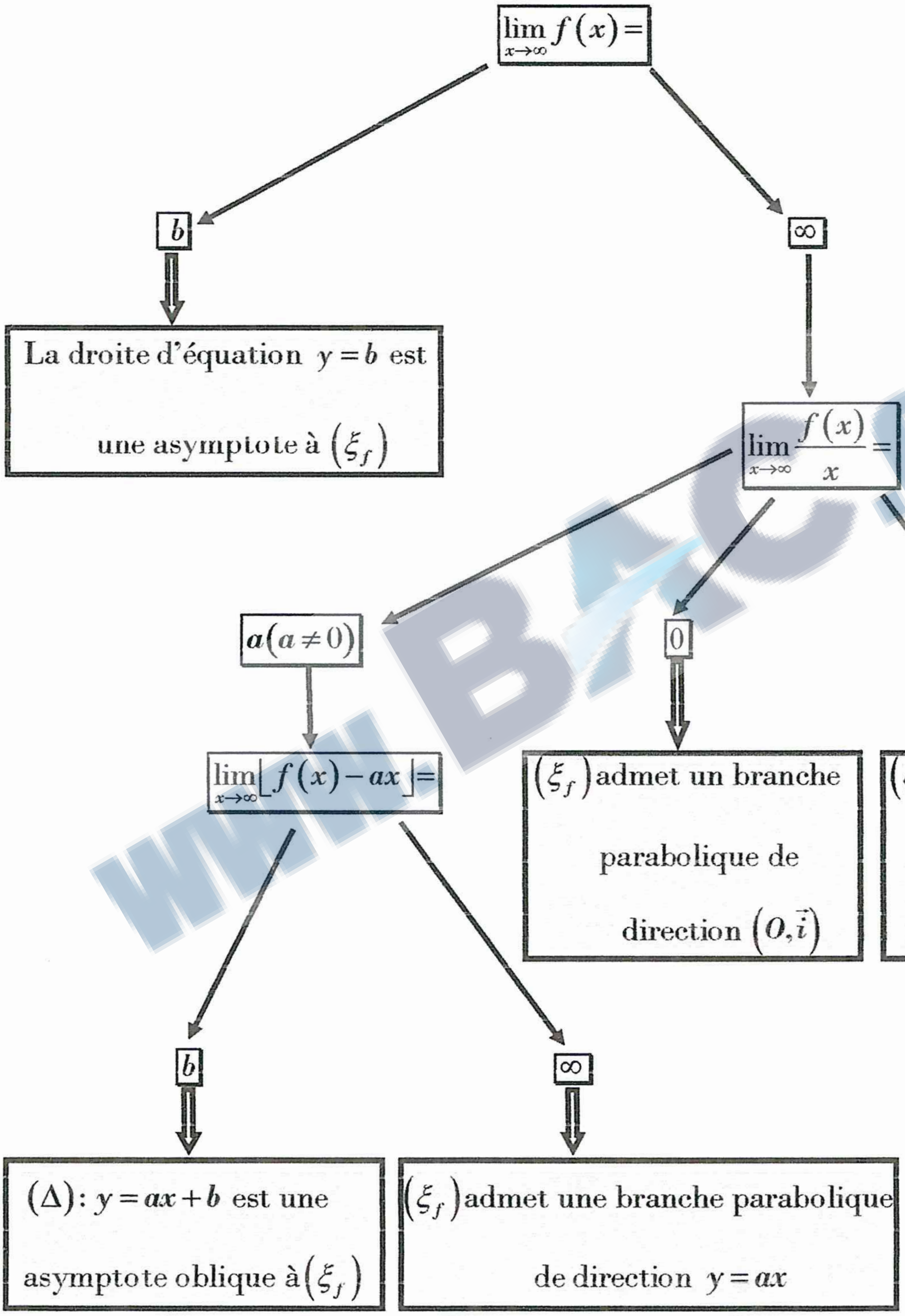
Conséquence :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Si f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I.

Intervalle I	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$I=[a,b]$	$f(I)=[f(a),f(b)]$	$f(I)=[f(b),f(a)]$
$I=[a,b[$	$f(I)=\left[f(a),\lim_{b^-} f\right[$	$f(I)=\left]\lim_{b^-} f,f(a)\right]$
$I=[a,+\infty[$	$f(I)=\left[f(a),\lim_{+\infty} f\right[$	$f(I)=\left]\lim_{+\infty} f,f(a)\right]$
$I=]a,b[$	$f(I)=\left]\lim_{a^+} f,\lim_{b^-} f\right[$	$f(I)=\left]\lim_{b^-} f,\lim_{a^+} f\right[$

Soit f une fonction et (ξ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.



Mr Masmoudi.I — Savoir Réagir — 2002-2003

Questions		Méthode
1) M.q f est continue en a	$\Rightarrow$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
2) M.q f est dérivable en a	$\Rightarrow$	$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \text{fini} = f'(a)$
3) Interpréter $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$	$\Rightarrow$	$\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente verticale vers le haut au point d'abscisse a
4) Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a	$\Rightarrow$	$T : y = f'(a)(x-a) + f(a)$
5) Etudier les variations de f sur I	$\Rightarrow$	•) Calculer f' •) Voir le signe de f' sur I •) Dresser le tableau de f •) Calcul des limites aux bornes ouvertes de I
6) M.q f est une bijection de I sur $f\langle I \rangle$	$\Rightarrow$	f continue et strictement monotone sur I
7) M.q l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α	$\Rightarrow$	$0 \in f\langle I \rangle$ donc il existe un unique α t.q $f(\alpha)=0$
et que $\alpha \in]a,b[$	$\longrightarrow$	$f(a)f(b) < 0$
8) Calculer $f^{-1}(x)$ pour $x \in f\langle I \rangle$	$\Rightarrow$	partir de $f(y) = x$ puis trouver y en fonction de x $(y = f^{-1}(x))$ unique
9) M.q f^{-1} est dérivable sur $f\langle I \rangle$	$\Rightarrow$	f est dérivable sur I et f' ne s'annulle pas sur I
10) Calculer $(f^{-1})'(x)$	$\Rightarrow$	$(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$ ou pose $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$ $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(y)}$ ....

(4) Savoir les bijections et f^{-1} :

(*) M.q f admet une fonction réciproque f^{-1} c'est : f est continue et strictement monotone sur I

f^{-1} est continue sur $f\langle I\rangle$

) M.q f^{-1} est dérivable sur $f\langle I\rangle$ c'est : f est dérivable sur I et f' ne s'annulle pas.

) Calculer $f^{-1}(x)$ c'est partir de $f(y)=x$ puis trouver y unique en fonction de x

) Calculer $f^{-1}(1)$ sans savoir $f^{-1}(x)$ c'est résoudre $f(x)=1$ et trouver l'unique x

) M.q $f(x)=0$ admet une solution unique α c'est dire que $0\in f\langle I\rangle$ donc il existe α unique tel que $f(\alpha)=0$

) Vérifier que $\alpha\in\,]a,b[$ c'est avoir $f(a)f(b)<0$

) M.q $f(x)=x$ admet une solution unique α c'est : poser $\varphi(x)=f(x)-x$, énoncer la bijection de φ puis dire que $0\in\varphi\langle I\rangle$

Tracer $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ c'est : faire la symétrique de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\Delta : y=x$.

(5) Savoir interpréter les limites :

(*) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty \longrightarrow$ $\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente verticale (vers le bas)

(*) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=0 \longrightarrow$ $\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente horizontale

(*) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1) \longrightarrow$ f est continue en 1

(*) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty \longrightarrow$ $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale $D : x=1$

(*) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1 \longrightarrow$ $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale $D : y=1$

(*) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-(ax+b)=0 \longrightarrow$ $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique $D : y=ax+b$

(*) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty\\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\\ \lim\limits_{x\to\infty}f(x)-ax=b\end{array}\right\} \longrightarrow$ $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ $D : y=ax+b$

(*) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty\\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0\end{array}\right\} \longrightarrow$ $\mathscr{C}_f$ admet une branche infinie de direction $(O\vec{i})$

(*) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty\\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty\end{array}\right\} \longrightarrow$ $\mathscr{C}_f$ admet une branche infinie de direction $(O\vec{j})$

ASYMPTOTES ET BRANCHES INFINIES

L. S.MONGI SLIM — BEN AMAR ADNEN

* $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ → la droite D : x = a est une asymptote verticale à (C).
* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$ → la droite D : y = a est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de +∞ et -∞.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ → La courbe de f admet une branche parabolique infinie de direction (O,j) au voisinage de +ou−∞.
* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ → La courbe de f admet une branche parabolique infinie de direction (O, i) au voisinage de +ou−∞.
* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$:
  - $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b$ ⇕ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ → la droite D : y = ax + b est une asymptote oblique au voisinage de +ou−∞.
  - $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ → la courbe de f admet branche de direction la droite y = ax au voisinage de -ou+∞

$\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty \longleftrightarrow$ on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale $\Delta : x = x_0$ (fig 1)

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) =$

- $a \longleftrightarrow$ on dit que $\mathscr{C}_f$ admet un asymptote horizontale $\Delta : y = a$ (fig 2)
- $\pm\infty \longrightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} =$
  - $\pm\infty \longleftrightarrow$ on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction celle de $(o,\vec{j})$ (fig3)
  - $0 \longleftrightarrow$ on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction celle de $(o,\vec{i})$ (fig4)
  - $a \longrightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax)$
    - $\pm\infty \longleftrightarrow$ On dit que $\mathscr{C}_f$ admet une branche Parabolique de dir $\Delta : y = ax$ (fig5)
    - $b \longleftrightarrow$ on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique $\Delta : y = ax + b$

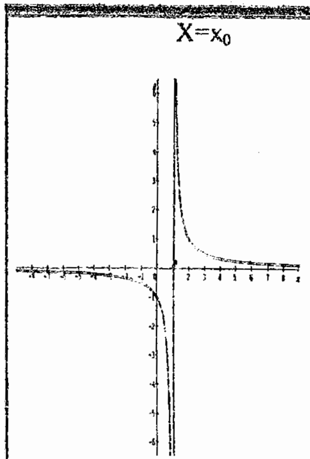


Fig1

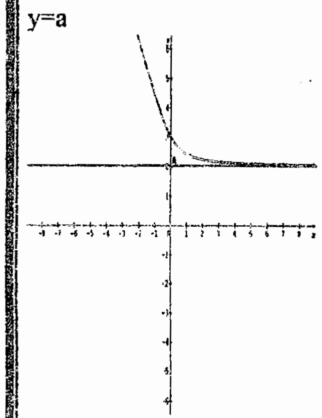


Fig2

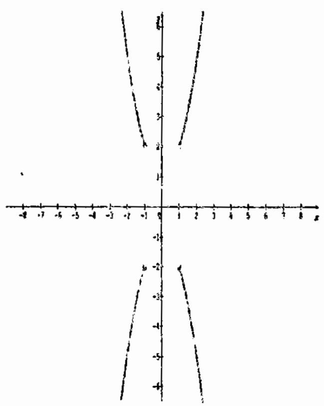


Fig3

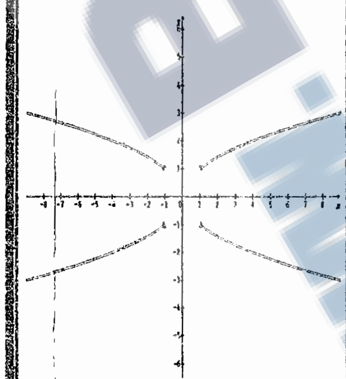


Fig4

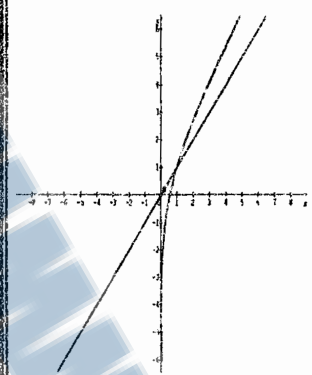


Fig5

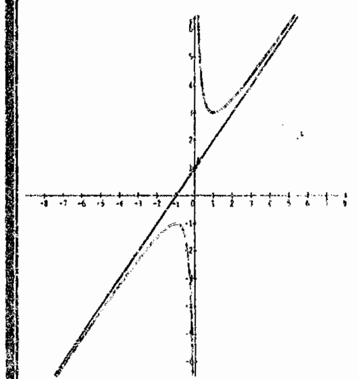


Fig6

Page Facebook : BAC – TUNISIE Site Web : www.BAC.org.tn Admin : Saber Gù Tél : 28.355.106

FONCTIONS RÉCIPROQUES

I - Fonctions réciproques :

1) Définition : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I .

✓(f est une bijection de I sur f<I>) Ssi($\forall$ y$\in$f<I> l'équation f(x)=y admet une unique solution dans I)

✓ On appelle fonction réciproque de f , la fonction f^{-1} définie sur f<I>
et qui à tout y$\in$f<I> associe l'unique solution dans I de l'équation f(x) = y d'inconnue x$\in$I.

2) Exercice n°1 : Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0]$ par $f(x)=2x^2-3$.

1) Déterminer : $f(]-\infty;0])$.

2) Montrer que pour tout y$\in f(]-\infty;0])$, l'équation f(x)=y d'inconnue x admet une unique solution dans $]-\infty;0]$.

3) En déduire la fonction f^{-1}.

Réponses :

1) $x\mapsto 2x^2-3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty;0]$
Donc f est dérivable sur $]-\infty;0]$ et pour tout $x\leq 0$, $f'(x)=4x\leq 0$ sur $]-\infty;0]$.
Donc : f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et $f(]-\infty;0])=[f(0)\,;\lim\limits_{x\to-\infty} f[\;=\;[-3\,;+\infty[$.

2) f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.
donc : pour tout y$\in f]-\infty;0])=[-3\,;+\infty[$, il existe un unique réel $x\in]-\infty;0]$ tel que f(x)=y.
Conclusion : Pour tout y $\in f(]-\infty;0])$, l'équation f(x)=y admet une unique solution dans $]-\infty;0]$.

3) f^{-1} est la fonction définie sur $[-3\,;+\infty[$ et qui :
à tout y$\in[-3\,;+\infty[$ associe l'unique solution dans $]-\infty;0]$ de l'équation f(x) =y d'inconnue x$\in]-\infty;0]$.

$$\begin{cases} f(x)=y \\ x\in]-\infty;0] \\ y\in[-3;+\infty[\end{cases} \text{ éq à : } \begin{cases} y=2x^2-3 \\ x\leq 0 \\ y\geq -3 \end{cases} \text{ éq à } \begin{cases} x^2=\frac{y+3}{2}\geq 0 \\ x\leq 0 \\ y\geq -3 \end{cases} \text{ éq à : } x=-\sqrt{\frac{y+3}{2}} \text{ car } x\leq 0.$$

Conclusion : f^{-1} est la fonction définie sur $[-3\,;+\infty[$ par : $f^{-1}(y)=x=-\sqrt{\frac{y+3}{2}}$.

3) Théorème : Fonction réciproque d'une fonction strictement monotone :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Si (***f est continue et strictement monotone sur un intervalle I***) alors (f réalise une bijection de I sur f<I>).

4) Activité② : page78

5) Définition : Fonction réciproque.
Soit f une fonction définie sur I.

Si (f est une bijection de I sur f(I)) alors (On appelle fonction récproque de f la fonction notée f^{-1} définie sur f(I) et qui à tout réel y $\in$ f(I) associe l'unique solution dans I de f(x) = y)

6) Conséquences :

Si (f est une bijection de I sur f(I)) alors

- f^{-1} est une bijection de f(I) sur I
- Pour tout x $\in$ I et pour tout y $\in$ f(I), $(f(x)=y)$ Ssi$(f^{-1}(y)=x)$
- Pour tout x $\in$ I et pour tout y $\in$ f(I), $f^{-1}of(x)=x$ et $fof^{-1}(y)=y$ $=f(x)$

$f(y)=x$, $f^{-1}(x)=y$, $x\in f\langle I\rangle$, $y\in I$
$f(x)=y \Rightarrow f^{-1}(y)=x$, $x\in I$, $y\in f\langle I\rangle$

7) Activité③ : page 56

☞$f^{-1}(-1)=x$ éq à : f(x)=−1 et x$\in[-2;+\infty[$ éq à : x=−2 , conclusion $f^{-1}(-1)=-2$. ($f^{-1}(1)=0$ et $f^{-1}(3)=1$)

$A(-2;1)\in C_f \Leftrightarrow f(-2)=-1 \Leftrightarrow f^{-1}(-1)=-2$

8) Exercice n°2 : Soit $f : x\longmapsto\sqrt{x^2+1}$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[1;+\infty[$.

2) Déterminer la fonction f^{-1}.

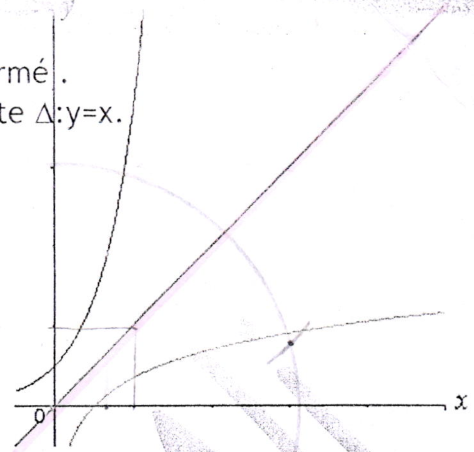
9) Représentation graphique d'une fonction réciproque : page (2)

a/ Introduction : Soient f une bijection de I sur f(I).

$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé.

Les points M(x ;y) et M'(y ;x) sont symétriques par rapport à la droite Δ:y=x.

M(x ;y)∈ $\mathscr{C}$ Ssi $\begin{cases} y = f(x) \\ x \in I \end{cases}$ Ssi $\begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in f(I) \end{cases}$ Ssi M'(y ;x)∈ $\mathscr{C}$'.



b/ Conséquence :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les courbes représentatives d'une fonction et sa réciproque sont symétriques par rapport à la droite Δ:y=x.

$\mathscr{C}_{f^{-1}} = S_\Delta(\mathscr{C}_f)$ avec $\Delta : y = x$

10) **Exercice n°3 :** Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, par f(x) = sin x .

1) Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera .

2) Donner les valeurs de : $\mathbf{f^{-1}}\left(\frac{1}{2}\right)$; $\mathbf{f^{-1}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\mathbf{f^{-1}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\mathbf{f^{-1}(-1)}$.

3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tracer les courbes représentatives de f et f^{-1}.

Réponses :

1) f est définie cont. et dériv. sur ℝ en particulier sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et f'(x) = cos(x)≥0 sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Donc : f est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

D'où : f réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sur $f\left(\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1;1]$.

2) $\begin{cases} f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = x \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ éq à : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ éq à : $\begin{cases} sin(x) = \frac{1}{2} \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ éq à x = $\frac{\pi}{6}$. Conclusion : $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

$\begin{cases} f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ éq à : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ éq à : $\begin{cases} sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ éq à x = $\frac{\pi}{3}$. Conclusion : $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

$\begin{cases} f^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = x \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ éq à : $\begin{cases} f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ éq à : $\begin{cases} sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ éq à x = $-\frac{\pi}{4}$. Conclusion : $f^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

$\begin{cases} f^{-1}(-1) = x \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ éq à : $\begin{cases} f(x) = -1 \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ éq à : $\begin{cases} sin(x) = -1 \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ éq à x = $-\frac{\pi}{2}$. Conclusion : $f^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

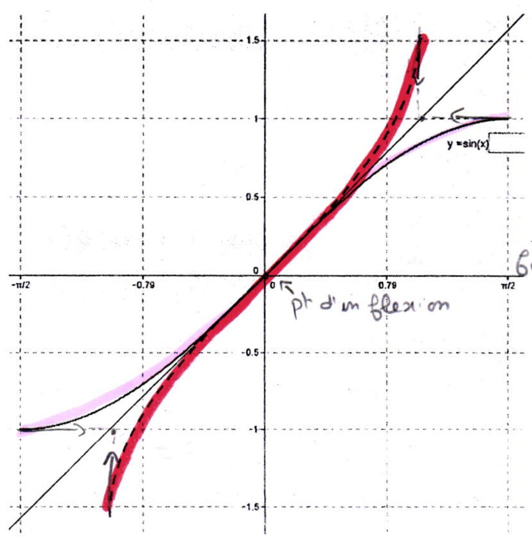
x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
y	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

3) tgnte

f réciproque

y	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$

tgnte



f'(x) = cos x

f''(x) = − sin x

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
f''(x)		+	0	−	
		$\mathscr{C}_f$		$\Delta/\mathscr{C}_f$	

II) Dérivée d'une fonction réciproque :

1) Théorème :

Soit f une fonction strictement monotone d'un intervalle ouvert I sur f<I>, a un réel de I et b = f(a) .

$$\text{Si}\begin{pmatrix}f \text{ est dérivable en } a\\ \text{et} \quad f'(a)\neq 0\end{pmatrix}\text{alors}\begin{pmatrix}f^{-1} \text{ est dérivable en } b=f(a)\\ \text{et } (f^{-1})'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}=\dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(b)\right]}\end{pmatrix}$$

2) Corollaire : Soit f une bijection d'un intervalle I sur f<I> .

$$\text{Si}\begin{pmatrix}f \text{ est dérivable sur } I\\ \text{et } \forall x\in I \quad f'(x)\neq 0\end{pmatrix}\text{alors}\begin{pmatrix}f^{-1} \text{ est dérivable sur } f(I)\\ \text{et } \forall y\in f(I),\ (f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}=\dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(y)\right]}\end{pmatrix}$$

varient vers m. sens

Remarque :

$$\text{Si}\begin{pmatrix}f \text{ est continue}\\ \text{et}\\ \text{strictement monotone sur } I\end{pmatrix}\text{alors}\begin{pmatrix}f^{-1} \text{ est continue, strictement monotone sur } f(I)\\ \text{et}\\ \text{de même sens de variation que } f\end{pmatrix}$$

3) Suite de l'EXERCICE N°3 :

4) Montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{\sqrt{3}}{2}$. et calculer $(f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

5) Étudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en (–1) et à gauche en 1.

6) Expliciter $(f^{-1})'(x)$ pour $x\in[-1;1]$.

Réponses :

4) $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$. $\begin{cases}f \text{ est dérivable en } \frac{\pi}{3}\\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\neq 0\end{cases}$ donc f^{-1} est dérivable en $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $(f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$

5) i/ $\begin{cases}f \text{ est dérivable à droite en } -\frac{\pi}{2}\\ f'_d\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\end{cases}$ donc f^{-1} n'est pas dérivable à droite en (−1).

$f^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{2} \iff f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$

$f^{-1}(x)=y \Rightarrow f(y)=x$

$f^{-1}(x)=y$, $f(y)=x$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ x>-1}}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(-1)}{x-(-1)}=\lim_{\substack{f(y)\to f\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ f(y)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)}}\frac{y-(-\frac{\pi}{2})}{f(y)-f\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\underset{f \text{ est croissante sur } \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}{=}\lim_{\substack{y\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+\\ y>\left(-\frac{\pi}{2}\right)}}\frac{1}{\dfrac{f(y)-f\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\underbrace{y-(-\frac{\pi}{2})}_{\to 0}}}=+\infty.$$

$f^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{2}$; $f(y)=x$; $f(-\frac{\pi}{2})=-1$

$f(x)\to f(a) \Leftarrow f$ c en a, $x\to a$

ii/ $\begin{cases}f \text{ est dérivable à gauche en } \frac{\pi}{2}\\ f'_g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\end{cases}$ donc f^{-1} n'est pas dérivable à gauche en 1.

$$\text{et } \lim_{\substack{x\to-1\\ x<-1}}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(1)}{x-1}=\lim_{\substack{f(y)\to f\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ f(y)<f\left(\frac{\pi}{2}\right)}}\frac{y-\frac{\pi}{2}}{f(y)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}\underset{f \text{ est croissante sur } \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}{=}\lim_{\substack{y\to\frac{\pi}{2}\\ y<\frac{\pi}{2}}}\frac{1}{\dfrac{f(y)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{y-\frac{\pi}{2}}}=+\infty.$$

6) $\left.\begin{array}{l}f \text{ est dérivable sur } \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\\ f'(x)=\cos(x)\neq 0 \text{ pour tout } x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\end{array}\right\}$ donc f^{-1} est dérivable sur $]-1;1[$.

$$\begin{cases}(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)}\\ f(y)=x\\ x\in]-1;1[\text{ et } y\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}\text{éq à : }\begin{cases}(f^{-1})'(x)=\frac{1}{\cos(y)}\\ \sin y=x\\ x\in]-1;1[\text{ et } y\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}\text{éq à : }\begin{cases}(f^{-1})'(x)=\frac{1}{\cos(y)}\\ \cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}\\ x\in]-1;1[\text{ et } y\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

Conclusion : f^{-1} est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $x\in]-1;1[$, $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Soit f la fonction définie sur $[0;\pi]$, par $f(x)=\cos(x)$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $[0;\pi]$ sur un intervalle J que l'on précisera .

2)a/ Étudier la dérivabilité de f^{-1} en 0 puis déterminer $f^{-1}(0)$.

b/ Étudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en (-1) et à gauche en 1.

3)Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ tracer les courbes représentatives de f et f^{-1}.

Réponses :

1) $x \longmapsto \cos(x)$ est définie cont. et dériv. sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0;\pi]$ et $f'(x) = -\sin(x) \leq 0$ sur $[0;\pi]$.

Donc : f est continue et strictement décroissante sur $[0;\pi]$.

D'où : f réalise une bijection de $[0;\pi]$ sur $f([0;\pi]) = [-1;1]$

x	0		π
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	1	$\searrow$	-1

2)a/ $\mathbf{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

$$\begin{cases} f \text{ est dérivable en } \frac{\pi}{2} \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \neq 0 \end{cases} \text{donc } f^{-1} \text{ est dérivable en } \mathbf{0} \text{ et } (f^{-1})'(\mathbf{0}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f}'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{-1}} = \mathbf{-1}.$$

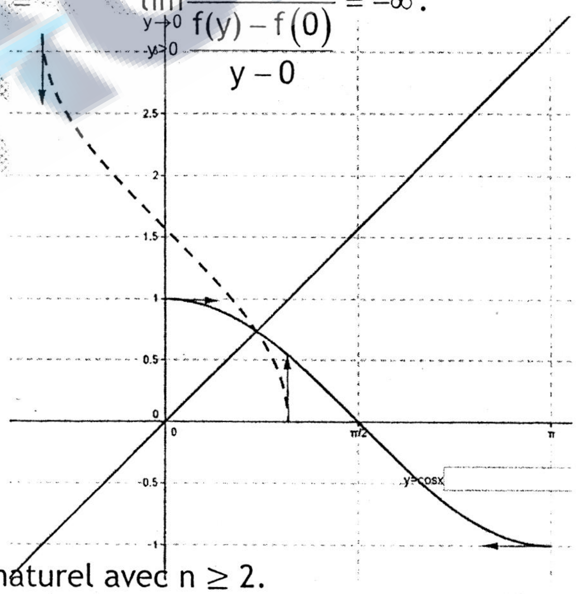
b/ i/ $\begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche en } \pi \\ f'_g(\pi) = -\sin(\pi) = 0 \end{cases}$ donc f^{-1} n'est pas dérivable à droite en (-1).

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} \frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(-1)}{x-(-1)} = \lim_{\substack{f(y)\to f(\pi) \\ f(y)>f(\pi)}} \frac{y-\pi}{f(y)-f(\pi)} \overset{f \text{ est décroissante sur } [0;\pi]}{=} \lim_{\substack{y\to\pi \\ y<\pi}} \frac{1}{\frac{f(y)-f(\pi)}{y-\pi}} = -\infty .$$

ii/ $\begin{cases} f \text{ est dérivable à droite en } 0 \\ f'_d(0) = -\sin(0) = 0 \end{cases}$ donc : f^{-1} n'est pas dérivable à gauche en 0 .

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ x<1}} \frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(1)}{x-1} = \lim_{\substack{f(y)\to f(0) \\ f(y)<f(0)}} \frac{y-0}{f(y)-f(0)} \overset{f \text{ est décroissante sur } [0;\pi]}{=} \lim_{\substack{y\to0 \\ y>0}} \frac{1}{\frac{f(y)-f(0)}{y-0}} = -\infty .$$

3)



Fonction racine $n^{\text{ième}}$: $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$

1)Définition et théorème : Soit n un entier naturel avec $n \geq 2$.

La fonction : $f : x \longmapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$

Donc : $f : x \longmapsto x^n$ réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $f([0;+\infty[) = [0;+\infty[$.

Sa réciproque est la fonction notée $\sqrt[n]{\ }$ définie continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\ } \ : [0;+\infty[&\longrightarrow [0;+\infty[\\ x &\longmapsto \sqrt[n]{x} \end{aligned}$$

$\sqrt[n]{x}$: se lit racine $n^{\underline{\text{ième}}}$ de x.

$\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = \sqrt[4]{16}$
$= 2$

Conséquence① : Soit n un entier naturel avec $n \geq 2$.

Pour tous réels positifs x et y . $(y = x^n)$ Ssi $(x = \sqrt[n]{y})$.

$x = 2$

Espace

$A(2,-1,0)$ $B(6,2,-4)$

Milieux

$I = A * B \iff$

$I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\ \frac{y_A+y_B}{2},\ \frac{z_A+z_B}{2}\right) \Rightarrow I\left(4;\frac{1}{2};-2\right)$

Vecteur

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Distance

$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

$= \sqrt{4^2+3^2+(-4)^2} = \sqrt{41}$

$\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{z}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

norme

$\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2+(-2)^2+6^2} = \sqrt{56}$ $\|\vec{v}\| = \sqrt{26}$

déterminant

$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} +4 & 3 & 1 \\ -\,-2 & 4 & -1 \\ +6 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$

$= 4(-4-1)+2(-3+1)+6(-3-4) = -66$

$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{z}) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -6 \\ -2 & 4 & 3 \\ 6 & -1 & -9 \end{vmatrix} = 4(-33)+2(-33)+6(33) = 0$

Coplanaires

$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \neq 0 \Rightarrow$ $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires
$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base.
$(A,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est un repère

$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{z}) = 0 \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{z}$ sont coplanaire

Colinéarité

* $\vec{z} = -\frac{3}{2}\vec{u} \Rightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

* $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 16+6 = 22 \neq 0 \Rightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

orthogonalité

* $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 4\times1+(-2)\times(-1)+6\times(-1) = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{w}$

* $\vec{u}\cdot\vec{v} = 12-8-6 = -2 \neq 0 \Rightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

Produit scalaire

$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = aa'+bb'+cc'$ réel

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

$\Rightarrow \boxed{\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}} = \frac{-2}{\sqrt{56}\times\sqrt{26}} = -\frac{\sqrt{91}}{182}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.

Produit vectoriel

$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \vec{n}\begin{pmatrix} bc'-cb' \\ ca'-ac' \\ ab'-a'b \end{pmatrix}$ vecteur

$\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{n}\begin{pmatrix} +\,-22 \\ -\,22 \\ +\,22 \end{pmatrix}$

* $\vec{n} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{v}$

* $(\vec{u},\vec{v},\vec{n})$ est une base directe.

* $\|\vec{n}\| = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})|$

$\Rightarrow \boxed{|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})| = \frac{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|}} = \frac{22\sqrt{3}}{\sqrt{56}\sqrt{26}} = \frac{11\sqrt{273}}{182}$

* $\vec{u}$ et $\vec{z}$ sont colinéaires $\Rightarrow \vec{u}\wedge\vec{z} = \vec{0}$

* si $P = \underset{\text{plan}}{P}(A,\vec{u},\vec{v})$

$\Rightarrow \vec{n} = \vec{u}\wedge\vec{v}$ est un vecteur normal à P.

* $\vec{v}\wedge\vec{u} = -\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{n}$

Produit mixte

$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w} = \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = -66$

$\shortparallel \qquad \shortparallel \qquad \shortparallel$

$(\vec{v},\vec{w},\vec{u}) = (\vec{v}\wedge\vec{w})\cdot\vec{u} = \det(\vec{v},\vec{w},\vec{u}) = -66$

$\shortparallel \qquad \shortparallel \qquad \shortparallel$

$(\vec{w},\vec{u},\vec{v}) = (\vec{w}\wedge\vec{u})\cdot\vec{v} = \det(\vec{w},\vec{u},\vec{v}) = -66$

Professeur M ed NAIFAR

Bac Sciences expérimentales et Techniques

Résumé Mathématiques

Géométrie dans l'espace

(Calcul de distances, hauteurs, surfaces et volumes)

Distance entre un point I et une droite D(A , $\vec{u}$) :	$d = \frac{\lVert \overrightarrow{IA} \wedge \vec{u} \rVert}{\lVert \vec{u} \rVert}$.
Distance entre deux droites D(A , $\vec{u}$) et D'(B , $\vec{v}$) :	$d = \frac{\lvert \det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) \rvert}{\lVert \vec{u} \wedge \vec{v} \rVert}$.
Aire d'un parallélogramme ABCD	$\mathcal{A} = \lVert \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \rVert$.
Aire d'un triangle ABC :	$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \lVert \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \rVert$.
Volume du parallélépipède ABCDEFGH :	$\mathcal{V} = \lvert det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) \rvert$.
Volume d'un tétraèdre ABCD $V = \frac{1}{6} \lvert (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \rvert$	$\mathcal{V} = \frac{1}{6} \lvert det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \rvert$.
La hauteur du tétraèdre ABCD issue de A : Cette dernière représente exactement la distance entre un point A et un plan (BCD).	$h = \frac{\lvert \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \rvert}{\lVert \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} \rVert}$.

Et on se rappelle en plus

Aire du triangle	$\mathcal{A} = \frac{Base \times hauteur}{2}$
Volume du tétraèdre	$\mathcal{V} = \frac{Base \times hauteur}{3}$
Aire du parallélogramme	$Base \times hauteur$

Prof. Mme NAIFAR

Equations de droites et de plans

Equation paramétrique d'une droite

$$D = \mathcal{D}\left(A(2,-1,0) ; \vec{u}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}\right) : \begin{cases} x = 2+4\alpha \\ y = -1-2\alpha \\ z = 6\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Equations cartésiennes d'une droite

$$D : \begin{cases} \alpha = \dfrac{x-2}{4} \\ \alpha = \dfrac{y+1}{-2} \\ \alpha = \dfrac{z}{6} \end{cases} \Rightarrow D : \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$$

Equation paramétrique d'un plan :

$$Q = \mathcal{P}\left(A(2,-1,0) ; \vec{u}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}\right) : \begin{cases} x = 2+4\alpha+3\beta \\ y = -1-2\alpha+4\beta \\ z = 6\alpha-\beta \end{cases} \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

Equation cartésienne d'un plan

On élimine α dans x et y puis dans y et z.

$$Q : \begin{cases} x+2y = 11\beta \\ 3y+z = -3+11\beta \end{cases}$$

On élimine β.

$$Q : x+2y-3y-z = 3$$

D'où $\boxed{Q : x-y-z-3=0}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Q.

2ème méthode $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix} = \vec{N}\begin{pmatrix}-22\\22\\22\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Q

$\vec{n'}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ ou $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{N}$ donc normal à Q

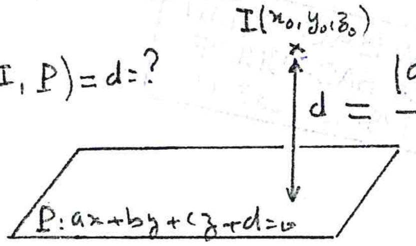
$$\Rightarrow Q : x-y-z+\overset{?}{d}=0$$

$$A(2,-1,0) \in Q \Rightarrow 2+1-0+d=0 \Rightarrow d=-3$$

$$\Rightarrow Q : x-y-z-3=0$$

Distance entre un point et un plan

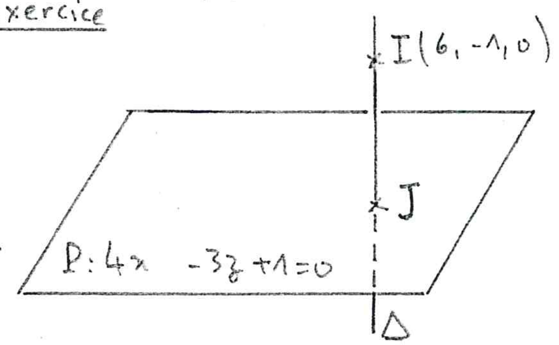
$d(I,P) = d = ?$



$$d = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Projeté orthogonal d'un point sur un plan

Exercice



① Ecrire une équation paramétrique de la droite Δ passant par I et $\perp$ à P.

$$\rightarrow \Delta = \mathcal{D}\left(I ; \vec{n}_P\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}\right) : \begin{cases} x = 6+4\alpha \\ y = -1 \\ z = -3\alpha \end{cases}$$

② Déterminer les coordonnées de J / $\Delta \cap P = \{J\}$.

$$\rightarrow \Delta \cap P : 4(6+4\alpha) -3(-3\alpha)+1=0$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \alpha = -1$$

D'où $\Delta \cap P = \{J(2,-1,3)\}$

③ Que représente le point J par rapport à I et P

$\rightarrow$ $\boxed{J \text{ est le projeté orthogonal de } I \text{ sur } P.}$

④ Calculer la distance IJ

$$IJ = \sqrt{(-4)^2+0^2+3^2} = 5$$

⑤ Que représente la distance IJ pour I et P ?

$$\rightarrow IJ = d(I,P).$$

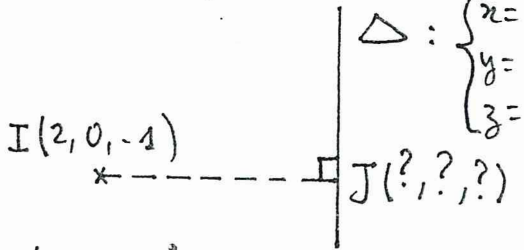
⑥ Retrouver cette distance

$$\rightarrow d(I,P) = \frac{|4(6) -3\times 0+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = 5.$$

- $P \,//\, P' \Leftrightarrow \vec{N}$ et $\vec{N'}$ sont colinéaires.
- $P \perp P' \Leftrightarrow \vec{N}$ et $\vec{N'}$ sont orthogonaux.
- $D(A,\vec{u}) \,//\, P \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{N}$ sont orthogonaux.
- $D(A,\vec{u}) \perp P \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{N}$ sont colinéaires.

Projeté orthogonal d'un point sur une droite

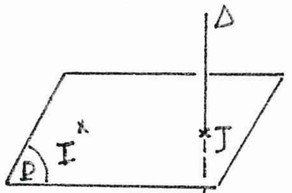
$\Delta : \begin{cases} x = -\alpha \\ y = 2+\alpha \\ z = 3 \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$



(trois méthodes)

1ère méthode :

① Ecrire une équation cartésienne du plan P passant par I et ⊥ à Δ.



→ Le vecteur normale à P est un vecteur direct. de Δ

$\vec{u}_\Delta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{n}_P \Rightarrow P : -x + y + d = 0$

$I(2,0,-1) \in P \Rightarrow -2 + 0 + d = 0 \Rightarrow d = 2$

D'où $P : -x + y + 2 = 0$

② Déterminer les coordonnées du point $J / \Delta \cap P = \{J\}$

$\Delta \cap P : -(-\alpha) + (2+\alpha) + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$

D'où $\Delta \cap P = \{J(2,0,3)\}$

③ Que représente le point J pour I et Δ ?

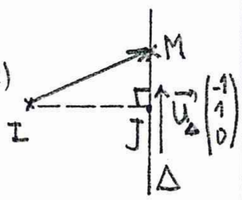
→ $\boxed{\text{J est le projeté orthogonal de I sur } \Delta.}$

④ Calculer la distance IJ qui est $d(I,\Delta)$.

$d(I,\Delta) = IJ = \sqrt{0^2 + 0^2 + 4^2} = 4.$

2ème méthode : (la meilleure)

Soit $M(-\alpha\,;\,2+\alpha\,;\,3) \in \Delta$ $(\alpha \in \mathbb{R})$



① Calculer $\vec{IM} \cdot \vec{u}_\Delta$

→ $\vec{IM} \begin{pmatrix} -\alpha-2 \\ 2+\alpha \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{u}_\Delta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha + 2 + 2 + \alpha + 0 = 2\alpha + 4$

② Déterminer les coordonnées du point $\boxed{\text{J projeté orthogonal de I sur } \Delta}$

→ J est le point particulier de M qui vérifie

$(IJ) \perp \Delta \Leftrightarrow \vec{IJ} \perp \vec{u}_\Delta = 0$

$\Leftrightarrow 2\alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2 \Rightarrow J(2,0,3)$

③ Calculer alors $d(I,\Delta)$

$d(I,\Delta) = IJ = \sqrt{0^2 + 0^2 + 4^2} = 4.$

3ème méthode :

Soit $M(-\alpha\,;\,2+\alpha\,;\,3) \in \Delta$. $(\alpha \in \mathbb{R})$

① Ecrire en fonction de α IM^2

→ $IM^2 = (-\alpha-2)^2 + (2+\alpha)^2 + 4^2 = 2\alpha^2 + 8\alpha + 24$

② On note cette fonction de α, $f(\alpha)$ (c.à.d. $f(\alpha) = IM^2$)

Etudier le sens de variation de f.

$f(\alpha) = 2\alpha^2 + 8\alpha + 24 \quad \alpha \in \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(\alpha) = 4\alpha + 8$

α	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$f(\alpha)$	$+\infty$	↘	16	↗	$+\infty$

③ Déterminer la valeur minimale de $f = IM^2$ en déduire la valeur minimale de IM.

→ $f_{min} = IM^2_{min} = 16 \Rightarrow IM_{min} = 4.$

④ Déduire $d(I,\Delta)$

→ $d(I,\Delta) = IM_{min} = 4.$

⑤ J(?,?,?) le projeté orthogonal J de I sur Δ est le point M / IM est min ⟺ IM^2 est min ⟺ f est min ⟺ $\alpha = -2 \Rightarrow J(2,0,3)$

Remarque

$d(I\,;\,\Delta = \mathcal{D}\{A(0,2,3)\,;\,\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}) = \dfrac{\|\vec{IA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

$\vec{IA}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{w}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{w}\| = 4\sqrt{2}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$

$\Rightarrow d(I,\Delta) = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4.$

Lycée Pilote Sfax Le 05 -12- 2012	Devoir de synthèse N°1 Durée : 2 heures	Classes : $4^{ème}$ Sc_{1+2+3} Mme : Fakhfakh Mrs : Smaoui et Boukhris

Exercice 1 (4 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^5 = 1$.
2. On se propose dans cette question de déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(E) : (Z-1)^5 = (Z+1)^5$.
   a. Montrer que si Z est une solution de l'équation (E) alors $|Z-1| = |Z+1|$.
   b. En déduire que les solutions de (E) sont des imaginaires.
   c. Soit x un réel et θ un réel différent de $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
   Montrer que $\dfrac{-1+ix}{1+ix} = e^{i\theta}$ si et seulement si $x = \dfrac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$.
   d. En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 2 (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O et $\alpha \in [0, 2\pi[$.

On désigne par M le point d'affixe $e^{i\alpha}$ et par A le point d'affixe $1+i$.

1. a. Placer le point A.
   b. A partir d'un point M, construire le point M' d'affixe $-2e^{-i\alpha}$.

2.a. Montrer que $AM' = \left|2e^{i\alpha} + 1 - i\right|$.

b. Montrer que $AM \times AM' = \left|2e^{i2\alpha} - 2 - (1+3i)e^{i\alpha}\right|$.

3.a. Montrer que pour tout $\alpha \in [0, 2\pi[$, $2i\,e^{i\alpha}\sin\alpha = e^{i2\alpha} - 1$.

b. En déduire que $AM \times AM' = \sqrt{1 + (-3 + 4\sin\alpha)^2}$.

c. Déterminer alors la position du point M de $\mathscr{C}$ pour laquelle le réel $AM \times AM'$ est maximal.

Exercice 3 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$.

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
2. Montrer que f est strictement croissante sur $[0, 1[$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Soit g la fonction définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = f(1 - \sin x)$.
   a. Montrer que g est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer $g'(x)$.
   b. Dresser le tableau de variation de g.

Exercice 4 (7 points)

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2)=2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Dans le graphique ci-dessous $\mathscr{C}'$ est la courbe de la fonction dérivée f' de f dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

L'axe des abscisses est une asymptote à $\mathscr{C}'$.

1.a. Etudier la monotonie de f sur $\mathbb{R}$.

b. Etudier la monotonie de f' sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $\mathscr{C}$ admet exactement deux points d'inflexions dont on précisera leurs abscisses.

3. Montrer que $\mathscr{C}$ admet exactement deux tangentes horizontales.

4. Montrer que la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 passe par le point $A(0,1)$.

5. Montrer que l'équation $f''(x)=\frac{1}{8}$ admet au moins une solution dans $]-2,2[$.

6. Montrer que $f(3)\leq\frac{5}{2}$.

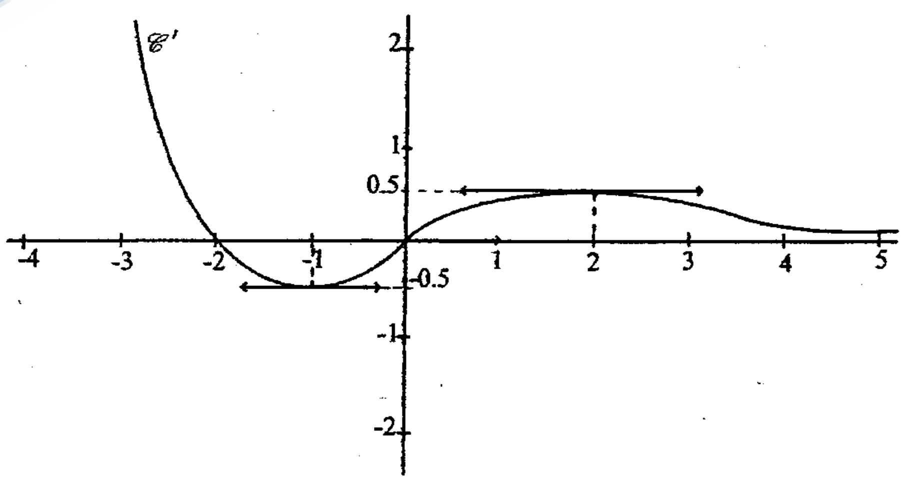
7. Soit la suite U définie par $\begin{cases} U_0=\frac{5}{2} \\ U_{n+1}=f(U_n),\ n\geq 0. \end{cases}$

a. Montrer que pour tout $n\geq 0$, $U_n\geq 2$.

b. Montrer que pour tout $n\geq 0$, $|U_{n+1}-2|\leq\frac{1}{2}|U_n-2|$.

c. Montrer que pour tout $n\geq 0$, $|U_n-2|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

d. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.



Ex n

Pilote

1°) $z^5 = 1$, $z_k = e^{i\frac{2\pi k}{5}}$, $k \in \{0,1,2,3,4\}$

$S_{\mathbb{C}} = \{1, e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}}\}$

2°) z solution de (E)

a) $(z-1)^5 = (z+1)^5$

$\Leftrightarrow |z-1|^5 = |z+1|^5$

$\Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{z+1}\right|^5 = 1$, $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \in \mathbb{R}_+$

$X^5 = 1$ d'après 1°)

la solution réel est 1

alors

$X = 1$

$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1 \Rightarrow |z-1| = |z+1|$

b) Z solution de (E)

on pose $z = x+iy$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Z solution alors $|z-1| = |z+1|$

$|x+iy-1| = |x+iy+1|$

$|x-1+iy| = |x+1+iy|$

$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$(x-1)^2+\cancel{y^2} = (x+1)^2+\cancel{y^2}$

$\cancel{x^2} - 2x + \cancel{1} = \cancel{x^2} + 2x + \cancel{1}$

$4x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$

alors les solution de (E) sont des imaginaires.

c) $\frac{-1+ix}{1+ix} = e^{i\theta}$

$-1+ix = e^{i\theta} + ix e^{i\theta}$

$\Leftrightarrow -1+ix$

$\Leftrightarrow ix - ixe^{i\theta} = e^{i\theta}+1$

$\Leftrightarrow ix(1-e^{i\theta}) = e^{i\theta}+1$

$x = \frac{e^{i\theta}+1}{i(1-e^{i\theta})}$

$x = \frac{e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})}{i\, e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2})}$

$= \frac{2\cos\theta/2}{i \times -2i \sin\theta/2}$

$= \text{cotan}\,\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\tan\theta/2}$

d) (E) : $(z-1)^5 = (z+1)^5$

$|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 = 1$

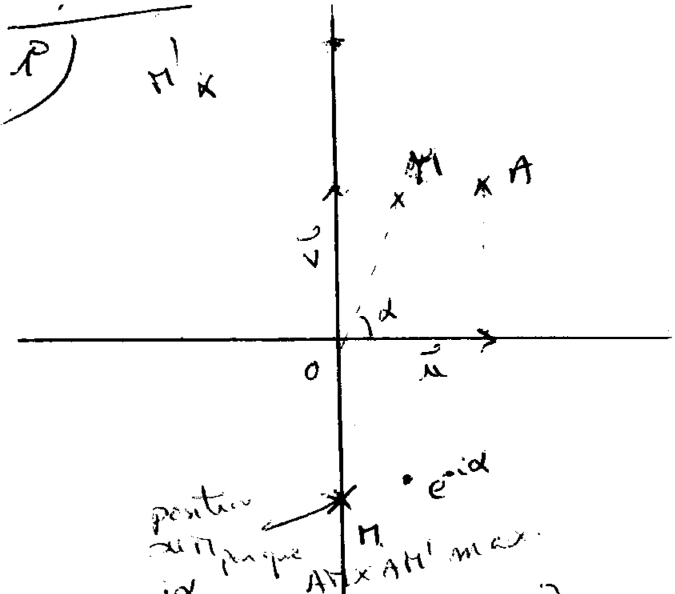
$\Leftrightarrow Z^5 = 1$

alors $\frac{z-1}{z+1} = e^{i\theta}$, $\theta \in \{\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}\}$

d'autre part $z \in i\mathbb{R} \Rightarrow z = iy$, $y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{iy-1}{iy+1} = e^{i\theta} \Rightarrow y = \text{Cotan}\frac{\theta}{2}$

1)



$z_M = e^{i\alpha} \Rightarrow M \in \mathcal{C}_{(O,1)}$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \alpha\,[2\pi]$

$z_{M'} = -2e^{-i\alpha} = 2e^{i(\pi-\alpha)}$

$\rightarrow M' \in \mathcal{C}_{(O,2)}$ et $\arg(z_{M'}) \equiv \pi - \alpha\,[2\pi]$

2) a)

$|-z| = |z|$

$AM' = |z_{M'} - z_A|$ $\quad |\bar{z}| = |z|$

$= |-2e^{-i\alpha} - 1 - i|$

$= |-(2e^{-i\alpha} + 1 + i)|$

$= |2e^{-i\alpha} + 1 + i|$

$= |\overline{2e^{-i\alpha} + 1 + i}|$

$= |2e^{i\alpha} + 1 - i|$

$|z|\cdot|z'| = |zz'|$

b) $AM \times A'M = |e^{i\alpha} - 1 - i| \times |2e^{i\alpha} + 1 - i|$

$= |(e^{i\alpha} - (1+i))(2e^{i\alpha} + 1 - i)|$

$= |2e^{i2\alpha} + (1-i)e^{i\alpha} - 2(1+i)e^{i\alpha} - 2|$

$= |2e^{i2\alpha} + (1 - i - 2 - 2i)e^{i\alpha} - 2|$

$= |2e^{i2\alpha} - (1+3i)e^{i\alpha} - 2|$

3) a) $\sin\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$

$2ie^{i\alpha}\sin\alpha = 2i \times e^{i\alpha} \times \dfrac{(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})}{2i}$

$= e^{2i\alpha} - e^{i0}$

$= e^{2i\alpha} - 1$

b) $AM \times AM' = |2e^{i2\alpha} - 2 - (1+3i)e^{i\alpha}|$

$= |2(e^{i2\alpha} - 1) - (1+3i)e^{i\alpha}|$

$= |2\times(2ie^{i\alpha}\sin\alpha) - (1+3i)e^{i\alpha}|$

$= |4i\sin\alpha\, e^{i\alpha} - (1+3i)e^{i\alpha}|$

$= |(4i\sin\alpha - 1 - 3i)e^{i\alpha}|$

$= |-1 + i(-3 + 4\sin\alpha)| \times \underbrace{|e^{i\alpha}|}_{1}$

$= \sqrt{1 + (-3 + 4\sin\alpha)^2}$

$\alpha \in [0, 2\pi[$

$-1 \le \sin\alpha \le 1$

$-4 \le 4\sin\alpha \le 4$

$-7 \le 4\sin\alpha - 3 \le 1$

$-7 \qquad 1$

$(4\sin\alpha - 3)^2$ est maximal si

$4\sin\alpha - 3 = -7$

$\sin\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2}$

$(0,1)$ vérifie l'équation de T

alors $A(0,1) \in T \Rightarrow T$ passe par A

5°) f' est continue sur $[-2,2]$
f' est dérivable sur $]-2,2[$

alors il existe $c \in]-2,2[$

tq $(f')'(c) = \dfrac{f'(2) - f'(-2)}{2-(-2)}$

$f''(c) = \dfrac{0,5 - 0}{4} = \dfrac{\frac{1}{2}}{4} = \dfrac{1}{8}$

ainsi l'éq $f''(x) = \dfrac{1}{8}$ admet au moins une solution $c \in]-2,2[$

6°) $\forall x \in [0,+\infty[$, $0 \leq f'(x) \leq 0,5$

on a f est continue sur $[2,3]$
f est dérivable sur $]2,3[$
$\forall x \in]2,3[$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

alors $0 \leq f(3) - f(2) \leq \frac{1}{2}(3-2)$

d'où $f(3) - 2 \leq \frac{1}{2}$

alors $f(3) \leq \frac{5}{2}$

7°) • $u_0 = \frac{5}{2} \geq 2$ vraie

• soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $u_n \geq 2$

mq $u_{n+1} \geq 2$.

... $u_n \geq 2$ et f est ... sur $[2,+\infty[$

alors $\underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}} \geq f(2)$

$u_{n+1} \geq 2$

concl $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$.

b) f est dérivable sur $[0,+\infty[$
$\forall x \in [0,+\infty[$, $|f'(x)| \leq 0,5$

alors $\forall$ $x, y \in [0,+\infty[$
$|f(x) - f(y)| \leq 0,5\,|x-y|$

or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$

alors $|f(u_n) - f(2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$, $\forall n \in \mathbb{N}$

d'où $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$, $\forall n \in \mathbb{N}$

c) • $|u_0 - 2| = |\frac{5}{2} - 2| = \frac{1}{2}$
$(\frac{1}{2})^0 = 1$
$|u_0 - 2| \leq (\frac{1}{2})^0$ vraie.

soit $n \in \mathbb{N}$
• On suppose que $|u_n - 2| \leq (\frac{1}{2})^n$
mq $|u_{n+1} - 2| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$

on a $|u_n - 2| \leq (\frac{1}{2})^n$

alors $\frac{1}{2}|u_n - 2| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$
et comme $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$

alors $|u_{n+1} - 2| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$

concl $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| \leq (\frac{1}{2})^n$

d) $|u_n - 2| \leq (\frac{1}{2})^n$
$\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - 2 = 0$

d'où $\lim u_n = 2$

Exn 3

1°) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{\frac{x}{1-x}}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{x}{1-x}}{x\sqrt{\frac{x}{1-x}}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cancel{x}\ 1}{(1-x)\times \cancel{x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}} = +\infty$ ($\sqrt{\frac{x}{1-x}} \to 0^+$)

alors f n'est pas derivable à droite en 0.

2°) $x \longmapsto \dfrac{x}{1-x}$ rationnelle derivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ en particulier sur $[0,1[$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{x}{1-x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

et comme elle est strictement positive sur $]0,1[$ alors $x\longmapsto\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ est derivable sur $]0,1[$.

$f'(x) = \dfrac{\left(\frac{x}{1-x}\right)'}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}$

$= \dfrac{\frac{1(1-x)-x(-1)x}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}$

$\frac{1}{\ldots}\times\frac{1}{\ldots}$

$\dfrac{1}{2(1-x)^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}} = \dfrac{1}{2(1-x)^2}\times\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} > 0$ $\forall x\in]0,1[$

on a f' est strictement positive sur $]0,1[$ alors f est strictement croissante sur $]0,1[$ et f est continue sur $[0,1[$ alors f est strictement croissante sur $[0,1[$

3°)

x	0		1
$f'(x)$	‖	$+$	‖
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

$\lim\limits_{1^-} f = \lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{\dfrac{x}{1-x}} = +\infty$

		1	
$(1-x)$	$+$	0	$-$

4°) $x \overset{u}{\longmapsto} 1-\sin x$ est derivable sur $\underbrace{]0,\tfrac{\pi}{2}[}_{}=I$

$x\longmapsto f(x)$ est derivable sur $\underbrace{]0,1[}_{J}$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$

$0 < \sin x < 1$

$-1 < -\sin x < 0$

$0 < 1-\sin x < 1$

$\forall x\in \underbrace{]0,\tfrac{\pi}{2}[}_{I}$, $1-\sin x \in \underbrace{]0,1[}_{J}$

$u(I)\subset J$

alors $g : x \longmapsto f(1-\sin x)$ est derivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$

$g'(x) = (1-\sin x) \times f'(1-\ldots)$

$= -\cos x \times \dfrac{1}{2(1-1+\sin)^2\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1-1+\sin x}}}$

$g'(x) = \dfrac{-\cos x}{2\sin^2 x\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{\sin x}}}$

b) le signe de $g'(x)$ est celui $-\cos x$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x\to 0^+} 1-\sin x = 1$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ $\Rightarrow \lim\limits_{0^+} g = +\infty$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} 1-\sin x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ $\Rightarrow \lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-} g = 0$

Exn° 4

$\mathcal{C}' = \mathcal{C}_{f'}$ au dessus de $(O,\vec{i})$

$f'(x) > 0$

$\mathcal{C}'$ au dessous de $(O,\vec{i})$

$f'(x) < 0$

$\mathcal{C}'$ intercepte $(O,\vec{i})$, f' est nul

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

f est st $\nearrow$ sur $]-\infty,-2]$
f est st $\searrow$ sur $[-2,0]$
f est st $\nearrow$ sur $[0,+\infty[$

b)

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$0,5$	$\nearrow$	$0,5$	$\searrow$	0

2°) d'après b) $f''(x)$ s'annule uniquement en -1 et 2 en changeant de signe chaque fois alors $\mathcal{C} = \mathcal{C}_f$ admet exactement deux points d'inflexion en $I_1(-1, f(-1))$ et en $I_2(2, f(2))$

3°) Comme f' s'annule exactement deux fois en -2 et en 0 alors $\mathcal{C}_f$ admet exactement deux tangente horizontale (au points $(-2, f(-2))$ et $(0, f(0))$)

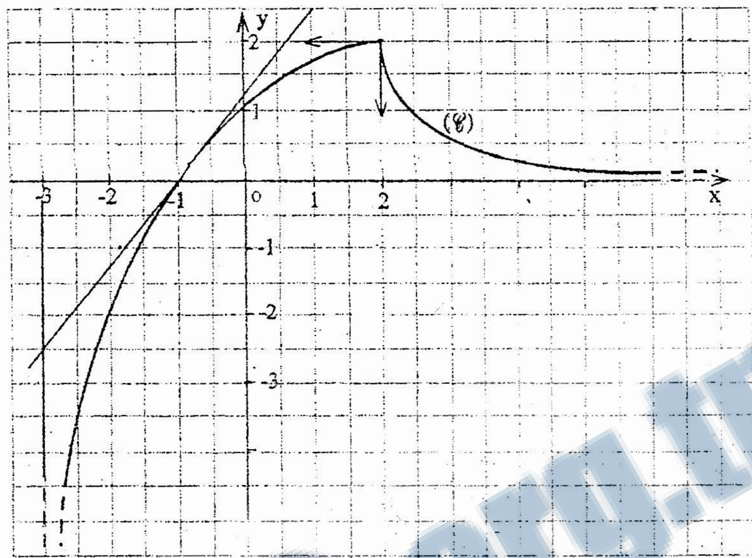
4°) $T : y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$T : y = 0,5(x-2) + 2$

Lycée 9 Avril 1938 Sfax	Devoir de synthese n° 1	Classes 4ème Sciences Techniques
**********************	Mathématiques	2011/2012 07/12/2011
Durée : 2h		

35_8

Exercice 1 (4 points)



On donne ci- contre la courbe ($\mathscr{C}$) d'une fonction f définie et continue sur $]-3,+\infty[$. La courbe $\mathscr{C}$ présente deux asymptotes d'équations respectives $x=-3$ et y = 0. Par une lecture graphique répondre aux questions suivantes

1. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $f(-1)$ et $f'(-1)$ puis déterminer une équation de la tangente (T) à ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse – 1

   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-2}{x-2}$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-2}{x-2}$.

   c) Dresser le tableau de variation de f.

2. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-3,2]$.

   a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on précisera son ensemble de définition.

   b) Dresser le tableau de variation de g^{-1}.

   c) Construire sur l'Annexe (1) la courbe représentative $(\mathscr{C}')$ de g^{-1} .

Exercice 2 (6 points)

1. a) Vérifier que $(1+3i)^2=-8+6i$.

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+(1-i)z+2(1-i)=0$.

2. On pose pour tout nombre complexe z $P(z)=z^3+(5-i)z^2+6(1-i)z+8(1-i)$.

   a) Vérifier que (-4) est une solution de l'équation P(z) = 0.

   b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que pour tout nombre complexe z on a : P(z) = (z + 4)(z² + az + b).

   c) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation P(z) = 0. Ecrire les solutions sous forme exponentielle.

3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A ; B ; C et D d'affixes respectives $2i$; $-1-i$; -4 et α , $(\alpha\in\mathbb{C})$.

   a) Montrer que ABC est un triangle isocèle et rectangle.

   b) Déterminer α pour que $ABCD$ soit un carré.

1

Exercice 3 (4 points) 36

Soit θ un réel de l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout nombre complexe z

$f(z)=z^2-(1+\cos\theta)z-i\sin\theta(1+e^{i\theta})$.

1. a) Vérifier que $f(-i\sin\theta)=0$.
   b) En déduire l'autre solution z_2 de l'équation $f(z)=0$.
   c) Ecrire sous forme exponentielle les solutions z_1 et z_2.
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points M et A d'affixes respectives $z_1=-i\sin\theta$ et $z_A=1-\frac{1}{2}i$.
   a) Déterminer l'ensemble E des points M lorsque θ varie dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.
   b) Calculer AM en fonction de θ.
   c) Déterminer la valeur de θ pour laquelle la distance AM est minimale.

Exercice 4 (points)

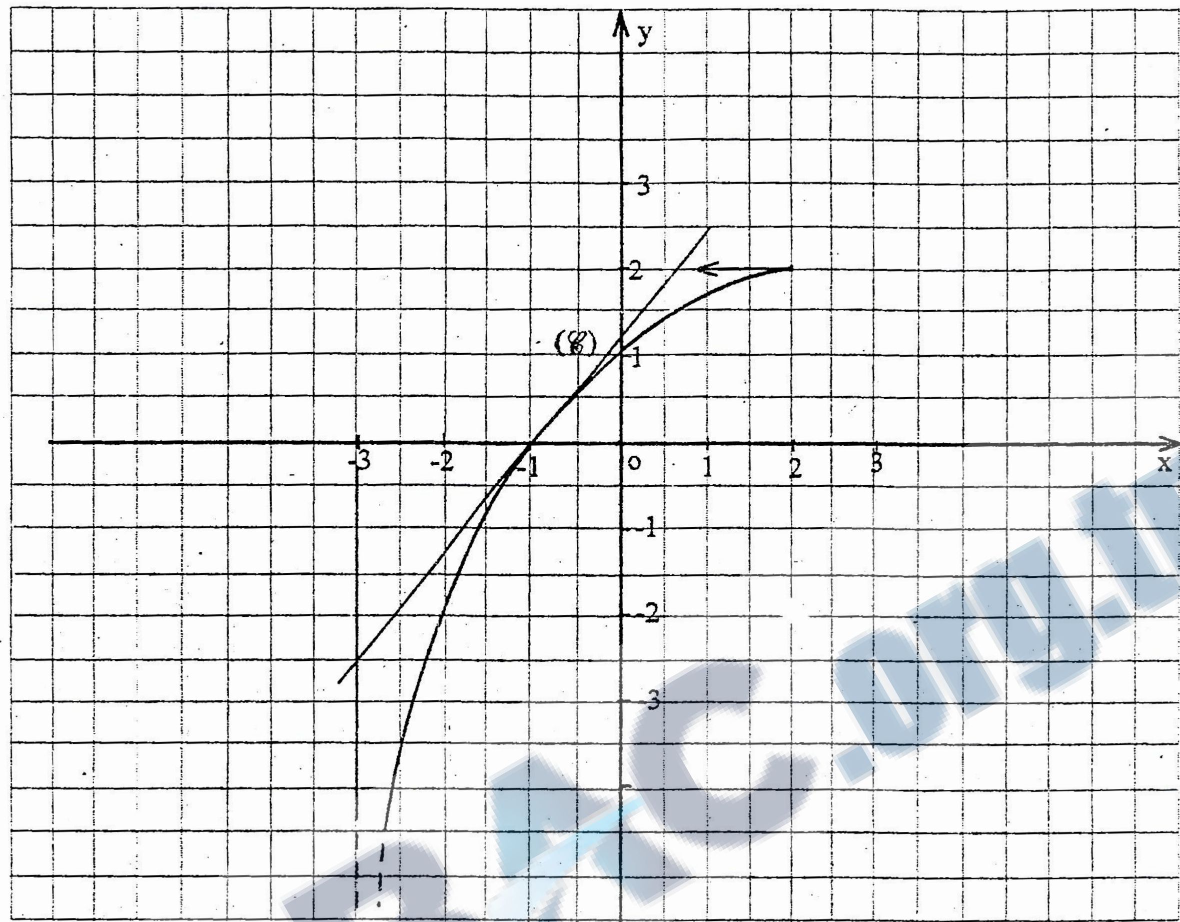
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1$. On désigne par ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f relativement à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Montrer que pour tout réel x $f'(x)=\frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}$
   c) Dresser le tableau de variation de f.
2. a) Montrer que la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,2[$. On note par f^{-1} la fonction réciproque de f.
   b) Etudier la continuité et le sens de variation de f^{-1} sur $]0,2[$.
3. Pour tout $x\in]0,2[$ On pose $g(x)=\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}$ et la fonction $h=fog$.
   a) Montrer que g est dérivable sur $]0,2[$ et calculer g'(x) et dresser le tableau de variation deg .
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to2^-} h(x)$.
   c) Montrer que h est dérivable sur $]0,2[$ et calculer h'(x).
4. Calculer $fog(x)$ pour tout x$\in]0,2[$. Déduire l'expression de $f^{-1}(x)$.

ANNEXE (1)

37

Nom et prénom..Classe..........................



Corrigé du devoir de synthèse 1
4e tech – 4e sc exp. (2011 – 2012)

38

Exercice 1.

1) a) $\lim\limits_{(-3)^+} f = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = 0$; $f(-1) = 0$

$f'(-1) = \dfrac{-\frac{5}{2} - 0}{-3+1} = \dfrac{5}{4}$ car la tangente passe par les points $M(-3, -\frac{5}{2})$ et $M'(-1, 0)$

$y = \frac{5}{4}(x+1)$ est une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse (-1)

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = 0$; $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-2}{x-2} = -\infty$

c)

x	-3		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

2) a) g est continue et strictement croissante sur $]-3, 2]$ donc g réalise une bijection de $]-3, 2]$ sur $g(]-3,2]) = f(]-3,2]) =]-\infty, 2[$ donc g admet une réciproque g^{-1}

b)

x	$-\infty$		2
$g^{-1}(x)$	-3	$\nearrow$	2

$\mathcal{C}_{g^{-1}} = S_\Delta(\mathcal{C}_g)$ où $\Delta : y = x$ qui passe par $O(0,0)$ et $A(1,1)$ (Voir annexe)

Ex 2 :

1) a) $(1+3i)^2 = 1 - 9 + 6i = -8+6i$ soit $\delta = 1+3i$ une racine carrée de Δ

b) $\Delta = (1-i)^2 - 8(1-i) = -2i - 8 + 8i = -8+6i = (1+3i)^2$. ainsi $z' = \dfrac{-1+i-1-3i}{2} = -1-i$; $z'' = \dfrac{-1+i+1+3i}{2} = 2i$; $S_{\mathbb{C}} = \{-1-i, 2i\}$

2) $P(-4) = (-4)^3 + (5-i)(-4)^2 + 6(1-i)(-4) + 8(1-i) = -64 + 80 - 16i - 24 + 24i + 8 - 8i$

$= (80 - 64 - 24 + 8) + i(-16 - 8 + 24) = 0$. ainsi (-4) est une solution de : $P(z) = 0$

b) $\forall z \in \mathbb{C}$ $P(z) = (z+4)(z^2+az+b) = (z^3 + az^2 + bz + 4z^2 + 4az + 4b)$
$= z^3 + z^2(a+4) + z(b+4a) + 4b$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+4 = 5-i \\ b+4a = 6-6i \\ 4b = 8(1-i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1-i \\ 2(1-i)+4(1-i) = 6-6i \text{ vrai} \\ b = 2(1-i) \end{cases}$

ainsi $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z+4)(z^2 + (1-i)z + 2(1-i))$

c) $P(z) = 0 \Leftrightarrow z+4 = 0$ ou $z^2 + (1-i)z + 2(1-i) = 0 \Leftrightarrow z = -4$ ou $z = 2i$ ou $z = -1-i$

$S_{\mathbb{C}} = \{-4, 2i, -1-i\}$

$-4 = 4e^{\dots}$;

$\begin{cases} |-1-i| = \sqrt{2} \\ \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \alpha = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$ $\qquad -1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

ou encore $-1-i = -(1+i) = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi)} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

3)a) $\dfrac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = \dfrac{-1-i-2i}{-1-i+4} = \dfrac{-1-3i}{3-i} = \dfrac{i^2-3i}{3-i} = \dfrac{i(i-3)}{3-i} = -i$ est un imaginaire pur de module 1 donc $\dfrac{|z_B - z_A|}{|z_B - z_C|} = \dfrac{AB}{BC} = 1$ et $(AB)\perp(BC)$.

Concl. ABC est un triangle rectangle en B.

b) Comme ABC est un triangle rectangle et isocèle en B alors ABCD est un carré ssi $\vec{AB} = \vec{DC}$ ssi $z_C - z_D = z_B - z_A \iff \alpha = z_D = z_A + z_C - z_B = 2i + 1 + i - 4 = -3+3i$

$\boxed{\alpha = -3+3i = z_D}$

Exercice 3 :

1)a) $f(-i\sin\theta) = (-i\sin\theta)^2 + i\sin\theta - i\sin\theta\cos\theta - i\sin\theta(1+e^{i\theta})$

$= -i\sin\theta\,[-i\sin\theta + 1 - \cos\theta - 1 + e^{i\theta}] = -i\sin\theta\,[\underbrace{-\cos\theta - i\sin\theta}_{-e^{i\theta}} + e^{i\theta}] = 0$

donc $-i\sin\theta$ est une solution de l'équation $f(z) = 0$

b) $z' = -i\sin\theta$, $z' \times z'' = \frac{c}{a} = -i\sin\theta(1+e^{i\theta}) \iff (-i\sin\theta)z'' = -i\sin\theta(1+e^{i\theta})$

$\Rightarrow z'' = 1+e^{i\theta}$ (on peut utiliser la somme $z'+z'' = -\frac{b}{a}$)

c) $z' = -i\sin\theta$ et $\theta \in]0,\frac{\pi}{2}[$ donc $\sin\theta > 0$ d'où $z' = \sin\theta\, e^{-i\frac{\pi}{2}}$ (F. Expo)

$z'' = 1+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$ or $\cos\frac{\theta}{2} > 0\ \forall\theta \in]0,\frac{\pi}{2}[$

donc $z'' = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$ (F. Expo)

2)a) M d'affixe $\begin{cases} z' = -i\sin\theta \\ \theta \in]0,\frac{\pi}{2}[\end{cases} \iff \begin{cases} M(0; -\sin\theta) \\ \theta \in]0,\frac{\pi}{2}[\end{cases} \iff \begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = -\sin\theta \in]-1, 0[\end{cases}$

M décrit le segment $[OB] - \{O, B\}$ où $O(0,0)$ et $B(0;-1)$.

b) on peut utiliser deux méthodes pour déterminer la valeur de θ pour laquelle AM est minimale. 1ère méthode : on a $AM = |z_M - z_A| = \sqrt{1+(\frac{1}{2}-\sin\theta)^2}$ et on pose $f(\theta) = \sqrt{1+(\frac{1}{2}-\sin\theta)^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - \sin\theta + \sin^2\theta}$. On dresse le tableau de variation de f sur $]0;\frac{\pi}{2}[$.

$f'(\theta) = \dfrac{-\cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{2\sqrt{\frac{5}{4} - \sin\theta + \sin^2\theta}} = \dfrac{\cos\theta(2\sin\theta - 1)}{2\sqrt{\frac{5}{4} - \sin\theta + \sin^2\theta}}$

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$	$\sqrt{\frac{5}{4}}$	↘	1	↗	$\sqrt{\frac{5}{4}}$

…/…

$AM = \sqrt{1+(\frac{1}{2}-\sin\theta)^2}$ $= |z_M - z_A| = |\ldots|$

40

$AM = \sqrt{\frac{5}{4}-\sin\theta+\sin^2\theta}$

c) $AM \geq 1$ donc AM est minimale si $AM = 1 \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

Exercice 4 ;

1) a) $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}+1\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}+1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}+1\right) = 0$

$\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}+1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}+1\right) = 2.$

b) $f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2)} = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}$

c) $f'(x)>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	2

2) a) f est continue et strictement croissante sur IR donc f réalise une bijection de IR sur $f(\mathbb{R}) =]0;2[$

b) f^{-1} est continue et strictement croissante sur]0; 2[. En effet f^{-1} a le même sens de variation que celui de f, chacune sur son domaine.

3) $g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}$

$x \longmapsto 2x-x^2$ est dérivable et strict positive sur]0, 2[donc $x \overset{u}{\longmapsto} \sqrt{2x-x^2}$ est dérivable sur]0, 2[, $x \overset{v}{\longmapsto} x-1$ est dérivable sur]0, 2[et donc g est dérivable sur]0, 2[comme quotient $\frac{v}{u}$ de deux fonctions dérivables sur]0, 2[et $u(x) \neq 0$

et $\forall x \in]0,2[$ $g'(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2} - (x-1)\frac{(2-2x)}{2\sqrt{2x-x^2}}}{(2x-x^2)} = \frac{2x-x^2+(x-1)^2}{(\sqrt{2x-x^2})^3}$

$= \frac{1}{(\sqrt{2x-x^2})^3}$

x	0		2
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{0^+} g = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} = -\infty$ ($x-1 \to -1$, $\sqrt{2x-x^2} \to 0^+$)

$\lim\limits_{2^-} g = \lim\limits_{x\to2^-}\frac{(x-1)}{\sqrt{2x-x^2}} = +\infty$ ($x-1 \to 1$, $\sqrt{2x-x^2} \to 0^+$)

b) $\lim\limits_{0^+} h = \lim\limits_{x\to0^+} f\circ g(x) = 0^+$ car $\begin{cases}\lim\limits_{0^+} g = -\infty \text{ et} \\ \lim\limits_{-\infty} f = 0\end{cases}$

$\lim\limits_{2^-} h = \lim\limits_{x\to2^-} f\circ g(x) = 2$ car $\begin{cases}\lim\limits_{2^-} g = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} f = 2\end{cases}$

c) g est dérivable sur $]0,2[$, $g(]0,2[)=\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $h=f\circ g$ est dérivable sur $]0,2[$ (4/1) ③

$h'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$, on calcule d'abord $f'(g(x))$.

$$f'(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+(g(x))^2}^{\,3}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(x-1)^2}{2x-x^2}}^{\,3}} = \frac{\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^3}{\sqrt{2x-x^2+x^2-2x+1}^{\,3}} = \sqrt{2x-x^2}^{\,3}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}^{\,3}} \text{ d'où } g'(x)\times f'(g(x)) = h'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}^{\,3}} \times \sqrt{2x-x^2}^{\,3} = 1.$$

4) $$f\circ g(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)}{\sqrt{1+(g(x))^2}} + 1 = \frac{\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{(x-1)^2}{2x-x^2}}} + 1 = \frac{\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}} + 1 = x$$

$\forall x \in]0,2[$.

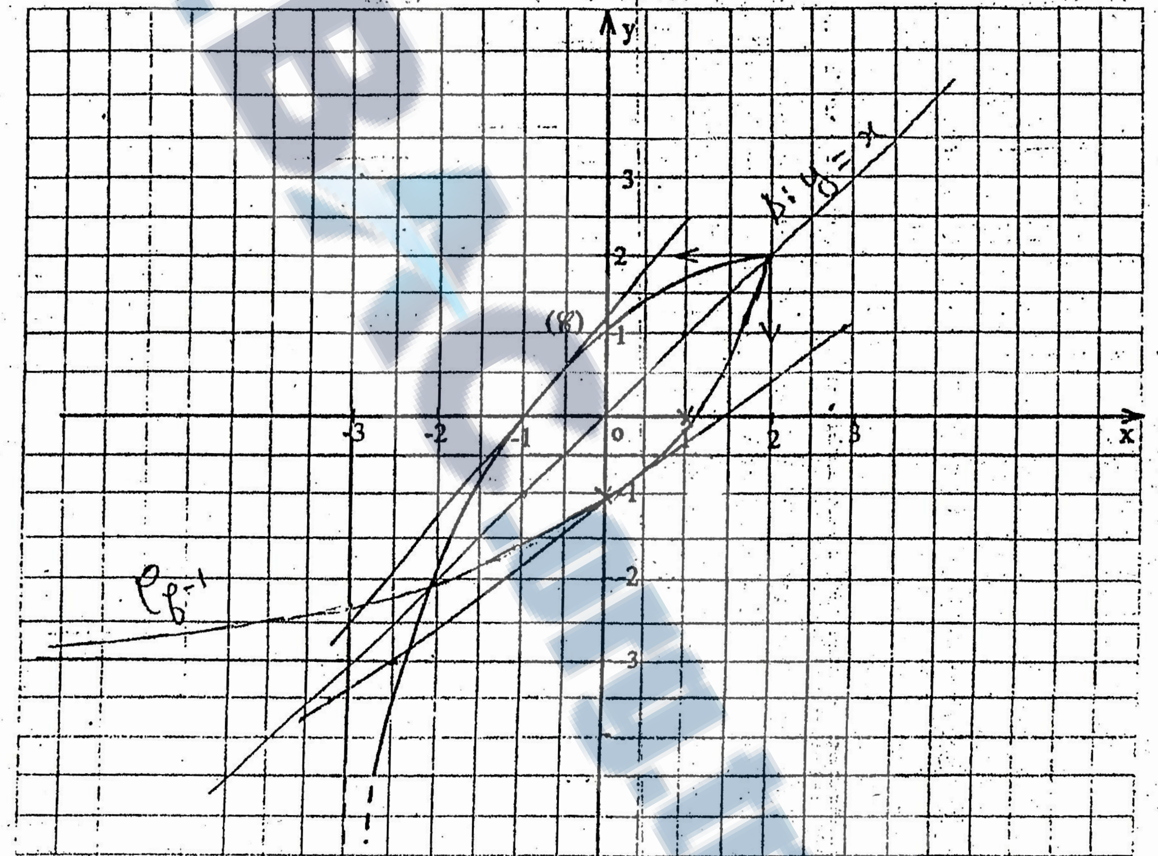
$f\circ g(x) = x = f\circ f^{-1}(x)$ $\forall x \in]0,2[$ $\Rightarrow g(x) = f^{-1}(x)$.

(4)

ANNEXE (1)

42

Nom et prénom...Classe.............................

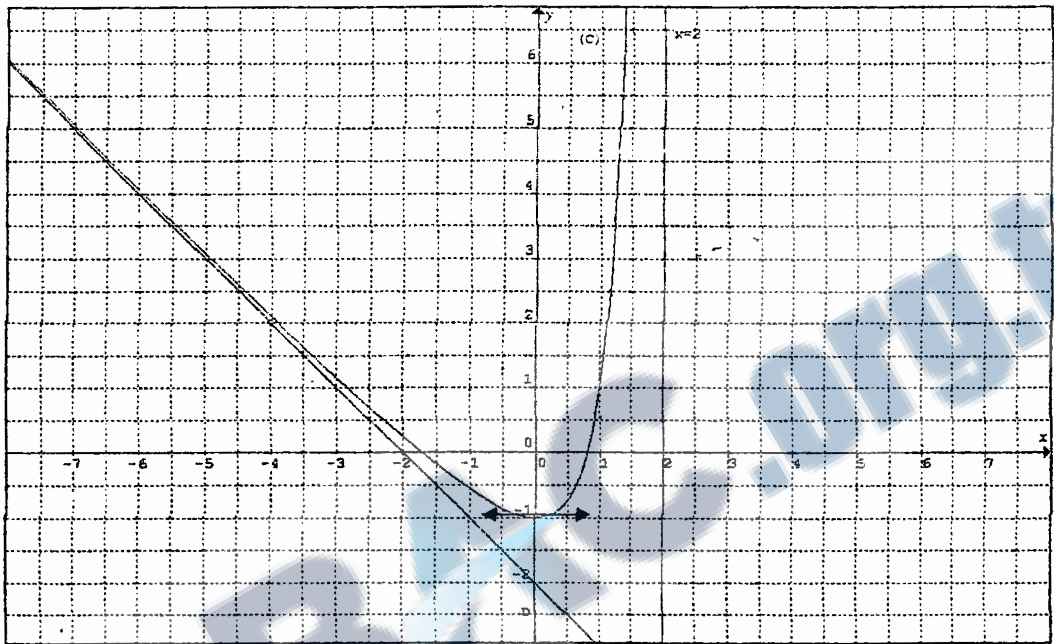


Lycée Habib Thameur. Sfax	A.S :2014/2015 - Durée : 2h
Prof : Elloumi Abdallah	Classe : $4^{ème}$SC 3
Devoir de contrôle N°2	

3165

EXERCICE N°1 (4 points)

La courbe (C) ci-dessous est la représentation graphique d'une primitive F d'une fonction f définie , continue et dérivable sur $]-\infty\ ,\ 2[$. La droite $\Delta: x = 2$ est une asymptote verticale à (C) et la droite $D: y = -x - 2$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.



1)Déterminer :

a) $\lim_{x\to 2^-} F(x)$; $\lim_{x\to -\infty} F(x)$; $\lim_{x\to -\infty} \frac{F(x)}{x}$ et $\lim_{x\to -\infty}(F(x)+x)$

b) $F(0)$ et $f(0)$.

2)Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout $x \in]-\infty\ ,\ 2[$.

3)On admet que $f(x) = -1 - \frac{8}{(x-2)^3}$. Déterminer $F(x)$.

4)Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

EXERCICE N°2 (6points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-1,1,1)$, $B(1,-1,0)$, $C(1,0,1)$et $D(3,3,-1)$

1)a) Calculer les composantes du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points A , B et C ne sont pas alignés.

c) Calculer l'aire du triangle ABC.

2)a)Montrer que les points A , B , C et D sont les sommets d'un tétraèdre. det

b)On note v le volume du tétraèdre $ABCD$. Montrer que $v = 2$.

c)En déduire la distance du point D au plan (ABC).

317

3)On donne le point $H(3,-2,0)$.

a)Montrer que $ABHC$ est un parallélogramme.

b)Calculer le volume de la pyramide $DABHC$.

EXERCICE N°3 (4 points)

Soit la fonction f définie sur $[1,+\infty[$par $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

1)Montrer que f admet des primitives sur$[1,+\infty[$.

2)Soit F la primitive de [redacted] s[redacted] qui s'annule [redacted] $F(1)=0$

Soit G la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $G(x)=F\left(\frac{1}{\cos x}\right)$.

a)Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et que $G'(x)=\tan^2 x$.

b)En déduire que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $G(x)=\tan x-x$.

3) a)Calculer $F(2)$ et $F(\sqrt{2})$

b)Déduire la valeur de l'intégrale $I=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$.

EXERCICE N°4 6 points)

Soit la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)Calculer $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) a)Montrer que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et que pour tout $x\in]-1,+\infty[$ on a : $f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{x+1}^3}$.

b)Dresser le tableau de variation de f .

3) a)Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $]-1,+\infty[$ une unique solution α et que $\alpha\in]1,2[$.

4)b)Montrer que f réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera .

On note f^{-1} la fonction réciproque de f et on désigne par $(C_{f^{-1}})$ sa courbe représentative dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

c)Montrer que f^{-1} est dérivable en 2 et calculer $(f^{-1})'(2)$.

d)Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $\in I$.

4)Construire (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.

5)Calculer ,en u.a , l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), $(C_{f^{-1}})$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. en fonction de α

318

Lycée Habib Thameur Sfax ... $4^{\text{ème}}$ sc.exp

Devoir de contrôle N°2

Exercice N°1

1) a) $\lim\limits_{x\to 2^-} F(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} F(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{F(x)}{x} = -1$; $\lim\limits_{x\to -\infty} F(x)+x = -2$

b) $F(0) = -1$; $f(0) = 0$

2) on a : $f(x) = F'(x)$; $x \in]-\infty, 2[$

x	$-\infty$		0		2
$f(x)$		$-$	0	$+$	

3) $f(x) = F'(x) = -1 - \frac{8}{(x-2)^3}$ donc $F(x) = -x + \frac{4}{(x-2)^2} + k$; $x \in]-\infty, 2[$

$F(0) = -1 \iff k = -2$ d'où $F(x) = -x - 2 + \frac{4}{(x-2)^2}$; $x \in]-\infty, 2[$

4) $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)\,dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = 1 + 1 = 2$ unités d'aire

Exercice N°2

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 2\\ -2 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$

b) $\vec{u} \neq \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires d'où A, B et C ne sont pas alignés

c) $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\|\vec{u}\| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+2^2+2^2} = \frac{3}{2}$

2) a) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}$; $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix}2 & 2 & 4\\ -2 & -1 & 2\\ -1 & 0 & -2\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & -2\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -1 & -2\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}$

$= 2\times 2 - 2\times 6 + 4\times(-1) = -12 \neq 0$ donc A, B, C et D ne sont pas coplanaires d'où ils sont les sommets d'un tétraèdre.

b) $\mathcal{V} = \frac{1}{6}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \frac{|-12|}{6} = 2$

c) $\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_{ABC}\times d(D;(ABC))}{3} = 2$ donc $d(D,(ABC)) = \frac{6}{\frac{3}{2}} = \frac{12}{3} = 4$

3) a) $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$ donc ABHC est un parallélogramme

b)

$\mathcal{A}_{ABHC} = \|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\| = \|\vec{u}\| = 3$ donc $\mathcal{V}_{DABHC} = \frac{\mathcal{A}_{ABHC}\times d(D;(ABC))}{3} = \frac{3\times 4}{3} = 4$

Exercice N°3

1) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$; $x\in[1,+\infty[$. f est continue sur $[1,+\infty[$ donc f admet des primitives sur $[1,+\infty[$

2) a) F est une primitive de f avec $F(1)=0$ donc F est dérivable sur $[1,+\infty[$

la fonction $\varphi : x\mapsto \frac{1}{\cos x}$; $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$ est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ de plus $\frac{1}{\cos x}\geq 1$ pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$ donc $G=F\circ\varphi$ est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$

et on a : $G'(x)=F'(\varphi(x))\times\varphi'(x)=f(\varphi(x))\times\varphi'(x)=\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2-1}}{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}\times\frac{\sin x}{\cos^2 x}$

$=\left|\frac{\sin x}{\cos x}\right|\times\cos x\times\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\tan^2 x$; $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$

b) $G'(x)=(1+\tan^2 x)-1$; $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$ donc $G(x)=\tan x-x+k$

or $G(0)=F(1)=0$ donc $k=0$ d'où $G(x)=\tan x-x$; $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$

3) a) $F(2)=F\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}\right)=G\left(\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

$F(\sqrt{2})=F\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}\right)=G\left(\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$

b) $I=\int_{\sqrt{2}}^{2}f(t)\,dt=\left[F(t)\right]_{\sqrt{2}}^{2}=F(2)-F(\sqrt{2})=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}-1+\frac{\pi}{4}$

$I=\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$

Exercice N°4

1) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}=1$ donc $\Delta : x=-1$

et $\Delta' : y=1$ sont deux asymptotes à $\mathscr{C}_f$.

2) a) $x\mapsto\sqrt{x+1}$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ donc f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ (car $\sqrt{x+1}\neq 0$) et $f'(x)=\left(-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)\times\frac{1}{\sqrt{x+1}^2}=\frac{-1}{2\sqrt{x+1}^3}$

b)

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	$+\infty$	1

3) a) soit $g(x)=f(x)-x$; $x\in]-1,+\infty[$; $g'(x)=f'(x)-1<0$; $x\in]-1,+\infty[$

g est continue et strictement décroissante sur $]-1,+\infty[$ donc g réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur $]-\infty,+\infty[$. $0\in]-\infty,+\infty[$ donc l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α

$g(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $g(2)=\frac{1}{\sqrt{3}}-1$; $g(1)\times g(2)<0$ donc $\alpha\in]1,2[$

D'où l'équation $f(x)=x$ admet dans $]-1,+\infty[$ une unique solution α et $\alpha\in]1,2[$

b) f est continue et strictement décroissante sur $]-1,+\infty[$ donc f réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur $]1,+\infty[$

c) f est dérivable en 0 et $f'(0)=-\frac{1}{2}\neq 0$; $f(0)=2$ donc f^{-1} est dérivable en 2 et $(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(f^{-1}(2))}=\frac{1}{f'(0)}=-2$

319

d) $f^{-1}(x)=y$; $x\in]1,+\infty[$; $y\in]-1,+\infty[$

$\Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{y+1}}=x \Leftrightarrow x-1=\frac{1}{\sqrt{y+1}}\Leftrightarrow y+1=\frac{1}{(x-1)^2}\Leftrightarrow y=\frac{1}{(x-1)^2}-1$

$f^{-1}(x)=\frac{-x^2+2x}{(x-1)^2}$

4) $\mathscr{C}_{f^{-1}}=S_{\Delta_1}(\mathscr{C}_f)$; $\Delta_1 : y=x$

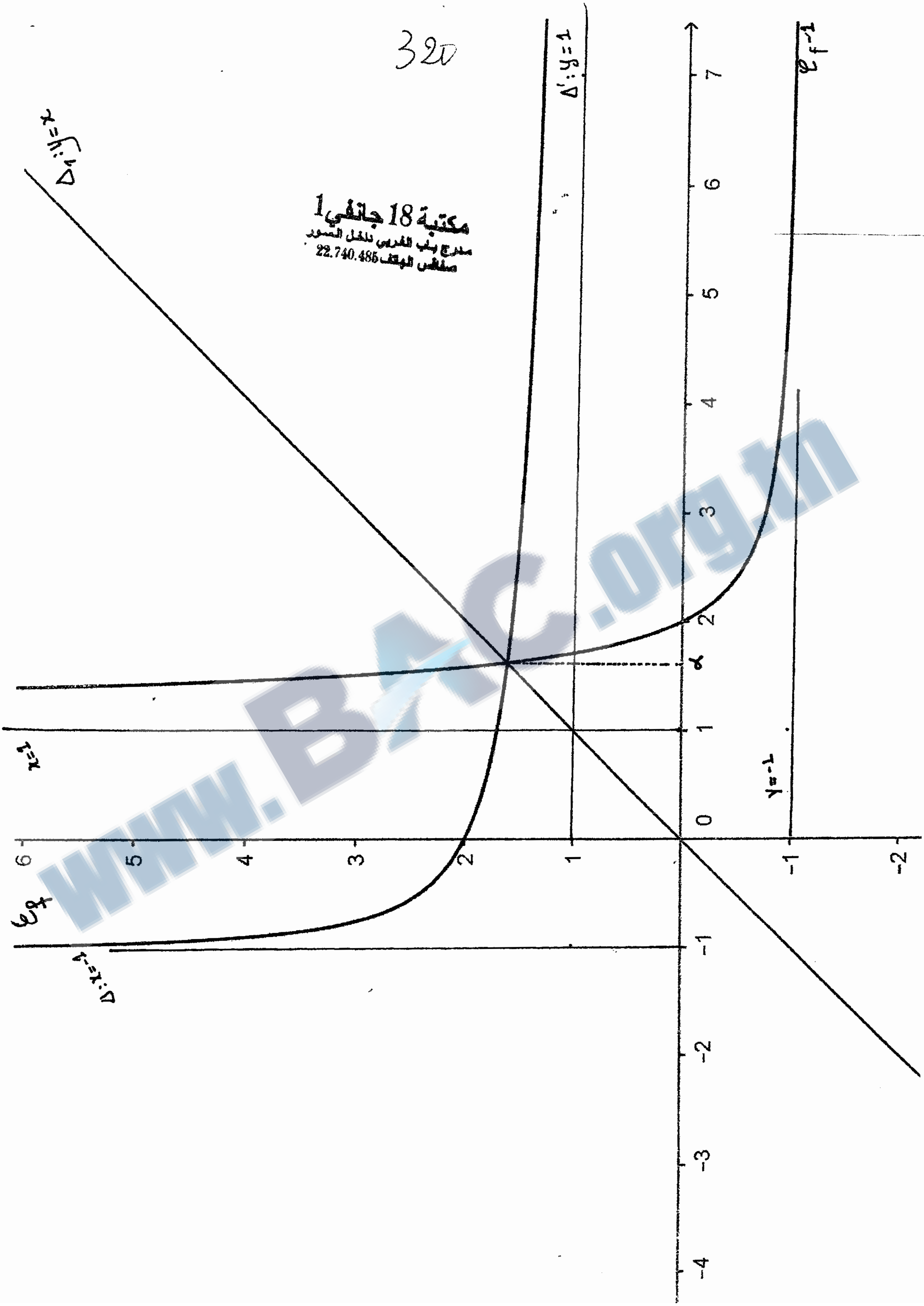
5) on a : $f(\alpha)=\alpha$ donc $1+\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}}=\alpha$ d'où $\sqrt{\alpha+1}=\frac{1}{\alpha-1}$

Par raison de symétrie $\mathcal{A}=2\times\int_0^{\alpha}1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}-x\,dx$

$\mathcal{A}=2\left[x+2\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\alpha}=2\left[\alpha+2\sqrt{\alpha+1}-\frac{1}{2}\alpha^2-2\right]=2\left[\alpha+\frac{2}{\alpha-1}-\frac{1}{2}\alpha^2-2\right]$

$\mathcal{A}=2\times\left[\frac{2\alpha(\alpha-1)+2-\alpha^2(\alpha-1)-4(\alpha-1)}{2(\alpha-1)}\right]=\frac{-\alpha^3+3\alpha^2-6\alpha+6}{(\alpha-1)}=-\alpha^2+2\alpha+\frac{4}{\alpha-1}-4$

u.a


320
$\Delta_1 : y = x$
$\Delta' : y = 1$
$\mathcal{C}_{f^{-1}}$
$\mathcal{C}_f$
$x = 1$
$y = -1$
$\Delta : x = -1$
α
مكتبة 18 جانفي 1
22.740.485

Lycée Pilote Sfax Le 13 -02- 2013	Devoir de contrôle N°2 Durée : 2 heures	Classes : 4ème Sc$_{1+2+3}$ Mme : Fakhfakh Mrs : Smaoui et Boukhris

Exercice 1 (7pts)

20
7

L'annexe représente un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On désigne par $A(2,0,0)$, $B(1,2,0)$, $C(0,3,0)$, $S(0,0,2)$, $E(3,0,0)$ et $F(0,4,0)$.

1.a. Placer ces points dans l'annexe ci- jointe.

b. Calculer les volumes des tétraèdres SOAB et SOBC.

c. En déduire le volume de la pyramide SOABC.

2.a. Déterminer une équation cartésienne du plan (SEF).

b. Soit A' le point tel que $\overrightarrow{AA'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AS}$ et P le plan parallèle à (SEF) et passant par A'.

Montrer qu'une équation cartésienne de P est $4x+3y+6z-11=0$.

3. P coupe les arêtes $[SO]$, $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$ de la pyramide SOABC respectivement aux points O', A', B' et C'.

a. Déterminer les coordonnées de O'.

b. Vérifier que C' a pour coordonnées $\left(0, 1, \frac{4}{3}\right)$.

c. Déterminer les coordonnées de B'.

d. Vérifier que $O'A'B'C'$ est un parallélogramme et calculer son aire.

Exercice 2 (7pts)

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Etudier la position de C_f par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.
3. Tracer Δ et C_f.
4. Soit $I = \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{2x+1}}dx$.

a. Donner une interprétation graphique de I.

b. Calculer I.

5.a. Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b. Tracer dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $\mathscr{C}'$ de la fonction réciproque de f.

c. Déterminer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par C_f et $\mathscr{C}'$.

Exercice 3 (6pts)

21

Soit la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \tan x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $[0,1]$.

2. On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f.

   a. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0,1]$ et que pour tout $x \in [0,1]$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   b. Vérifier que $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

3. On considère la suite (J_n) définie par $J_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}dt$ et $J_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt$, $n \geq 1$.

   a. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq \frac{t^{2n}}{1+t^2} \leq t^{2n}$.

   b. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq J_n \leq \frac{1}{1+2n}$.

   c. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$.

4. On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+2k} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots + \frac{(-1)^n}{1+2n}$.

   a. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $J_{n+1} + J_n = \frac{1}{1+2n}$.

   b. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $J_{n+1} = (-1)^n (U_n - J_0)$.

   c. En déduire la limite de (U_n).

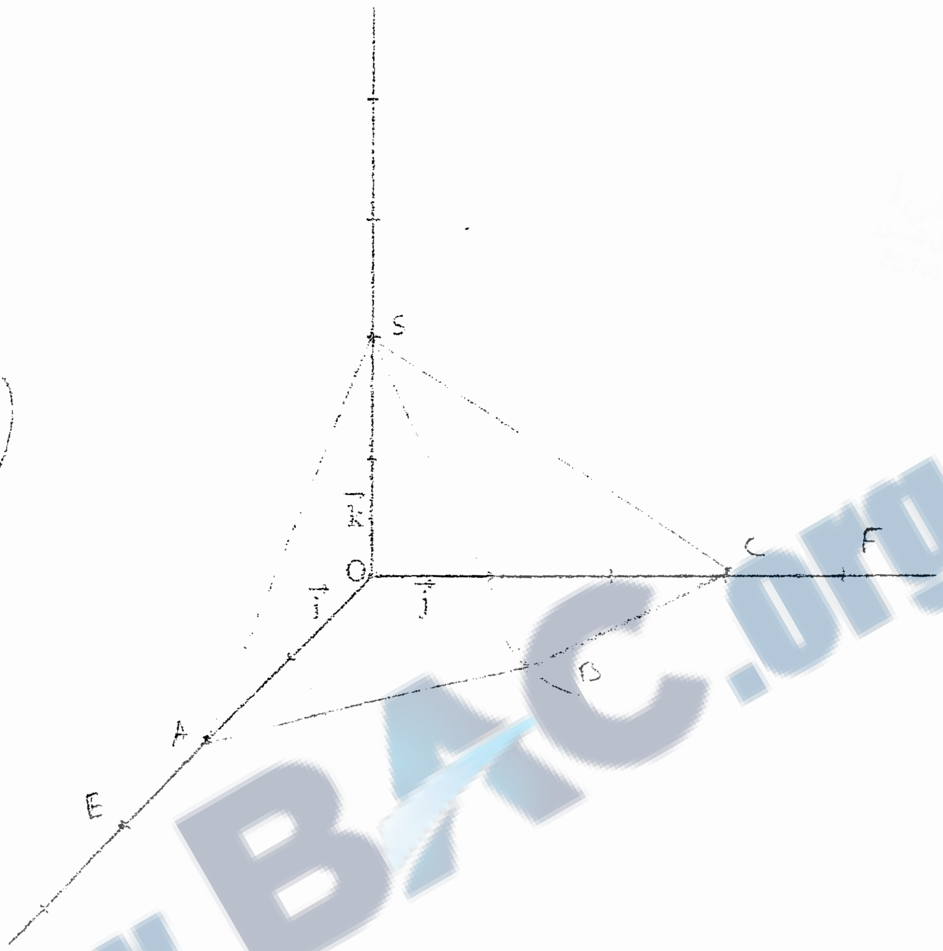
Annexe

22 + 23

Nom et prénom :

Classe : 4S3

1

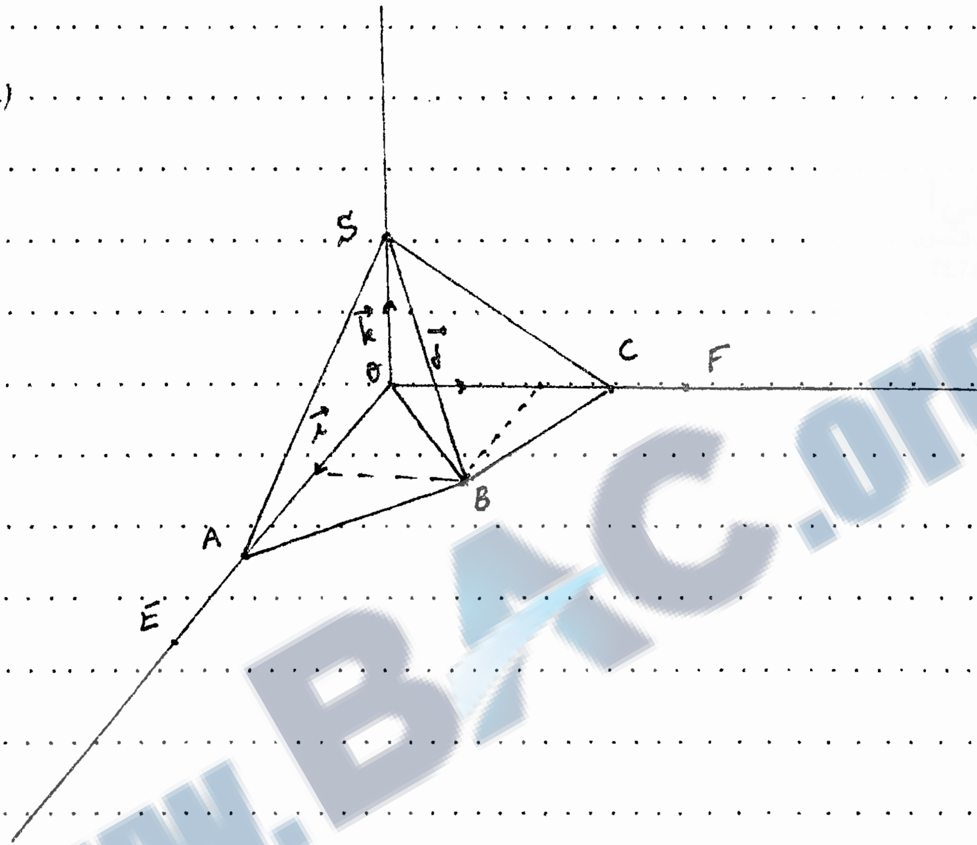


Lycée Pilote Sfax 24 4ème SC.exp

Devoir de contrôle n°2

Exercice 1

1). a)



b) $\vec{OA}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$; $\vec{OB}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$; $\vec{OS}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$; $\vec{OC}\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$

$$\mathcal{V}_1=\mathcal{V}(SOAB)=\frac{1}{6}\left|\det(\vec{OA},\vec{OB},\vec{OS})\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\left|2\times\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\times 8=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

$$\mathcal{V}_2=\mathcal{V}(SOBC)=\frac{1}{6}\left|\det(\vec{OB},\vec{OC},\vec{OS})\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}1&0&0\\2&3&0\\0&0&2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\times\left|2\times\begin{vmatrix}1&0\\2&3\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\times 6=1$$

c) $\mathcal{V}_3=\mathcal{V}(SOABC)=\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2=\frac{4}{3}+1=\frac{7}{3}$

2) a)

$$\vec{SE}\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}\wedge\vec{SF}\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}=\vec{N}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&4\\-2&-2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-2&-2\\3&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3&0\\0&4\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\vec{N}\begin{pmatrix}8\\6\\12\end{pmatrix}\neq\vec{0}$$ donc

25

$\vec{N}' = \frac{1}{2}\vec{N} = \begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan $(SEF): ax+by+cz+d=0$.

Soit $(SEF): 4x+3y+6z+d=0$; $S(0;0;2) \in (SEF)$ donc $4\times0+3\times0+6\times2+d=0$ d'où $d=-12$ ...... $(SEF): 4x+3y+6z-12=0$

b) $\vec{AA'} = \frac{3}{4}\vec{AS}$ donc $\begin{cases} x_{A'}-2 = \frac{3}{4}\times(0-2) = -\frac{3}{2} \\ y_{A'}-0 = \frac{3}{4}(0-0) = 0 \\ z_{A'}-0 = \frac{3}{4}(2-0) = \frac{3}{2} \end{cases}$

d'où $\begin{cases} x_{A'} = \frac{1}{2} \\ y_{A'} = 0 \\ z_{A'} = \frac{3}{2} \end{cases}$ soit $A'\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{3}{2}\right)$.

$P // (SEF)$ donc $\vec{N}'\begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan $P: ax+by+cz+d=0$

Soit $P: 4x+3y+6z+d=0$; $A'\left(\frac{1}{2};0;\frac{3}{2}\right) \in P$ donc $4\times\frac{1}{2}+3\times0+6\times\frac{3}{2}+d=0$ d'où $d=-11$ ... $P: 4x+3y+6z-11=0$.

3) a) $P \cap [SO] = \{O'\}$; $\vec{OO'}$ et $\vec{OS}$ sont colinéaires donc il existe $k \in \mathbb{R}$ telque $\vec{OO'} = k\vec{OS}$ donc $x_{O'} = k\times0 = 0$

$y_{O'} = k\times0 = 0$ et $z_{O'} = k\times(2-0) = 2k$; $O'(0;0;2k)$

$O'(0;0;2k) \in P$ donc $4\times0+3\times0+6\times2k-11=0$ soit $k=\frac{11}{12}$

d'où $O'\left(0;0;\frac{11}{6}\right)$

b) $P \cap [SC] = \{C'\}$; $\vec{SC'}$ et $\vec{SC}$ sont colinéaires donc il existe $k \in \mathbb{R}$ telque $\vec{SC'} = k\vec{SC}$ donc $x_{C'}-0 = k(0-0) = 0$

$y_{C'}-0 = k(3-0) = 3k$ et $z_{C'}-2 = k(0-2) = -2k$

$C'(0;3k;2-2k) \in P$ donc $4\times0+3\times3k+6\times(2-2k)-11=0$.

d'où $k=\frac{1}{3}$ et par suite $C'\left(0;1;\frac{4}{3}\right)$

c) $P \cap [SB] = \{B'\}$; $\vec{SB'}$ et $\vec{SB}$ sont colinéaires donc il existe $k \in \mathbb{R}$ telque $x_{B'}-0 = k(1-0) = k$; $y_{B'}-0 = k(2-0) = 2k$ et

$z_{B'}-2 = k(0-2) = -2k$; ... $B'(k; 2k; 2-2k) \in P$

26

donc $4k+3\times2k+6(2-2k)-11=0$ d'où $k=\frac{1}{2}$ et par suite $B'\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$

d) $\vec{O'A'}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$; $\vec{C'B'}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ donc $\vec{O'A'} = \vec{C'B'}$ d'où $O'A'B'C'$ est un parallélogramme.

$\vec{O'A'}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix} \wedge \vec{O'C'}\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix}0 & 1\\-\frac{1}{3} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 0\\-\frac{1}{3} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$S(O'A'B'C') = \|\vec{O'A'} \wedge \vec{O'C'}\| = \|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{61}}{12}$

Exercice 2

1) $f(x) = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}$; $x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$f'(x) = \frac{1\times\sqrt{2x+1} - (x-1)\times\frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}^2} = \frac{2x+1-x+1}{\sqrt{2x+1}^3} = \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}^3} > 0$; $x \in \left]-\frac{1}{2}, \ldots\right.$

$\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^+} 1 + \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}} = +\infty$

x	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2) $f(x) - x = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}} - x = (x-1)\left[\frac{1}{\sqrt{2x+1}} - 1\right] = \frac{(x-1)(1-\sqrt{2x+1})}{\sqrt{2x+1}}$

Si $x \geq 0$ alors $2x+1 \geq 1$ donc $\sqrt{2x+1} \geq 1$

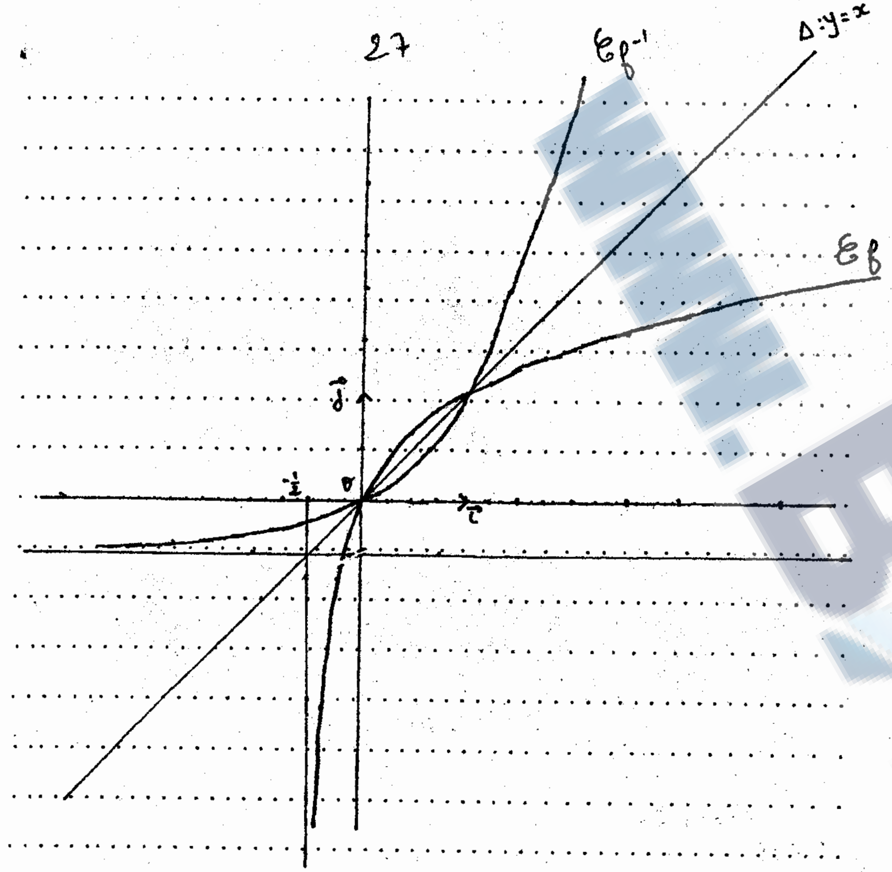
Si $-\frac{1}{2} < x \leq 0$ alors $0 < 2x+1 \leq 1$ donc $\sqrt{2x+1} \leq 1$

x	$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$(x-1)$		−		−	0	+	
$1-\sqrt{2x+1}$		+	0	−		−	
$f(x)-x$		−	0	+	0	−	

si $x \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right] \cup [1, +\infty[$; $\mathscr{C}_f$ au dess de

si $x \in [0, 1]$; $\mathscr{C}_f$ au dessus de $\Delta: y =$

27



4) a) $-I + 1 = \int_0^1 f(x)\,dx$. c'est l'aire de la partie du plan limité par $\mathscr{C}_f$, la droite $x = 0$ et $x = 1$ donc $I = 1 - \int_0^1 f(x)\,dx$ est l'aire de la partie du plan limité par $\mathscr{C}_f$, la droite $y = 0$ et $y = 1$.

b) $I = \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$: intégration par partie

$u = 1 - x$; $u' = -1$; $v' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$, $v = \sqrt{2x+1}$ $\Big\}$ $I = \left[(1-x)\sqrt{2x+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \sqrt{2x+1}\,dx$

$I = -1 + \left[\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}\right]_0^1 = -1 + \sqrt{3} - \frac{1}{3} = \sqrt{3} - \frac{4}{3}$

28

5) a) f est continue et strictement croissante sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ donc f réalise une bijection de $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ sur $J = f(]-\frac{1}{2}, +\infty[) = \mathbb{R}$

b) $\mathscr{C}' = S_\Delta(\mathscr{C})$

c) $\mathcal{A} = 1 - 2I = 1 - 2 \times (\sqrt{3} - \frac{4}{3}) = 1 - 2\sqrt{3} + \frac{8}{3} = \frac{11}{3} - 2\sqrt{3}$

Exercice 3

1) $f(x) = \tan x$; $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$; $f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$; $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$.
f est continue, strictement croissante sur $[0; \frac{\pi}{4}]$ donc f réalise une bijection de $[0; \frac{\pi}{4}]$ sur $f([0; \frac{\pi}{4}]) = [0; 1]$

2) a) $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ donc f^{-1} est dérivable sur $[0; 1]$ et pour tout $x \in [0, 1]$; $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(f^{-1}(x))}$

$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \tan y = x$ d'où $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

26

b) $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 (f^{-1})'(t)\,dt = \left[f^{-1}(t)\right]_0^1 = f^{-1}(1) - f^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

3) a) Pour tout $t \in [0, 1]$; $1 \leq 1 + t^2 \leq 2$ d'où $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$
Pour tout $n \geq 1$; $0 \leq t^{2n}$ donc $0 \leq \frac{t^{2n}}{1+t^2} \leq t^{2n}$

b) on a : pour tout $t \in [0, 1]$ et $n \geq 1$ $0 \leq \frac{t^{2n}}{1+t^2} \leq t^{2n}$
donc $\int_0^1 0\,dt \leq \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^1 t^{2n}\,dt = \left[\frac{1}{2n+1} t^{2n+1}\right]_0^1$
d'où $0 \leq J_n \leq \frac{1}{2n+1}$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n = 0$

4) a) $J_{n+1} + J_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt + \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{t^{2n}(t^2+1)}{t^2+1}\,dt = \int_0^1 t^{2n}\,dt = \frac{1}{1+2n}$

b) $J_1 + J_0 = \frac{1}{1+2\times 0} = 1$ d'où $J_1 = 1 - J_0 = (-1)^0(U_0 - J_0)$

suite d'ex n° 3

27

D'où la propriété P est vrai pour $n=0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que $J_{n+1} = (-1)^n (u_n - J_0)$

$J_{n+2} = \frac{1}{1+2(n+1)} - J_{n+1} = \frac{1}{2n+3} - (-1)^n (U_n - J_0) = (-1)^{n+1}(U_n - J_0) + \frac{1}{2n+3}$

$u_{n+1} = u_n + \frac{(-1)^{n+1}}{1+2n+2} = u_n + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$ d'où $J_{n+1} = (-1)^{n+1}(U_{n+1} - J_0)$

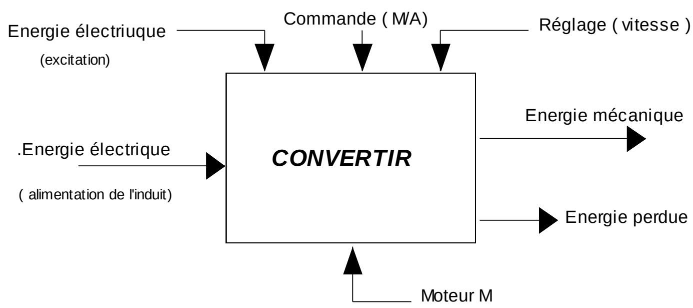
c) on a : $U_n = \frac{J_{n+1}}{(-1)^n} + J_0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{J_{n+1}}{(-1)^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = J_0 = \frac{\pi}{4}$

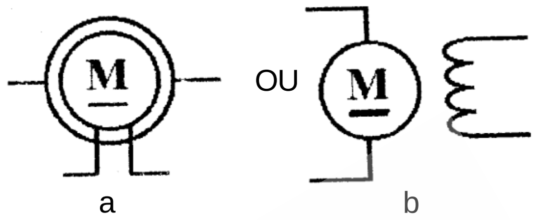
LES MOTEURS A COURANT CONTINU

A – Mise en situation : trottinette électrique à 2 roues (voir livre de cours page 207)

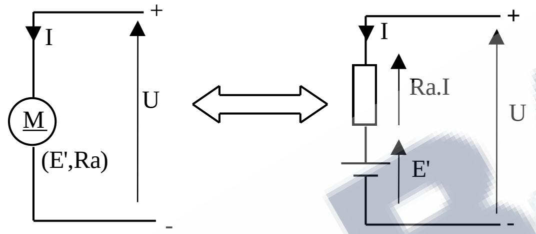
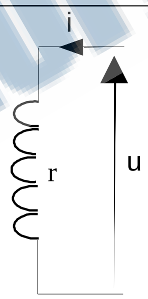
B – Rappels :

1 – Modélisation et symbole :

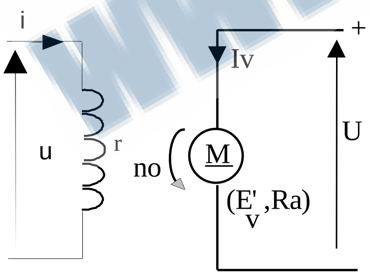




2 – Schéma équivalent :

Induit :	Inducteur :
 Loi d'OHM : U = E' + Ra.I	 u = r.i

3 – Fonctionnement à vide : (Réaliser l'activité 1 page 125)

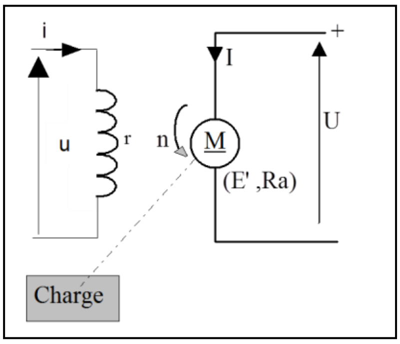


Le moteur tourne à vide , il est désaccouplé de toute charge , donc sa puissance utile est nulle (Pu=0).

Pertes joules inducteurs à vide	Pertes joules induit à vide	P absrbée par le moteur à vide	P absrbée par l'induit à vide	Pertes constantes (Pc=Pf + Pméc)
$P_{JSo} = u.i = r.i^2 = \frac{u^2}{r}$	$P_{jrv} = Ra.II_V^2$	$P_{amv} = UI_v + P_{jSo}$	$P_{av} = UI_v$	$Pc = UI_V - R_a I_V^2 = (U - R_a Iv)Iv = E'_V.Iv$

La loi d'ohm à vide s'écrit **E'$_v$ = U – Ra .I$_v$ = K no** (k : coefficient de proportionnalité)

3 – Fonctionnement en charge : (Réaliser l'activité 2 page 125)



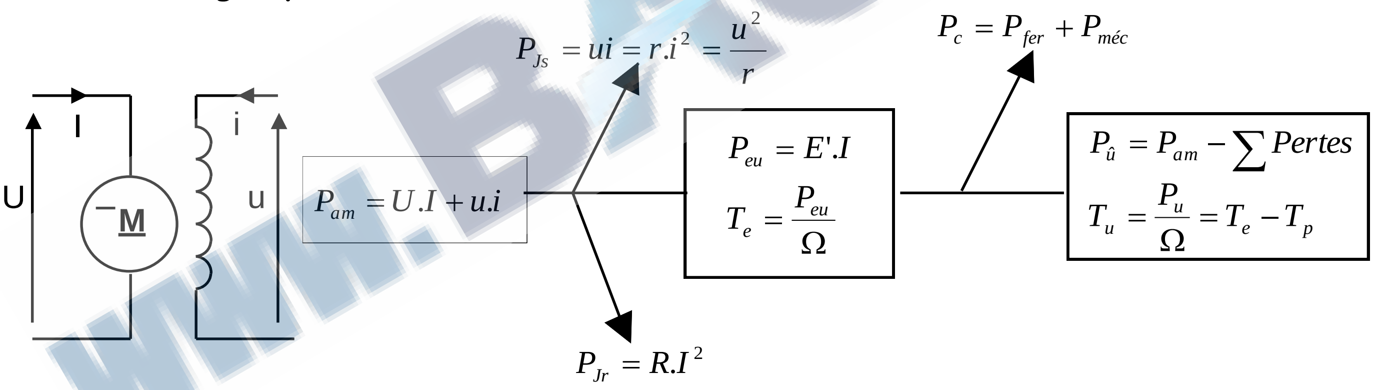
L'inducteur est alimenté par une tension continue u = cte et traversé par un courant i (si l'inducteur n'est pas un aimant permanent) . L'induit est alimenté par une tension U , absorbe un courant I pour une charge donnée et tourne à une vitesse $\Omega = \frac{2\pi n}{60}$ avec n en tr/mn et Ω en rd/s

- Loi d'ohm pour l'induit : U = E' + Ra.I
- Puissance absorbée par le moteur : $P_{am} = UI + ui$ (si le moteur est à aiment permanent : u.i = 0)
- Pertes par effet Joule dans l'inducteur : $P_{JS} = ri^2 = ui = \frac{u^2}{r}$ (si le moteur est à aimant permanent :Pjs=0)
- Pertes par effet Joule dans l'induit (rotor) : $P_{JR} = Ra.I^2$

→ les pertes joules totales : Pjt = P_{js} + P_{jr}

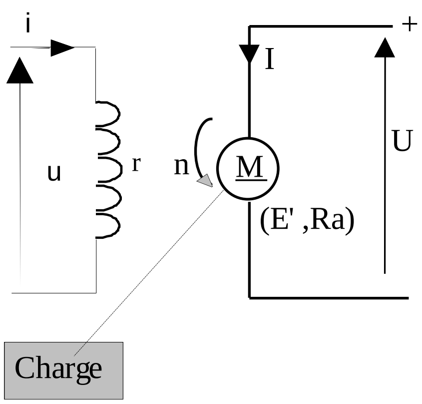
- La puissance électromagnétique : $Pem = P_{am} - P_{JS} - P_{Jr} = E'I = T_{em}\Omega$
- Les pertes constantes : Pc = Tp.Ω (constantes à vide et en charge)
- La puissance utile : $Pu = P_{am} - Pjt - Pc = T_u.\Omega$
- le rendement : $\eta = \frac{P_u}{P_{am}}$

4 – Bilan énergétique :



C – Caractéristiques d'un moteur à courant continu :

- Montage :

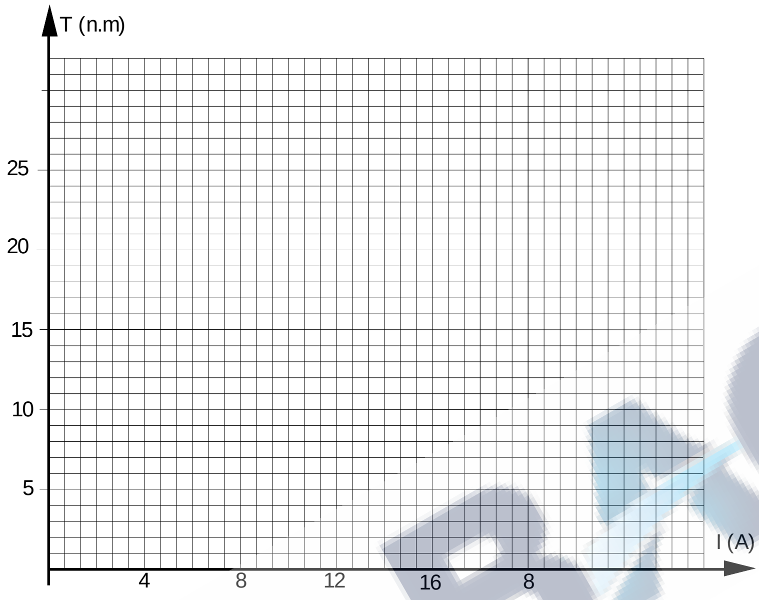


i = 0,5A = c^{te} , u = 220v = cte , U = 220v = C^{te} on donne Ra = 1Ω , calculons le couple électromagnétique Tém pour différentes valeurs du courant :

• Tableau des mesures :

n en tr/mn	1560	1540	1520	1500
I (A)	4	8	12	16
Ra.I (v)	4	8	12	16
E' = U - Ra.I	216	212	208	204
$Tem = \frac{E'I}{2\pi n}60$	5,3	10.5	15.7	20.8

1 – Caractéristique de couple : C'est la courbe représentative du couple Tu en fonction du courant absorbé I par le moteur pour différentes charges : Tem = f(I)



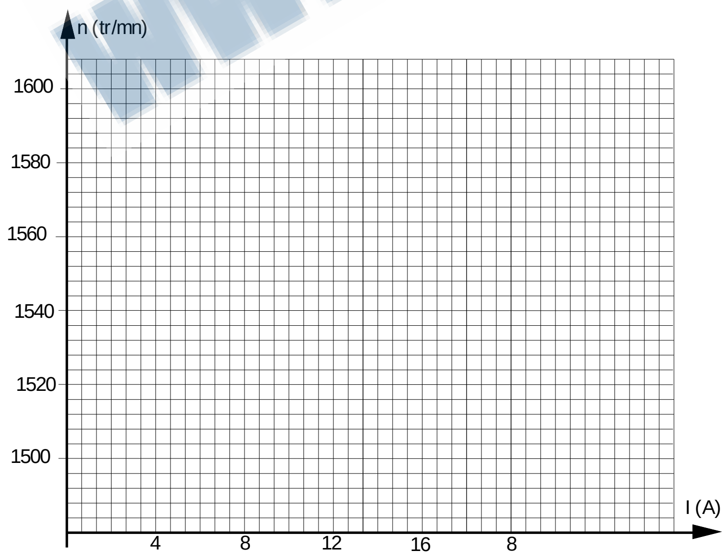
$$Tem = \frac{Pem}{\Omega} = \frac{E'I}{2\pi n}$$
$$= \frac{\mathrm{Nn}\Phi I}{2\pi n} = \frac{N\Phi I}{2\pi} = KI$$

Le couple électromagnétiques ,Tem est proportionnel au courant absorbé I

Tu = Tem – Tp

Tp = couple des pertes

2 – Caractéristique de vitesse : C'est la courbe représentative de la vitesse n en fonction du courant absorbé I par le moteur pour différentes charges : n = f(I)



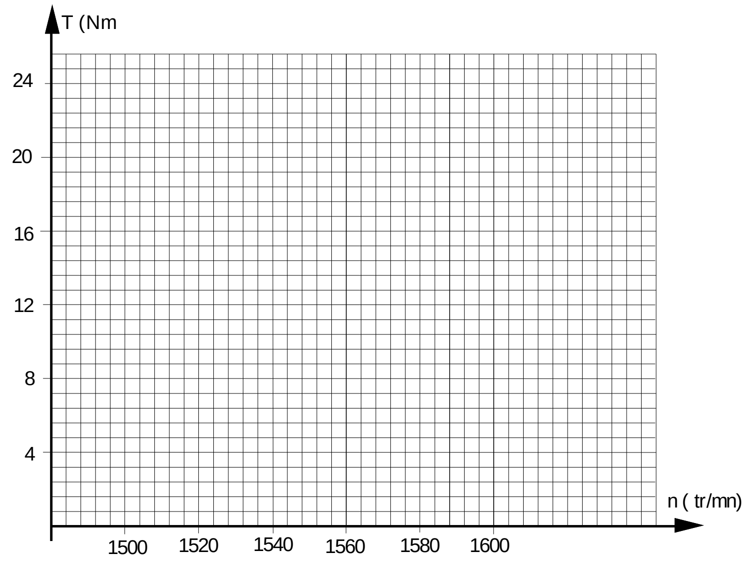
$E' = Kn$, avec $E' = U - RaI$

soit K.n = U – Ra.I

d'où :

$$n = \frac{U - Ra.I}{K} = -\frac{Ra}{K}I + \frac{U}{K}$$
$$n = A - BI$$

C'est l'équation d'une droite de pente négative . La vitesse varie peu avec la charge vitesse pour différentes charges : T = f(n)



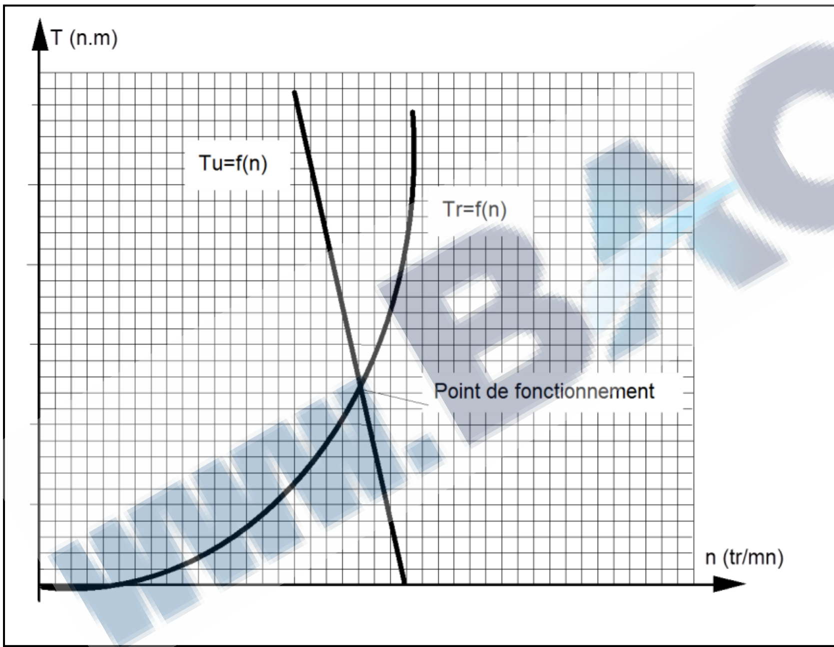
$Tem = KI$ avec $n = -\frac{Ra}{K}I + \frac{U}{K} = -BI + A$

ce qui donne : $I = A - \frac{n}{B}$

$Tem = K(A - \frac{n}{B}) = AK - \frac{K}{B}n = a - b.n$

c'est l'équation d'une droite de pente négative

4 – Point de fonctionnement :



Une charge oppose au moteur un couple résistant Tr. Pour que le moteur puisse entraîner cette charge , le moteur doit fournir un couple utile Tu de telle sorte que Tu = Tr . L'intersection de la courbe Tu = f(I) avec la courbe du couple résistant définit le point de fonctionnement .

D – Variation de vitesse d'un moteur à courant continu :

On a E' = Nnϕ = U – Ra I or Ra I << U et ϕ = ki$_{ex}$ d'où $n = \frac{U}{Nkiex}$ où ki$_{ex}$ = K $\Rightarrow n = \frac{U}{Kiex}$

D'après l'expression de n= f(U,i$_{ex}$) , pour varier la vitesse n , on doit agir soit :

- Sur le courant d'excitation **i$_{ex}$** en maintenant **U** constante .

__Inconvénients__ : Le couple varie , risque d'emballement du moteur (**n** tend vers l'infini)

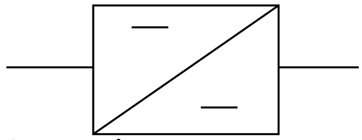
- Sur la tension d'alimentation de l'induit **U** .Pour cela il faut avoir une source de tension variable (réglable) obtenue par exemple à l'aide d'un ***__hacheur série__*** .

1 – **Définition et symbole d'un hacheur série**:

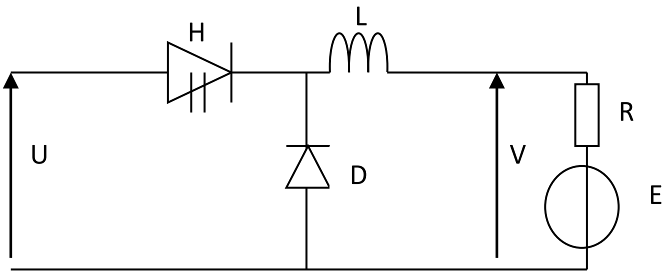
a- Définition : Le hacheur série est un convertisseur continu/continu , il permet d'obtenir à partir d'une tension continue fixe , une tension continue réglable .

fermé pendant un intervalle de temps $t_1 = \alpha T$, ouvert le reste de la période **T** . Une diode de roue libre **D** permet la circulation du courant si la charge est inductive .

b-Symbole :



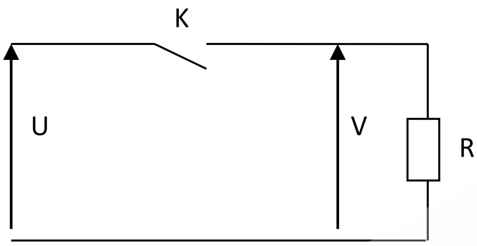
2 - Schéma d'un hacheur série :



3- Principe d'un hacheur série et valeur moyenne aux bornes de la charge :

a – Débit sur une charge résistive :

•Montage (en réalité l'interrupteur est remplacé par un transistor ou un thyristor).



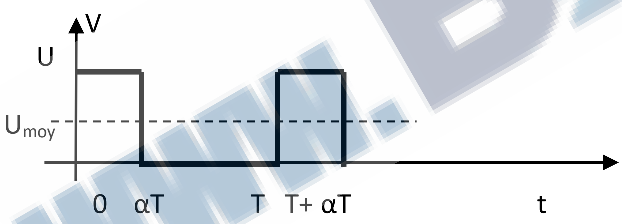
Fonctionnement :

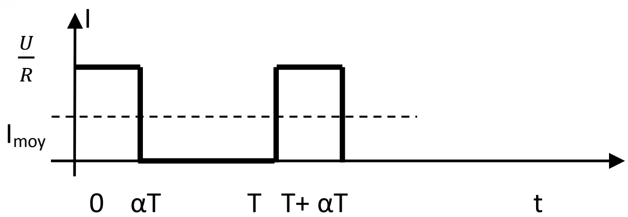
On choisit une période **T** et une fraction **α** de cette période .

α s'appelle le rapport cyclique où 0< **α** <1

- De 0 à **αT** : K est fermé ⇒V = U et $I = \frac{U}{R}$
- De **αT** à **T** : K est ouvert ⇒I = 0 et V = 0.

• Chronogrammes :

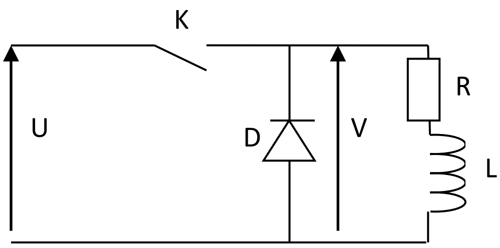




• Valeur moyenne U_{moy} (notée aussi $\overline{v}$) :La valeur moyenne est par définition le rapport de l'aire sous la courbe sur la période **T** :$Umoy = \frac{U \times \alpha T}{T} = \alpha\, T$.

b – Débit sur une charge inductive :

•Montage .

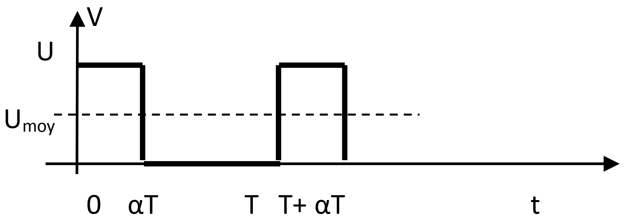


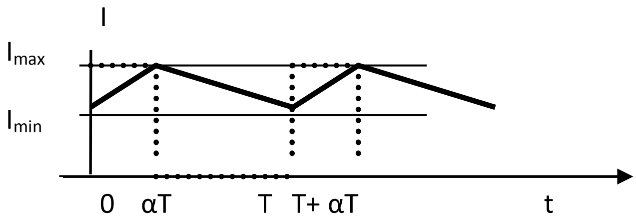
Fonctionnement :

On choisit une période **T** et une fraction **α** de cette période .

- De 0 à **αT** : K est fermé ⇒V = U , I augmente progressivement et D étant bloquée
- De **αT** à **T** : K est ouvert ⇒ V ≈ 0 , I diminue progressivement et D est passante .

• Chronogrammes :





• Valeur moyenne : $Umoy = \propto T$ et $I_{moy} = \frac{Imax+Imin}{2}$

E – Evaluation :

Exercice N°1

Un moteur à excitation indépendante porte les indications suivantes :

Résistance de l'inducteur r = 150Ω et sa tension d'alimentation u = 120v . Résistance de l'induit R = 0,5Ω et sa tension d'alimentation U = 220v

Lors d'un essai à vide , on mesure la puissance absorbée par l'induit Pv = 320w , Iv = 1,2A.

Pour un essai en charge à la vitesse n = 1450 tr/mn , l'intensité I = 18A

Pour l'essai en charge calculer

1 – Puissance électromagnétique .

2 – Les pertes par effet joule au stator et au rotor et les pertes collectives .

3 - La puissance utile.

4 - Le moment du couple utile.

5 - Le rendement du moteur.

Pour l'essai à vide , calculer

6 – La f.e.m Ev.

7 – La fréquence de rotation n_v en tr/mn

Exercice N°2

Un moteur à excitation indépendante a pour résistance d'induit R = 0,9Ω et est alimenté par une tension d'alimentation U variable .

Un essai à vide permet de mesurer le courant Iv = 1,3A , la tension Uv = 150V et nv = 1250tr/mn.

1 – Calculer les pertes constantes Pc et le moment du couple de pertes Tp .

En charge pour une tension d'alimentation U = 170V , l'induit appelle un courant de I = 22A , la vitesse de rotation est n = 1250tr/mn

2 – Calculer la f.e.m E

3 – Etablir une relation entre E et n lorsque U varie.

4 – Calculer la tension de décollage Ud .

5 – Etablir l'expression de n en fonction de U .

6 – Montrer que le couple électromagnétique Tem est constant et calculer sa valeur .

7 – Le moment de couple des pertes est proportionnel à la vitesse n , soit Tp = a.n. Calculer a .

8 – Ecrire l'expression de Tu(n) .

9 – Le moteur doit entraîner une charge qui a pour couple résistant

$$Tr = 2.10^{-6}n^2 - 1{,}1.10^{-3}n + 23.$$

Calculer les coordonnées du point de fonctionnement .

Page Facebook : BAC – TUNISIE Site Web : www.BAC.org.tn Admin : Saber Gù Tél : 28.355.106

Les moteurs du manège sont du type " courant continu ". On lit sur la plaque signalétique d'un moteur les grandeurs nominales suivantes :

INDUIT : U = 24V ; 1 = 50A n = 500 tr/min ; INDUCTEUR: u = 24V; i = 2A

L'excitation indépendante assure un flux constant.

1- Donner le schéma équivalent de l'induit du moteur en précisant l'orientation du courant et des tensions. Calculer la fém. du moteur en régime nominal sachant que la résistance de l'induit est R = 0,08 Ω.

2- On admet la relation $E=k.\Omega$ dans laquelle Ω représente la vitesse angulaire de l'induit en rad/s, et E la f.é.m. en volts. En déduire le coefficient k.

3-Sachant que $T=k'.I$, avec T moment du couple électromagnétique du moteur en N.m, et I intensité absorbée par l'induit , calculer le moment du couple électromagnétique nominal T_n

4-.Calculer la puissance nominale totale P_{An} absorbée par le moteur (induit plus inducteur).

5- En déduire la puissance utile nominale P_{un} sachant que le rendement du moteur est 62%.

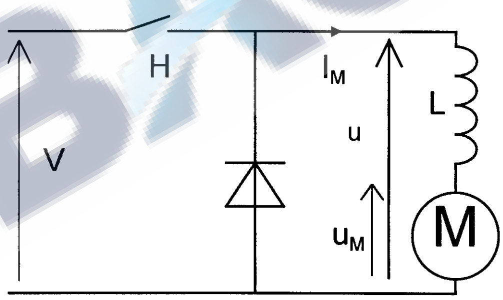
6- Calculer le moment du couple utile nominal T_{un}

7- On donne le schéma de principe d'un convertisseur électronique pour l'induit d'un moteur à courant continu où :

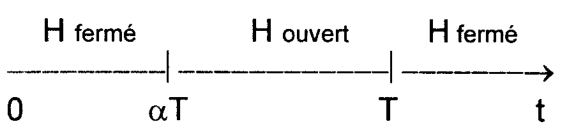
La tension V est supposée parfaitement continue V = 24V.

L symbolise une bobine de résistance nulle.

Le courant I_M est supposé continu, d'intensité I_M = 50A , constante.



L'interrupteur électronique hacheur H est commandé périodiquement selon le chronogramme suivant:



T = 5 ms
αT = 2 ms

a - Calculer la fréquence de fonctionnement du hacheur.

b - Rappeler la définition du rapport cyclique α et calculer sa valeur.

c - Donner le schéma de branchement d'un oscilloscope permettant de visualiser les variations de u et I_M en fonction du temps. Tracer l'allure de u (t) et $I_M(t)$ sur une période, en précisant les échelles.

d-Calculer la valeur moyenne Um_{moy} de la tension u_M aux bornes de l'induit sachant que la valeur moyenne de la tension aux bornes de la bobine est nulle.

Entre quelles limites varie Um_{moy} lorsque $0 \leq \alpha \leq 1$?

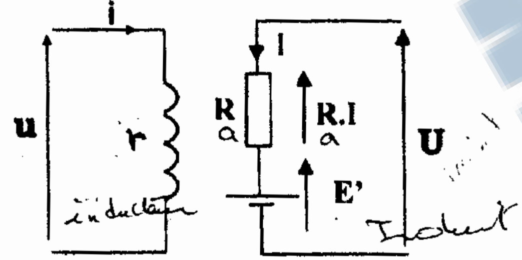
Quel est l'intérêt d'alimenter le moteur par un hacheur ?

$P = T\Omega \iff T_{Couple} = \frac{P}{\Omega}$ $\Phi = B/S$

RÉSUMÉ DE COURS	MOTEUR A COURANT CONTINU	nbre de Conducteurs actifs de l'induit

➢ **Schéma équivalent du M à CC**

$U = E' + R_a I$ loi d'ohm



$E' = U - R_a.I$ = $N_n \Phi$ (flux) (tr/s) (wb) ‖ $E'_0 = U - R_a I_0 = N_{n0} \Phi$ (à vide) ← courant à vide, ← vitesse à vide

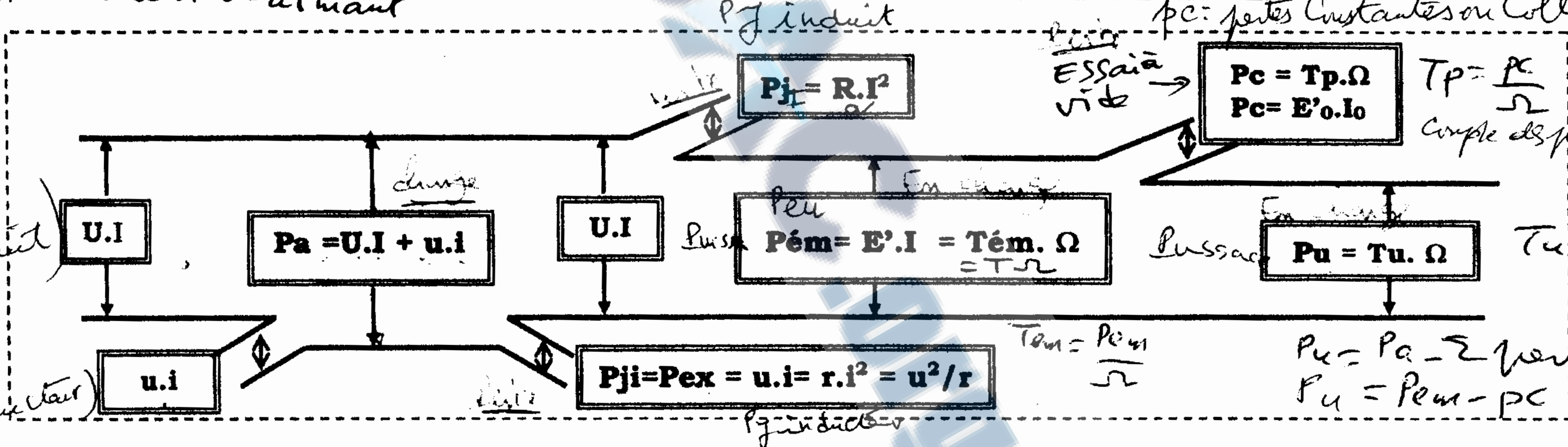
$E' = N.\Phi.n = K.n$ $K = N.\Phi = E'/n$ (V/tr/s)

➢ **Bilan des puissances (exprimées en Watts)**

Notam à électro-aimant   **Moteur à courant continu à excitation indépendante**

pc → p magnétiq, → p mécaniq

pc : pertes Constantes ou Collectives



u = r.i ; $\Omega = 2.\pi.n$ (n en trs^{-1}) ; Tém = Tu +Tp (N.m)   Rendement : $\eta = Pu / Pa < 1$

➢ **Essai à vide (pour determiner Pc): Pu=0 et Tu=0**

$Pc = U.I_0 - R.I_0^2 = E'_0.I_0$ (Si $R.I_0^2$ négligeable $Pc = U.I_0$)

Rhéostat de démarrage
$Rhd = (U/I_d) - R$

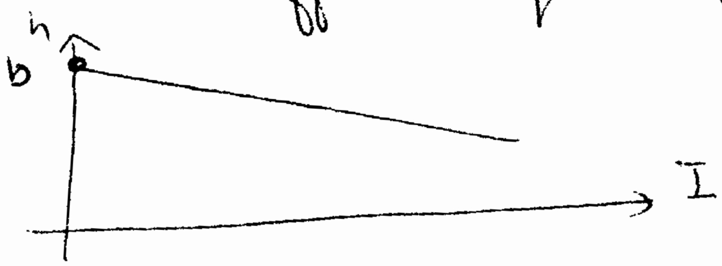
➢ **Essai en continue par la méthode voltapmérmétrique (pour Calculer R) :** $\boxed{R = U_1/I_1}$

1) Caract de vitesse : $n = f(I)$ $U = cste$

$E' = nN\Phi = U - RI \Leftrightarrow n = \frac{U - RI}{N\Phi}$ $i_{ex} = cst \rightarrow \Phi$

$n = \frac{U}{N\Phi} - \frac{R}{N\Phi} \cdot I \Leftrightarrow n = \underbrace{\left(-\frac{R}{N\Phi}\right)}_{a} \cdot I + \underbrace{\left(\frac{U}{N\Phi}\right)}_{b}$

Droite affine de pente négative



$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{n_2 - \dots}{I_2 \dots}$

---

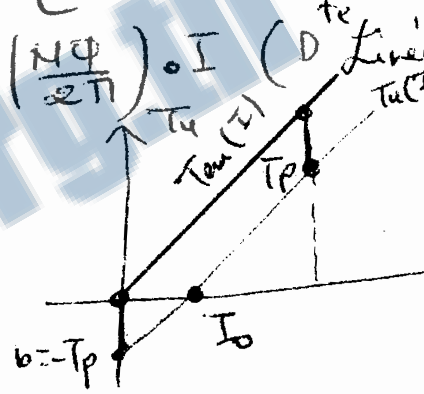
2) Caract de Couple : $T_u = f(I)$ $\begin{cases} U = cste \\ i_{ex} = cst \end{cases}$

$T_u = T_{em} - T_p$

$T_{em} = \frac{P_{em}}{\Omega} = \frac{E'I}{2\pi n} = \frac{Nn\Phi}{2\pi n} \cdot I = \left(\frac{N\Phi}{2\pi}\right) \cdot I$ (D^{te} linéaire)

$T_u = T_{em} - T_p = \underbrace{\left(\frac{N\Phi}{2\pi}\right)}_{a} \cdot I \underbrace{- T_p}_{b}$

Droite affine de pente $+$



---

3) Caract mécanique $T_u = f(n)$

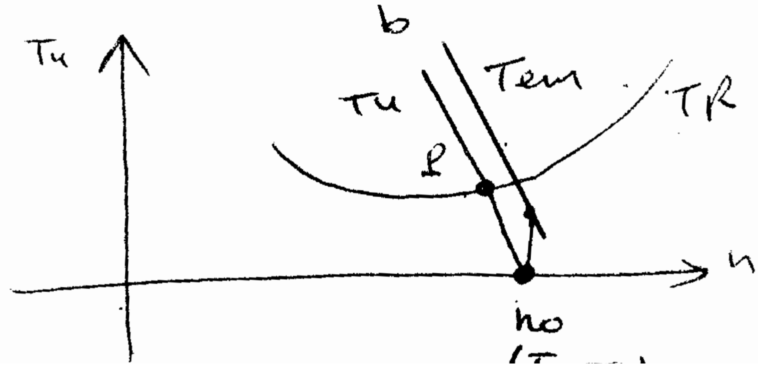
$E = U - RI = Nn\Phi$

$I = \frac{U - Nn\Phi}{R}$

$T_u = \frac{N\Phi}{2\pi}\left(\frac{U - Nn\Phi}{R}\right) - T_p$

$U = E' + RI \Leftrightarrow I = \frac{U - E'}{R} = \frac{U - Nn\Phi}{R}$

$T_u = \underbrace{\left(-\frac{N^2\Phi}{2\pi R}\right)}_{a} n + \underbrace{\left(\frac{N\Phi U}{2\pi R} - T_p\right)}_{b}$ D^{te} affine de pente $-$



P : pt de fonctionnement

$P = (T_u \cap T_R)$

EXERCICE N° 01

Un moteur à courant continu à excitation indépendante et constante possède les caractéristiques suivantes :

- Résistance de l'induit $R=0{,}8\Omega$
- Tension nominale de l'induit $U=120V$
- Intensité nominale du courant induit $I=20A$
- Vitesse de rotation nominale $n=1200tr/min$ = 20tr/s.

Pour le fonctionnement nominale

1°/Calculer la FCEM de l'induit E' ……………………………………………………

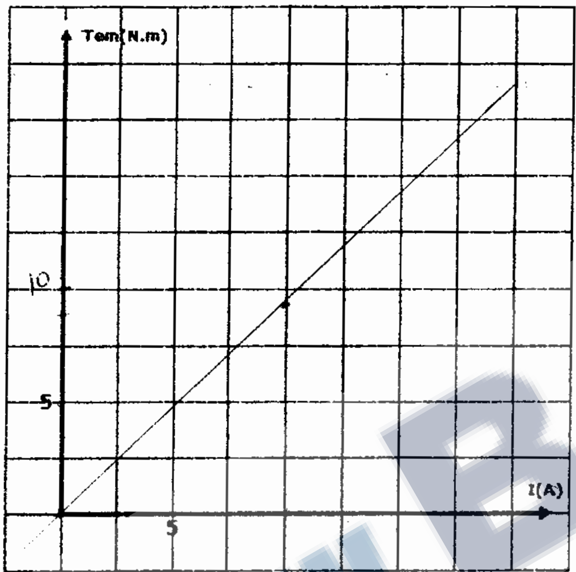
2°/Montrer que l'on peut écrire $E'=\alpha.n$ (n en $tr.s^{-1}$)……………………………………

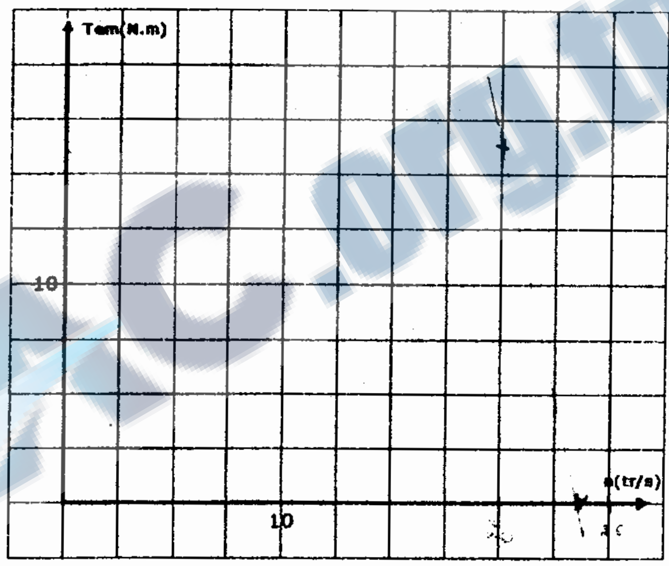
……………………………………………………………………………………………………

3°/Calculer le couple électromagnétique Tem ……………………………………………

4°/Montrer que l'on peut écrire T=K.I ……………………………………………………

Calculer la valeur de K et tracer la caractéristique Tem(I) ……………………………

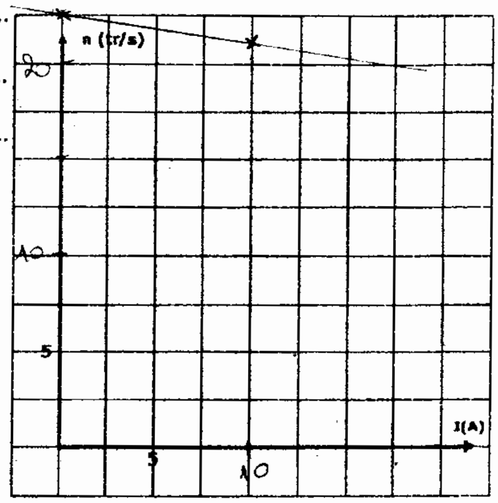




5°/Ecrire l'expression de Tem (n) (n en $tr.s^{-1}$) puis tracer ci-dessus la courbe correspondante ……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………



6°/Ecrire l'expression de n (I) (n en $tr.s^{-1}$) puis tracer ci-contre la courbe correspondante ……………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

1) $E' = U - RI = 120 - (0{,}8 \times 20) = 104\ V.$

2) $E' = N.\Phi.n$ avec $\alpha = N.\Phi$ d'où $E' = \alpha.n$

N : nombre de conducteurs de l'induit
Φ : flux sous un pôle = cte

3) $T_{em} = \dfrac{P_{em}}{\Omega} = \dfrac{E'I}{2\pi.n} = \dfrac{104 \times 20 \times 60}{2\pi \times 1200} = 16{,}55\ N.m$

4) $T_{em} = \dfrac{E'}{2\pi.n} I = \dfrac{N\Phi.\cancel{n}}{2\pi.\cancel{n}} I = \dfrac{N.\Phi}{2\pi}.I$ et on a $k = \dfrac{N\Phi}{2\pi} = \dfrac{5{,}2}{2\pi}$

• alors $T = kI$ soit $k = \dfrac{T}{I} = \dfrac{16{,}55}{20} = 0{,}82\ Nm.A^{-1}$

$\boxed{T = 0{,}82 I}$ Droite linéaire

$I = 10\ A \longrightarrow T = 8{,}3\ N.m$

5) $T_{em} = \dfrac{N.\Phi}{2\pi} I$ et on a $E' = N.\Phi.n = U - RI$

soit $I = \dfrac{U - N\Phi.n}{R}$ alors $T_{em} = \dfrac{N.\Phi}{2\pi}\left(\dfrac{U - N\Phi n}{R}\right) = \dfrac{N\Phi.U}{2\pi R} - \dfrac{(N\Phi)^2}{2\pi R}$

$T_{em} = -\dfrac{(N\Phi)^2}{2\pi R} n + \dfrac{N\Phi U}{2\pi R} = -\dfrac{k_e^2}{R}.n + k_e \dfrac{U}{R}$

$T_{em} = 0{,}82 I$; $I = \dfrac{U - E'}{R} = \dfrac{U - \alpha n}{R} = \dfrac{120 - 5{,}2.n}{0{,}8}$

$I = \dfrac{U - \alpha n}{R}$

$T_{em} = \dfrac{0{,}83}{0{,}8}\left[120 - 5{,}2 n\right] = -5{,}4 n + 124{,}5$

* $n = 20\ tr/s \longrightarrow T_{em} = 16{,}5\ N.m$

* $T_{em} = 0 \iff 0 = -5{,}4n + 124{,}5 \iff n = \dfrac{124{,}5}{5{,}4} = 23\ tr/s$

6) $E' = N.n.\Phi = U - RI$ soit $n = \dfrac{U - RI}{N.\Phi}$ soit $n = \dfrac{-R}{N.\Phi} I + \dfrac{U}{N.\Phi}$

$n = -\dfrac{0{,}8}{5{,}2} I + \dfrac{120}{5{,}2} = -0{,}15 I + 23$ avec $I = 10$ d'où

$n = -0{,}15 \times 10 + 23 = 21{,}5$; où $I = 0$ soit $I = \dfrac{23}{0{,}15}$; $\boxed{n = 23}$

Activité 2

SÉRIE D'APPLICATION:

EXERCICE 1 :

Un moteur à courant continu à excitation séparée, est alimenté par une source de tension continue constante U = 220 V.

La résistance de l'induit est R_a = 0,15Ω. La puissance inducteur, nécessaire pour créer un constant est P_{ex} = 240 W. Les pertes collectives valent 380 W.

Un essai en charge a donné : **I = 50 A** **n = 1500 tr / mn**

Le moteur fonctionne en charge, calculer :

1°/ La f.c.é.m. du moteur en charge.

2°/ Les pertes joules totales.

3°/ La puissance absorbée, La puissance électrique utile, La puissance utile et le rendement

4°/ Le couple moteur, le couple utile et le couple des pertes.

Le moteur fonctionne à vide, calculer

1°/ Le courant absorbé. I_0

2°/ La f.c.é.m. à vide

3°/ La vitesse à vide

Le moteur entraîne une autre charge et tourne à la vitesse 1530 tr/mn, calculer à ce régime

1°/ La f.c.é.m. en charge.

2°/ Le courant absorbé.

3°/ Le couple moteur

4°/ Le rendement.

EXERCICE 2 :

Une unité de perçage est entraînée par un moteur à courant continu, à excitation indépendan dont la plaque signalétique portes les indications suivantes :

P_u = 3.3KW, n = 1500 tr/mn.

Induit : U = 220V, Ra = 1.5 Ω, I= 18A.

Inducteur : u = 220V, i = 1A

Calculer :

1°/ La puissance absorbée.

2°/ Les pertes constantes Pc.

3°/ Le rendement.

4°/ Etablir l'équation littérale donnant la vitesse de rotation en fonction de la tension aux borne l'induit et l'intensité du courant I qui le traverse.

1°/ Décrire la situation lorsque l'excitation est coupée.

2°/ Comment limiter le courant au démarrage du moteur à courant continu, expliquer alo solution adoptée par un schéma.

3°/ La pointe du courant accepté au démarrage est 2.I_n, déterminer alors la résistance du rhé de démarrage qu'il faut insérer dans le montage.

Exercice N°1 :

1) Fcé.m en charge : $E' = U - RI_a = 220 - 0,15 \times 50 = 212,5\ V$

2) $PJ_{totale} = PJ_I + PJ_i = R_a I^2 + P_{ex} = 0,15 \times (50)^2 + 240 = 615$ watt

3) $P_a = UI + Ui = UI + P_{ex} = 220 \times 50 + 240 = 11240$ Watt

$P_{eu} = P_{em} = E'I = 212,5 \times 50 = 10625$ watt

$P_u = P_{em} - P_c = 10625 - 380 = 10245$ watt.

$\eta = \frac{P_u}{P_a} = \frac{10245}{11240} = 0,91 = 91\ \%$

4) $P_{em} = T_{em} \cdot \Omega \Rightarrow T_{em} = \frac{P_{em}}{\Omega} = \frac{10625 \times 60}{2\pi \times 1500} = 67,640\ N.m$

$T_U = \frac{P_U}{\Omega} = \frac{10245 \times 60}{2\pi \times 1500} = 65,221\ N.m$ et $T_U = T_{em} - T_p \Rightarrow$

$T_p = T_{em} - T_U = 67,640 - 65,221 = 2,419\ N.m$

Le moteur fonctionne à vide :

1) $E'_0 = U - RI_0 \Rightarrow P_c = 380\ W = E'_0 I_0$ alors $380 = (U - RI_0) I_0$

$380 = UI_0 - RI_0^2$ AS $-0,15 I_0^2 + 220 I_0 - 380 = 0$

$I_{01} = 1,73\ A$ et $I_{02} = 1464,65\ A$ à rejeter

2) $E'_0 = U - RI_0 = 220 - 0,15 \times 1,73 = 219,74\ V$

3) à Φ cte : $\frac{E'_0}{E'_N} = \frac{n_0 \cdot N \cdot \Phi}{n \cdot N \cdot \Phi}$ alors $n_0 = \frac{E'_0 \cdot n}{E'_N} = \frac{219,74 \times 1500}{212,5}$

$n_0 = 1551$ tr/min

Le moteur à une vitesse $n_1 = 1530$ tr/min :

1) $\frac{E'_1}{E'} = \frac{n_1 \cdot N\Phi}{n' \cdot N \cdot \Phi}$ à Φ cte d'où $E'_1 = \frac{E' \cdot n_1}{n'} = \frac{212,5 \times 1530}{1500} = 216,75\ V.$

(2) $E'_1 = U - RI'_1$ sig $RI'_1 = U - E'_1$ sig $I'_1 = \dfrac{U - E'_1}{R} = \dfrac{220 - 216{,}75}{0{,}15}$

$I'_1 = 21{,}66\ A$

(3) $T_{em} = \dfrac{P_{em}}{\Omega} = \dfrac{E'_1 . I'_1}{2\pi . n'_1} = \dfrac{216{,}75 \times 21{,}66 \times 60}{2\pi \times 1530} = 29{,}30\ N.m.$

Remarque : 2ème Méthode.

$T_{em} = \dfrac{P_{em}}{\Omega} = \dfrac{E'I}{2\pi . n} = \dfrac{n N . \Phi . I}{2\pi . n} = k_1 . I$

$T_{em} = k_1 . I_1$

à Φ cte. $\dfrac{T_{em\,1}}{T_{em}} = \dfrac{k_1 . I_1}{k_1 . I}$ d'où $T_{em_1} . I = T_{em} . I_1 \Rightarrow T_{em_1} = \dfrac{T_{em} . I_1}{I}$

$= \dfrac{67{,}640 \times 21{,}66}{50} = 29{,}30$

(4) $\eta = \dfrac{P_u}{P_a} \Rightarrow P_u = P_{em} - P_c = E'_1 . I'_1 - P_c = 216{,}75 \times 21{,}66 - 380$

$= 4314{,}805\ W$

$P_a = E'_1 I'_1 + ui = E'_1 . I'_1 + P_{ex} = 216{,}75 \times 21{,}66 + 240 = 4934{,}805\ W$

$\eta = \dfrac{P_u}{P_a} = \dfrac{4314{,}805}{4534{,}805} = 0{,}87 = 87\ \%$

Exercice N° 2.

(1) $P_a = UI + ui = 220 \times 18 + 220 = 4180\ W$

(2) $P_u = P_{ém} - P_c \Rightarrow P_c = P_{ém} - P_u = E' . I - P_u = (U - RI) I - P_u$

$P_c = (220 - 1{,}5 \times 18) \times 18 - 3300 = 174\ W$

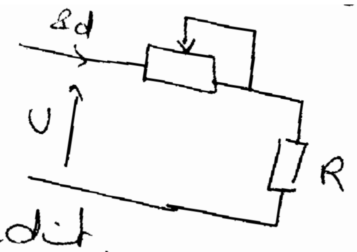
(3) $\eta = \dfrac{P_u}{P_a} = \dfrac{3300}{4180} = 0{,}78 = 78\ \%$

(4) $E' = n . \Phi . N = U - RI$ sig $n = \dfrac{U - RI}{\Phi . N} = \dfrac{U}{N . \Phi} - \dfrac{RI}{N \Phi}$

(1) l'excitation $\Phi = 0$ $(i = 0)$ alors $n \nearrow \infty$

et le Moteur s'en balle.

...montage



=> ② On un limiteur de tension d'induit.

③ $I_d = 2\, I_n = 2 \times 18 = 36\ A$

R_{hd}? On a $R_{hd} = \dfrac{U}{I_d} - R = \dfrac{220}{36} - 1{,}5 = 4{,}61\ \Omega$

1) Caractéristique de vitesse $n = f(I)$

$U = cste$ et $i = cst$

$E' = n N\Phi = U - RI \Leftrightarrow n = \dfrac{U - RI}{N\Phi} = \dfrac{U}{N\Phi}$ ...

$n = \left(-\dfrac{R}{N\Phi}\right) I + \dfrac{U}{N\Phi} = ax + b$

$$\begin{cases} a = -\dfrac{R}{N\Phi} \\ b = \dfrac{U}{N\Phi} \end{cases}$$

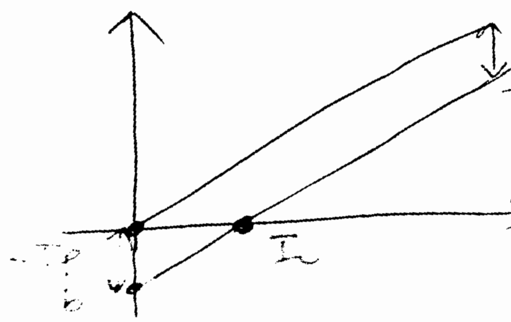
2) Caract de Couple

$T_u = f(I)$ à $U = cste$ et $i = cst$.

$T_{em} = \dfrac{N\Phi}{2\pi} . I = K_1 I$

$T_u = T_{em} - T_p$.

$$\boxed{T_u = K_1 I - T_p}$$



3) Caract mécanique :

$T_u = f(n)$ $\quad T_u = T_{em} - T_p$

$T_u = K_1 . I - T_p$

$\dfrac{RI}{N\Phi} = -n + \dfrac{U}{N\Phi} \Leftrightarrow I = -n \dfrac{N\Phi}{R} + \dfrac{U}{\cancel{N\Phi}} . \dfrac{\cancel{N\Phi}}{R}$

$T_u = K_1 \left(-n \dfrac{N\Phi}{R} + \dfrac{U}{R}\right) - T_p$

$T_u = \left(-\dfrac{K_1 N\Phi}{R}\right) n + \left(K_1 \dfrac{U}{R} - T_p\right)$

Exercice 1 :

Un moteur à courant continu à excitation indépendante fonctionne à courant d'excitation constant et sous tension d'induit nominale U = 200 V. Sa résistance d'induit est R = 3Ω.

1°) Le moteur fonctionne en charge.Il absorbe un courant d'induit I = 8 A et tourne à une vitesse n = 1200 tr/min.

a) Calculer la f.c.e.m. E'.
b) Montrer que E' = K.n et calculer K, E' étant exprimée en volts et n en tours par seconde.
c) Calculer le moment du couple électromagnétique T.
d) Les pertes constantes sont Pc = 48 W et les pertes joule inducteur $Pj_{inducteur}$ = 60 W. Calculer la puissance utile et le rendement du moteur.

2°) Le moteur fonctionne à vide. En négligeant l'intensité du courant dans l'induit, déterminer la f.c.e.m. E'_o et la fréquence de rotation n_o.

Exercice 2 :

Un moteur à courant continu à **aimant permanent** ayant les caractéristiques nominales suivantes :
U = 48V , I = 3 A , n = 200 tr/min , R = 2Ω , η = 75 %
1°) Représenter le schéma équivalent de l'induit et indiquer le sens du courant et de la tension.
2°) Calculer la puissance électrique utile nominale.
3°) Calculer la puissance utile nominale.
4°) Calculer les pertes constantes.
5°) Calculer le courant absorbé à vide par l'induit sachant qu'il est alimenté sous sa tension nominale.

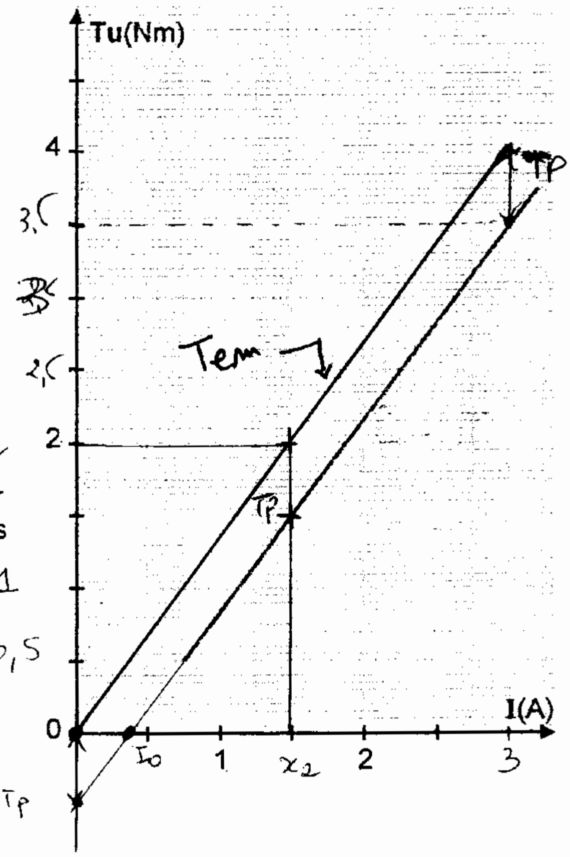
Exercice 3 :

La plaque signalétique d'un moteur à courant continu à excitation indépendante porte les indications suivantes : 500 W - 1365 tr/min.
Dans la totalité du problème, l'inducteur et l'induit sont alimentés sous la tension constante U = 220 V.

1°) Déterminer le moment du couple utile nominal : T_{uN}.
2°) On donne ci-contre la courbe $T_u = f(I)$.
a) Que représente cette courbe ?
b) En utilisant la courbe $T_u = f(I)$ déterminer la valeur nominale de l'intensité du courant d'induit I_N.
3°) On admet que :
- le flux Φ sous un pôle est constant,
- les pertes mécaniques et ferromagnétiques correspondent à un couple de perte T_p constant.

Pmec + Pfer = Pc = cste

a) Montrer que le moment T_{em} du couple électromagnétique est proportionnel au courant d'induit : T_{em} = aI.
b) Ecrire la relation qui lie T_{em}, T_u et T_p. Utiliser cette relation pour tracer la courbe T_{em}=f(I).
c) A l'aide des représentations graphiques déterminer numériquement le moment T_p du couple de pertes constantes et le coefficient a.
d) Calculer les pertes constantes.
4°) Pour le fonctionnement nominal calculer :
a) Le moment du couple électromagnétique.
b) L'intensité du courant absorbé par l'induit.
c) La résistance de l'induit.



Exercice N 1 :

$E' = U - RI = 200 - 3 \times 8 = 176\ V.$

On a $E' = n.\Phi.N = U - RI = kn$ avec $k = N.\Phi.$

$k = \frac{E'}{n} = \frac{176 \times 60}{1200} = 8,8\ V.tr.s^{-1}$

$T_{ém} = \frac{P_{ém}}{\Omega} = \frac{E'I \times 60}{2\pi \times n} = \frac{176 \times 8 \times 60}{2\pi \times 1200} = 11,20\ N.m.$

On a $P_U = P_{ém} - P_c = (176 \times 8) - 48 = 1360\ W.$

$P_a = UI + Ui = UI + P_{ex} = 200 \times 8 + 60 = 1660\ W$

$\eta = \frac{P_U}{P_a} = \frac{1360}{1660} = 0,81 = 81\ \%$

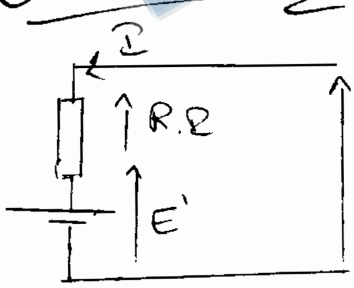
~~$p.c = E'_0 I_0 = (U - RI_0) I_0 = UI_0 - RI_0^2$~~

$\boxed{E'_0 = U}$ $E'_0 = U - \cancel{RI_0}$

d'où $E'_0 = U = 200\ V.$ d'où $n_0 = \frac{E'_0 . n}{E'} = \frac{200 \times 1200}{176} = 1363,6\ tr/min$

$\frac{E'_0 = n_0 . N . \Phi}{E' = n . N . \Phi}$ à Φ cte

Exercice N°2 :



2) $P_{éu} = E'.I = (U - RI) I = (48 - 2 \times 3) \times 3$
$= 126\ W.$

3) $P_U = P_{éu} - P_c$? $\eta = \frac{P_U}{P_a} \Rightarrow P_U$

$P_U = \eta \times P_a = 0,75 \times (UI) = 0,75 \times 48 \times 3$
$= 108\ W$

4) $P_U = P_{éu} - P_c \Rightarrow P_c = P_{éu} - P_U = 126 - 108 = 18\ W$

$P_c = E' I_0 = (U - RI_0) I_0 = UI_0 - RI_0^2$ d'où $RI_0^2 - UI_0 + P_c = 0$

$I_0 = \cancel{23},61\,A$ et $I_0' = 0,38\,A$ à rejeté.

Exercice N°3 :

1) $T_U = \frac{P_U}{\Omega} = \frac{P_U}{2\pi . n} = \frac{500 \times 60}{2\pi \times 1365} = 3,497\ N.m$

2) a) c'est la caractéristique de couple $T_u = f(I)$.

b) d'après la Courbe $I_m = 3\,A$

3) $T_{em} = \frac{P_{em}}{\Omega} = \frac{E'I}{2\pi . n} = \frac{k\, n . N\Phi . I}{2\pi . n} = \frac{N\Phi}{2\pi} . I = a . I$

$T_U = T_{em} - T_p$

$-T_p = -0,5\ N.m$ $\Rightarrow$ $T_p = 0,5\ N.m$

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-0}{1,5-0} = 1,33$

$T_{em} = a . I = 1,33\,I$

$P_c = T_p . \Omega = 0,5 \times 2\pi \times n = \frac{0,5 \times 2\pi \times 1365}{60} = 71,47\ W$

4) a) Fonctionnement Nominale.

$T_{em} = \frac{P_{em}}{\Omega} = \frac{(P_u + P_c) \times 60}{2\pi \times n} = \frac{(500 + 71,47) \times 60}{2\pi \times 1365} = 4\ N.m$

b) $T_{em} = a . I_N \Rightarrow I_N = \frac{T_{em}}{a} = \frac{4}{1,33} \simeq 3\,A$. (vérifiée)

c) $E' = U - RI \Rightarrow R = \frac{U - E'}{I} = \frac{220 - 190,33}{3}$

$R = 9,89\ \Omega$

Avec $P_{em} = E'I$

$E' = \frac{P_{em}}{I} = \frac{500 + 71,47}{3} = 190,33\ V.$

Exercice 4 :

La résistance de l'induit d'un moteur à courant continu à excitation indépendante est $R = 1\ \Omega$

- Essai à vide :
  - ➢ Tension d'alimentation de l'induit $U_0 = 200V$
  - ➢ Intensité du courant dans l'induit $I_0 = 2A$
  - ➢ Intensité du courant dans l'inducteur $i = 0{,}5A$
- Essai en charge nominale :
  - ➢ Tension d'alimentation de l'induit $U = 200V$, de l'inducteur $u = 180V$
  - ➢ Intensité du courant dans l'induit $I = 14A$
  - ➢ Intensité du courant dans l'inducteur $i = 0{,}5A$
  - ➢ Vitesse nominale $n = 1200$tr/min

1°) Calculer les f.c.é.m E'_0 à vide et E' nominale de ce moteur.

2°) Calculer les pertes par effet joule dans l'induit et dans l'inducteur dans les conditions nominales.

3°) Déterminer les pertes collectives Pc.

4°) Calculer le moment de couple des pertes Tp.

5°) Calculer la puissance absorbée par le moteur.

6°) Calculer la puissance utile du moteur.

7°) Calculer le moment du couple utile Tu

8°) Monter que $E' = K1.n$ (n en tr/s) et calculer K1.

9°) Monter que le couple électromagnétique est proportionnel au courant d'induit $T = K_2.I$ .Calculer K_2

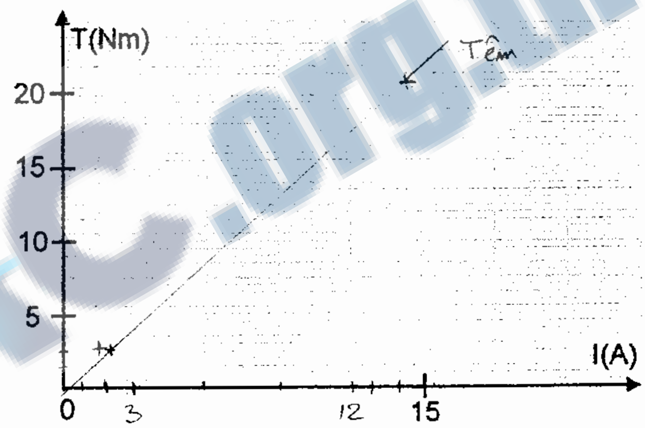
10°) Tracer la caractéristique $T = K_2.I$

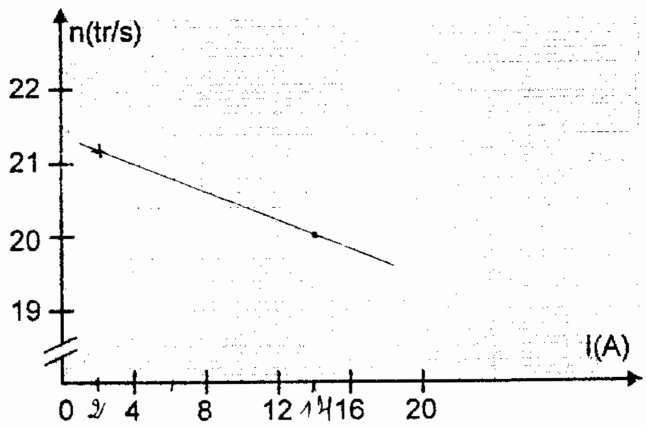
11°) Monter que $n = a.I + b$ avec n en tr/s .Calculer a et b

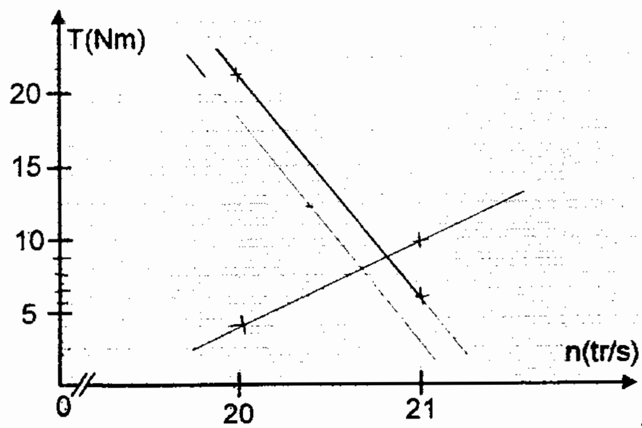
12°) Tracer la caractéristique de vitesse $n = f(I)$

13°) Déduire l'expression numérique de la caractéristique $T = f(n)$. Tracer cette caractéristique

14°) Sachant que la charge entraînée par le moteur a un couple résistant d'équation $Tr = 5n - 95$ (n en tr/s) et que le couple des pertes est supposé constant $Tp = 3Nm$, déterminer graphiquement la vitesse et le couple utile.







Exercice 5 :

Un moteur à courant continu à excitation indépendante et constante a les caractéristiques nominales suivantes :

Induit:

Tension : U = 220 V
Courant : I = 20 A
Résistance : R = 1 Ω

Inducteur:

Tension : u_{ex} = 200 V
Courant : i_{ex} = 1 A

A/ Essai à vide :

A vide, l'induit du moteur appelle un courant d'intensité I_0 = 2 A lorsqu'il est soumis à une tension U_0 = 220 V. Le moteur tourne alors à n_o = 1000 tr/min.

1°) Déterminer la valeur de la f.c.é.m. E'_0 pour ce fonctionnement à vide.
2°) Déterminer les pertes collectives Pc.
3°) Quelle est la valeur du moment T_{u0} du couple utile pour le fonctionnement à vide?
Placer le point A de coordonnées (n_0,T_{u0}) sur la **figure n° 1**.

B/ Essai en charge :

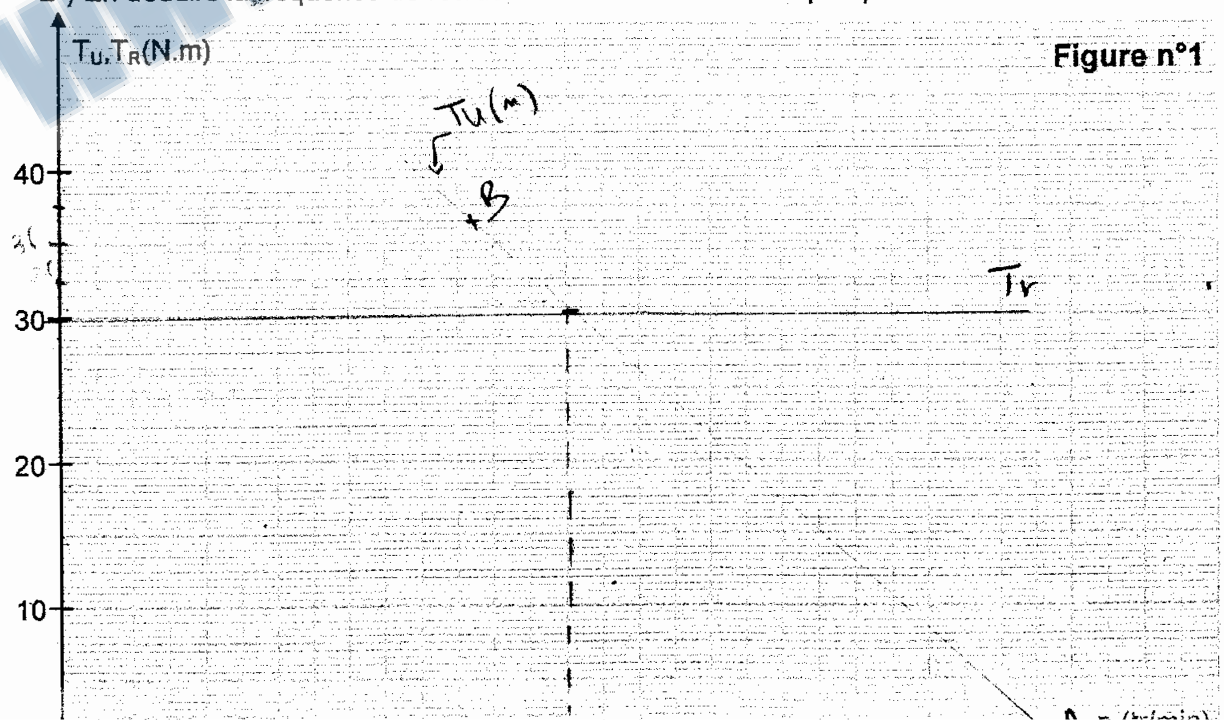
Le moteur, entraîne une pompe et fonctionne en régime nominal.

1°) Déterminer la valeur de la f.c.é.m. E'.
2°) Déterminer la valeur de la fréquence de rotation n_N nominale.
3°) Calculer :
a) La puissance totale Pa absorbée par le moteur.
b) Les pertes par effet Joule Pj dissipées dans l'induit.
c) La puissance utile P_{uN} nominale du moteur.
d) Le moment T_{uN} du couple utile nominal.
4°) Placer sur la **figure n°1** le point B de coordonnées (n_N, T_{uN}) .Tracer alors la caractéristique mécanique T_u = f(n) pour ce moteur.

C/ Utilisation de la caractéristique mécanique :

Le moteur entraîne maintenant une nouvelle charge dont le moment du couple résistant est constant et égal à T_R = 30 N.m. La tension d'alimentation de l'induit reste inchangée U = 220V.

1°) Tracer sur la **figure n°1** la caractéristique de la charge.
2°) En déduire la fréquence de rotation de l'ensemble moteur-pompe.



Exercice N°4 :

① $E'_0 = U_0 - RI_0 = 200 - 1\times 2 = 200 - 2 = 198$ V

$E' = U - RI = 200 - 1\times 14 = 186$ V

② $P_{Ji} = ui = 180\times 0,5 = 90$ W et $P_{JI} = RI^2 = (14)^2 = 196$ W

③ $p_c = E'_0 I_0 = 198\times 2 = 396$ W

④ $p_c = T_p\cdot\Omega \Rightarrow T_p = \frac{p_c}{\Omega} = \frac{396\times 60}{2\pi\times n} = \frac{396\times 60}{2\pi\times 1200} = 3,15$ N.m

⑤ $P_a = UI + ui = 200\times 14 + 180\times 0,5 = 2800 + 90 = 2890$ W

⑥ $P_u = P_{em} - p_c = E'I - p_c = 186\times 14 - 3,15 = 2600,85$ W

⑦ $P_u = T_u\times\Omega \Rightarrow T_u = \frac{P_u}{\Omega} = \frac{2600,85\times 60}{2\pi\times 1200} = 20,70$ N.m

⑧ $E' = n\cdot N\Phi$ avec $k_1 = N\Phi$ tel que Φ est le flux cte et N : nombre de conducteurs actifs d'induit

alors $E' = k_1\cdot n$ soit $k_1 = \frac{E'}{n} = \frac{186\times 60}{1200} = \cancel{0,155}\ 9,3$ V.t.s^{-1}

⑨ $T_{em} = \frac{P_{em}}{\Omega} = \frac{E'I}{2\pi . n} = \frac{\cancel{n}.N\Phi.I}{2\pi.\cancel{n}} = \frac{N\Phi}{2\pi}\cdot I$ avec $k_2 = \frac{N\Phi}{2\pi} = \frac{\cancel{0,155}\ 9,3}{2\pi}$

$T_{em} = 0,02 I$; $T_{em_1} = 0,02\times 2 = 0,04$; $T_{em_2} = 0,02\times 14 = 0,28$ $k_2 = \cancel{0,02}\ 1,5$

$T_{em} = 1,5 I$; $T_{em_1} = 1,5\times 2 = 3$ N.m ; $T_{em_2} = 1,5\times 14 = 21$ N.m

⑪ $E' = U - RI = N n\Phi$ soit $n = \frac{U}{N\Phi} - \frac{RI}{N\Phi} = \frac{-R}{N\Phi} I + \frac{U}{N\Phi}$

$n = aI + b$ avec $a = \frac{-R}{N\Phi} = \frac{-1}{9,3} = -0,107$ et $b = \frac{U}{N\Phi} = \frac{200}{9,3} = 21,505$

alors $\boxed{n = -0,107 I + 21,505}$ alors à I_0 soit $n = -0,107\times 2 + 21,505 = 21,3$ tr/s

$n_2 = -0,107\times 14 + 21,505 = 20$ tr/s

⑬ $I = \frac{\cancel{n+}21,5 - n}{0,1}$; $T_{em} = 1,5\times I = 1,5\left(\frac{n + 21,5}{0,1}\right) = \frac{1,5n + 32,25}{0,15}$

$T_{em} = 10n + 215$ * $I = \frac{21,5 - n}{0,1} = 215 - 10n = -10n + 215$

1) $E'_0 = U_0 - RI_0 = 220 - 1 \times 2 = 218$ V

2) $P_c = E'_0 . I_0 = 218 \times 2 = 436$ W

3) $P_u = T_u . \Omega$ avec $P_u = P_{em} - P_c = E'I - p_c$:

$T_{u_0} = 0$ N.m

1) $E' = U - RI = 220 - 1 \times 20 = 200$ V

2) $\dfrac{E'_0 = n_0 . N \Phi}{E' = n . N \Phi}$ sig $n_N = \dfrac{E' \times n_0}{E'_0} = \dfrac{200 \times 1000}{218} = 917,431$ tr/min

3) a) $P_a = UI + Ui = 220 \times 20 + 200 = 4600$ W

b) $P_{Ji} = Ui = 200$ W et c) $P_u = P_{em} - P_c = E'I - p_c = 200 \times 20 - 436$
$= 3564$ W

d) $P_u = T_u . \Omega$ sig $T_u = \dfrac{P_u}{\Omega} = \dfrac{P_u \times 60}{2\pi \times n} = \dfrac{3564 \times 60}{2\pi \times 917,431} = 37,09$ N.m

Exercice 4 :

1°) F.c.é.m E'_0 à vide :

$E'_0 = U - RI_0 = 200 - 1x2$ $\boxed{E'_0 = 198\ V}$

F.c.é.m E' nominale :

$E' = U - RI = 200 - 1x14$ $\boxed{E' = 186\ V}$

2°) Pertes par effet joule dans l'induit :

$Pj_{induit} = RI^2 = 1x14^2$ $\boxed{Pj_{induit} = 196\ W}$

Pertes par effet joule dans l'inducteur :

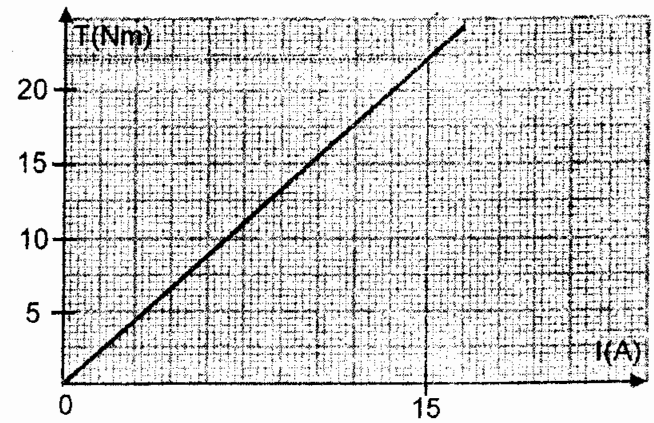
$Pj_{inducteur} = u.i = 180x0,5$ $\boxed{Pj_{inducteur} = 90\ W}$

3°) Pertes collectives Pc :

$Pc = E'_0.I_0 = 198x2$ $\boxed{Pc = 396\ W}$

4°) Moment de couple des pertes Tp :

$Tp = \frac{Pc}{\Omega} = \frac{Pc}{2\Pi n} = \frac{396x60}{2\Pi x1200}$ $\boxed{Tp = 3,15\ Nm}$



5°) Puissance absorbée par le moteur :

$Pa = UI + ui = 200x14 + 90$ $\boxed{Pa = 2890\ W}$

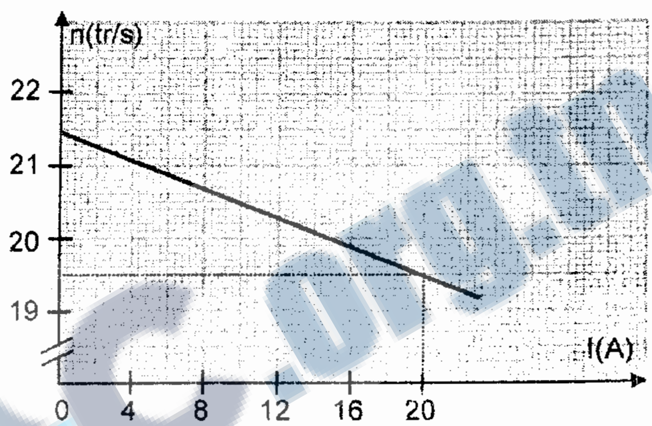
6°) Puissance utile :

$Pu = Pa - \sum pertes = Pa - (Pj_{inducteur} + Pj_{induit} + Pc)$

$Pu = 2890 - (90 + 196 + 396)$ $\boxed{Pu = 2208\ W}$

7°) Moment du couple utile Tu :

$Tu = \frac{Pu}{\Omega} = \frac{Pu}{2\Pi n} = \frac{2208x60}{2\Pi x1200}$ $\boxed{Tu = 17,58\ Nm}$



8°) E' = nNØ avec N : nombre de conducteurs de l'induit **constant**.

Ø : flux sous un pole en Webers **constant** puisque le courant d'excitation constant.

D'où NØ est constant

$\boxed{E' = K1.n}$ K1 = NØ , $K1 = \frac{E'}{n} = \frac{186x60}{1200}$ $\boxed{K1 = 9,3\ Vs/tr}$

9°) $T = \frac{Péu}{\Omega} = \frac{E'I}{2\Pi n} = \frac{K1n}{2\Pi n}I = \frac{K1}{2\Pi}I$ $\boxed{T = \frac{K1}{2\Pi}I}$ $\boxed{T = K2.I}$ $\boxed{K2 = \frac{K1}{2\Pi} = 1,48\ Nm/A}$

$\boxed{T = 1,48\ I}$

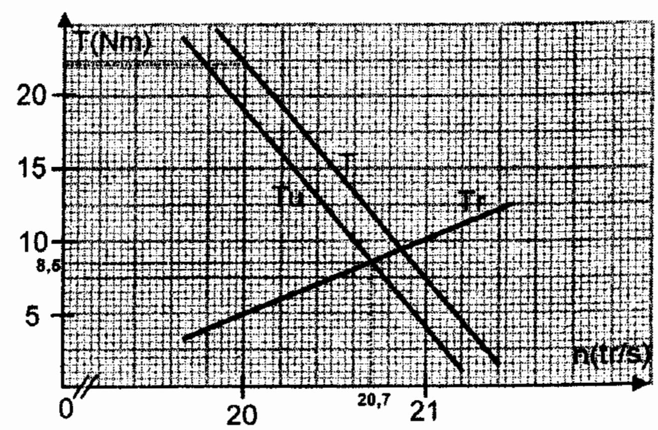
10°)

11°) $E' = K1n = U - RI$; $n = -\frac{R}{K1}I + \frac{U}{K1}$

$a = -\frac{R}{K1} = -0,1$; $b = \frac{U}{K1} = 21,5$

$\boxed{n = -0,1I + 21,5}$

12°)



13°) $n = -0,1I + 21,5$; $I = -10n + 215$

$T = 1,48\ I = 1,48(-10n + 215)$ $\boxed{T = -14,8n + 318,2}$

14°) $Tu = T - Tp = Tu - 3$

Les caractéristiques du moteur et de la charge se croisent au point de fonctionnement pour lequel les couples moteur et résistant sont identiques :Tu = Tr $\boxed{Tu = 8,5\ Nm}$ $\boxed{n = 20,7\ tr/s}$

Exercice 5 :

A/ Essai à vide :

1°) F.c.é.m. E'_0 : $E'_0 = U - RI_0 = 220 - 1x2$ $\boxed{E'_0 = 218\ V}$

2°) Pertes collectives Pc : $Pc = E'_0 I_0 = 218x2$ $\boxed{Pc = 436\ W}$

3°) $T_{u0} = 0$.

B/ Essai en charge nominale:

1°) F.c.é.m. E' : $E' = U - RI = 220 - 1x20$ $\boxed{E' = 200\ V}$

2°) Fréquence de rotation n_N nominale :

$E'_0 = n_0 N\varnothing$; $E' = nN\varnothing$; $\frac{E'}{E'_0} = \frac{n_N}{n_0}$; $n_N = \frac{E'}{E'_0} n_0 = \frac{200}{218} 1000$ $\boxed{n_N = 917\ tr/min}$

3°)

a) Puissance totale Pa absorbée par le moteur :

$Pa = UI + u_{ex} i_{ex} = 220x20 + 200x1 = 4400 + 200$ $\boxed{Pa = 4600\ W}$

b) Pertes par effet Joule dans l'induit :

$Pj_{induit} = RI^2 = 1x20^2$ $\boxed{Pj_{induit} = 400\ W}$

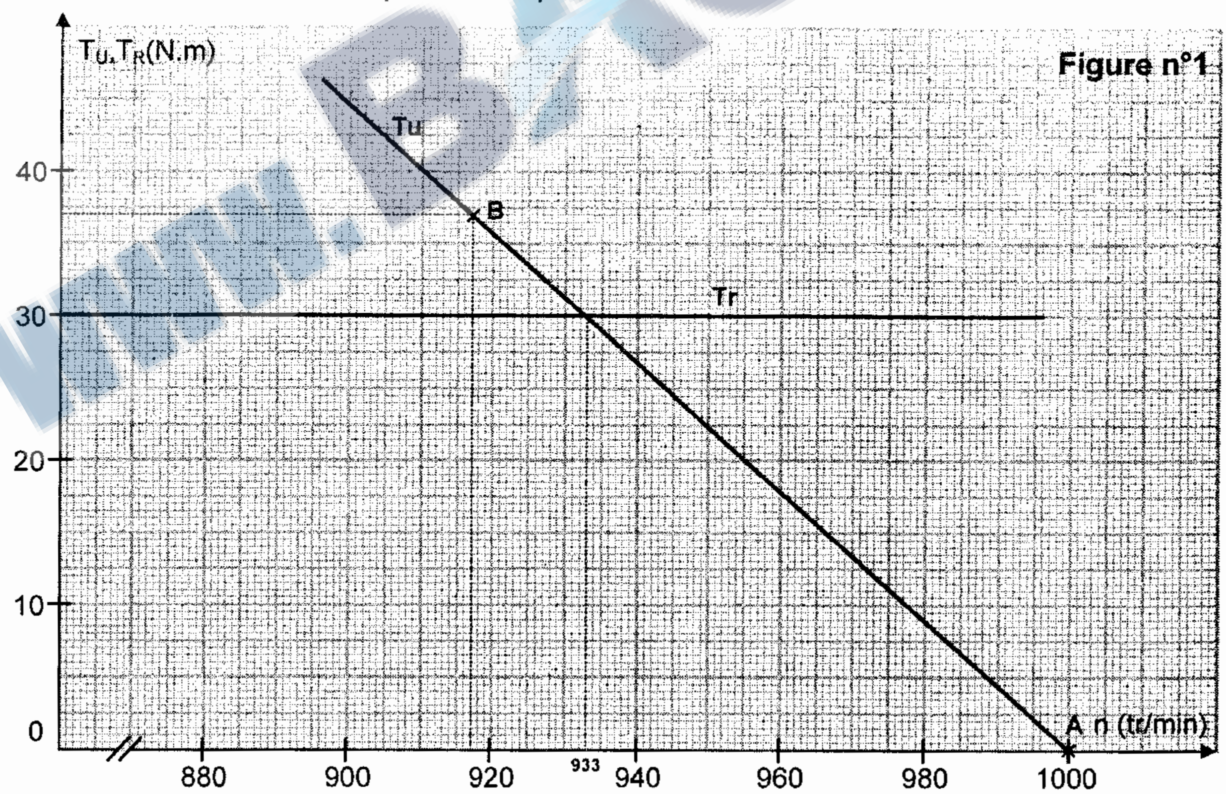
c) Puissance utile P_{uN} nominale du moteur :

$P_{uN} = Pa - \sum pertes = Pa - (Pj_{inducteur} + Pj_{induit} + Pc) = 4600 - (200+400+436)$ $\boxed{P_{uN} = 3564\ W}$

d) Moment T_{uN} du couple utile nominal :

$T_{uN} = \frac{P_{uN}}{\Omega} = \frac{P_{uN}}{2\Pi n_N} = \frac{3564x60}{2\Pi x917}$ $\boxed{T_{uN} = 37\ Nm}$

C/ Utilisation de la caractéristique mécanique :



2°) Fréquence de rotation de l'ensemble moteur-pompe.

Les caractéristiques du moteur et de la charge se croisent au point de fonctionnement pour lequel les couples moteur et résistant sont identiques : Tu = Tr = 30 Nm et $\boxed{n = 933\ tr/min}$

Lycée EL IMTIEZ Sfax

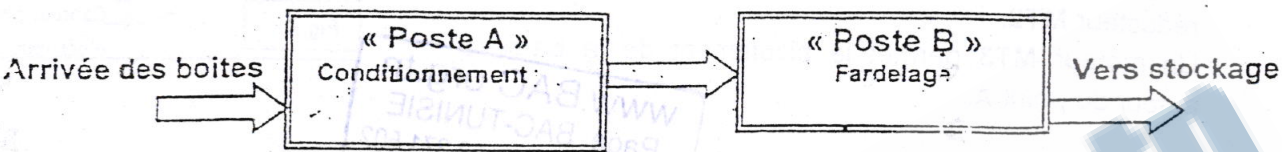
DEVOIR DE SYNTHESE N°1

Discipline: Technique 4ème T Durée : 4H

SYSTEME AUTOMATISE DE CONDITIONNEMENT DE PRODUIT ALIMENTAIRE

I) MISE EN SITUATION

1. UNITE DE PRODUCTION : Cette unité de production conditionne un produit alimentaire en boites en une ou deux couches posées sur une barquette et protégées par un film plastique assurant l'étanchéité et l'hygiène du produit.



Fardelage : opération qui consiste à entourer les 6 boites par un film plastique.

2. PRESENTATION DU SYSTEME : POSTE DE CONDITIONNEMENT

1-1 ARCHITECTURE GENERALE (voir Fig. 1)

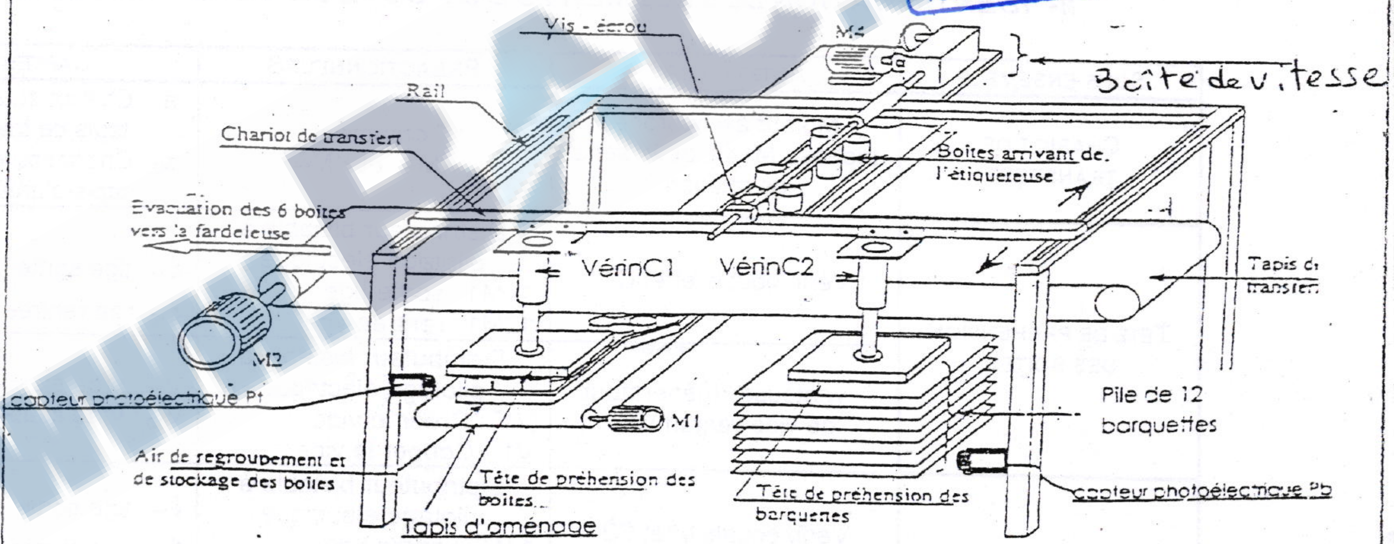


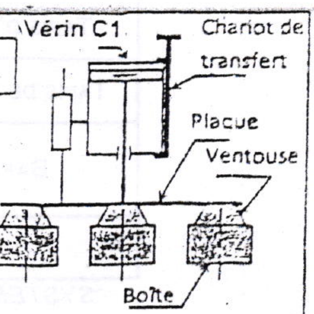
Fig. 1

1-2 DETAILS CINEMATIQUES DES SOUS ENSEMBLES

1-2-1- TETE DE PREHENSION DES BOITES (voir Fig. 2)

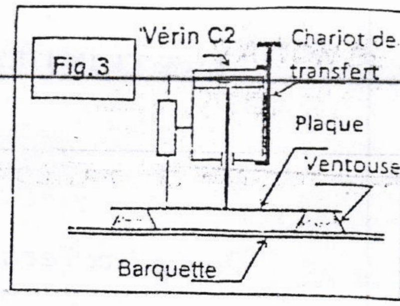
Ce sous ensemble est fixé sur le chariot de transfert. Chaque boite est prise par une ventouse ; les 6 ventouses sont alimentées par un générateur de vide (venturi V1). Les ventouses sont fixées sur une plaque actionnée par un vérin double effet anti-rotation C1.

Fig. 2



1-2-2- *TETE DE PREHENSION DES BARQUETTES* (voir Fig.3)

Ce sous ensemble est fixé sur le chariot de transfert. Quatre ventouses assurent la prise d'une barquette. Les ventouses sont fixées sur une plaque actionnée par un vérin double effet anti-rotation C2.

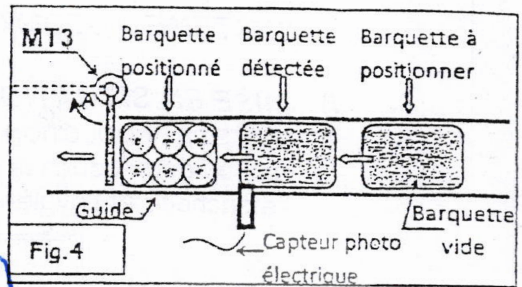


1-2-3- *TAPIS D'AMENAGE*

Le tapis d'aménage est entraîné par un moto réducteur MT1.
Les boites sont dirigées par des guides pour y être rangées par 6.

1-2-4- *TAPIS DE TRANSFERT* (voir Fig.4)

Le tapis de transfert permet d'une part d'amener la barquette contre une barrière escamotable (rotative) et d'autre part d'évacuer l'ensemble barquette + 6 boites vers la fardeleuse. Ce tapis est entraîné par un moto-réducteur MT2.
Un moteur MT3 permet le pivotement de la barrière autour du point A.



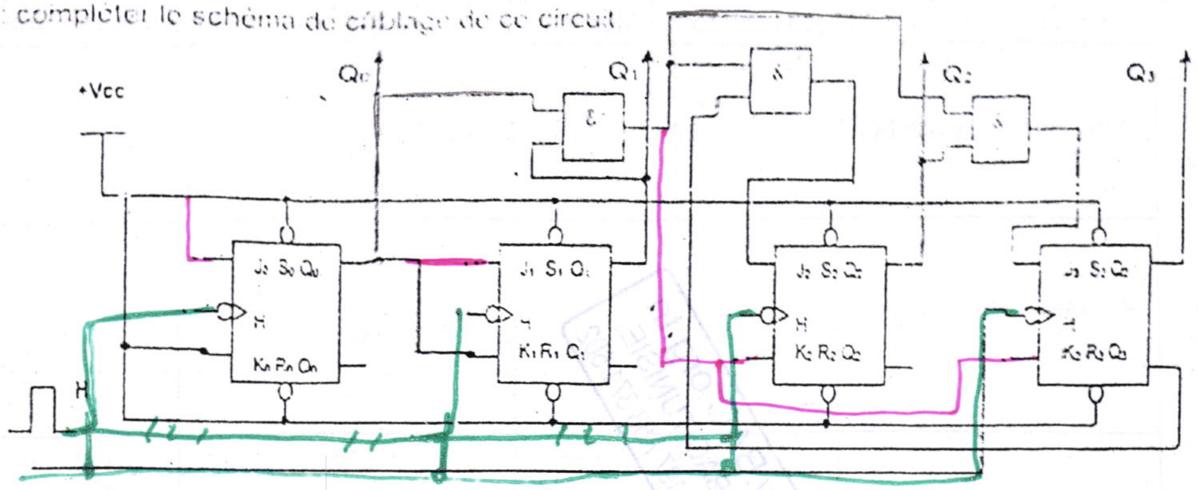
1-2-5- *CHARIOT DE TRANSFERT*

Le chariot de transfert permet aux deux têtes de préhension de se déplacer au dessus du tapis d'aménage ou au dessus du tapis de transfert. Le déplacement du chariot dans les deux sens en deux vitesses est assuré par une boite de vitesses et un moteur MT4 à deux sens de rotation, muni d'un système vis écrou.

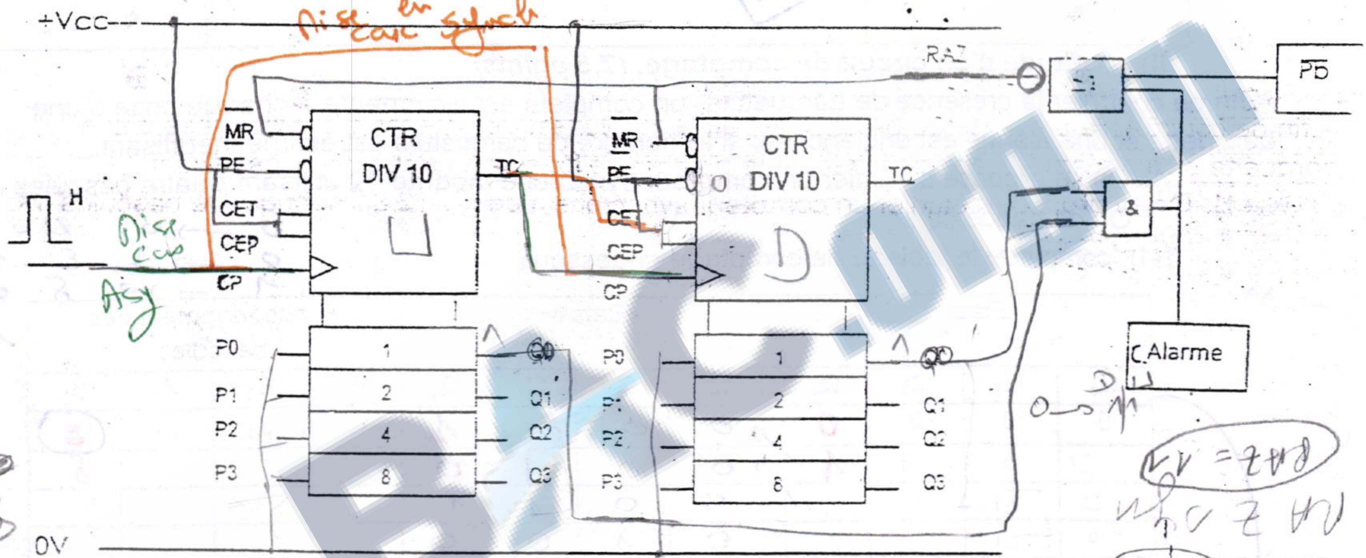
II- IDENTIFICATION DES ELEMENTS DU POSTE DE CONDITIONNEMENT

SOUS ENSEMBLE	ACTIONNEURS	PREACTIONNEURS	CAPTEURS
CHARIOT DE TRANSFERT	Moteur asynchrone triphasé MT4 à deux sens de rotation	Contacteurs $KM4_1$ et $KM4_2$	a_1 : Chariot au dessus du tapis de transfert a_0 : Chariot au dessus du tapis d'aménage
TETE DE PREHENSION DES BOITES	Vérin double effet C1	Distributeur bistable à pilotage électrique 14M1 : sortie tige 12M1 : rentrée tige	ℓ_{11} : tige sortie ℓ_{10} : tige rentrée
	ventouses (générateur de vide venturi V1)	Distributeur bistable à pilotage électrique $V1^+$: Créer le vide $V1^-$: Couper le vide	V_{11} : Vide établi V_{10} : Vide coupé
TETE DE PREHENSION DES BARQUETTES	Vérin double effet C2	Distributeur bistable à pilotage électrique 14M2 : sortie tige 12M2 : rentrée tige	ℓ_{21} : tige sortie ℓ_{20} : tige rentrée
	ventouses (générateur de vide venturi V2)	Distributeur bistable à pilotage électrique $V2^+$: Créer le vide $V2^-$: Couper le vide	V_{21} : Vide établi V_{20} : Vide coupé
TAPIS D'AMENAGE	Moteur électrique MT1	Contacteur KM1	Pt : Capteur présence boites
TAPIS DE TRANSFERT	Moteur électrique MT2	Contacteur KM2	p : barquette détectée p : barquette positionnée
BARRIERE	Moteur électrique MT3 à deux sens de rotation	Contacteurs $KM3_1$: ouverture $KM3_2$: fermeture	S_0 : barrière ouverte S_1 : barrière fermée
			Pb : Capteur présence barquettes

1-3 : compléter le schéma de câblage de ce circuit



2) On remplace le circuit précédent par un circuit qui utilise deux compteurs intégrés, en se référant au schéma de brochage et aux chronogrammes du compteur intégré synchrone 40 162 (page 4/5) du dossier technique, compléter le schéma de câblage de ce circuit.



IV) Etude d'un circuit combinatoire : *(2,5 points)*

L'unité centrale d'un API comporte principalement une unité arithmétique et logique voir page 3/5 du dossier technique. On donne (page 4/5) du dossier technique le schéma de brochage et la table de fonctionnement d'une UAL (74LS381) comme exemple .On demande de:

1) préciser pour ce circuit :
- les entrées : ....
- les sorties : ....
- les entrées de sélection : ....

2) compléter le tableau suivant :

S2	S1	S0	A3	A2	A1	A0	B3	B2	B1	B0	F3	F2	F1	F0
			0	1	1	0	0	0	1	1				
0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0				
			0	1	0	1	1	0	1	0				
0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0				
1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0				
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1				
1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1				

II-3 : Programmation en listes d'instructions.

Pour les étapes M2, M7et M14, compléter les instructions programmes correspondants.

Activation de l'étape M2	A…………	…………	Déactivation de l'étape M2	…………
Activation de l'étape M7	…………		Déactivation de l'étape M7	…………
Activation de l'étape M14	…………		Déactivation de l'étape M14	…………

III) Etude d'un circuit de comptage. *(7,5 points)*

A fin de contrôler la présence de barquettes, un compteur est incrémenté à chaque prise d'une barquette et une alarme est enclenchée, si le nombre de barquettes est estimé insuffisant.

1) On se propose d'étudier un compteur synchrone modulo 12 utilisant quatre bascules JK.

On demande de :

1-1 : compléter le tableau de comptage ci-dessous

0 → 0 μ0
0 → 1 ε
1 → 0 δ
1 → 1 μ1

J φ
1 φ
φ 1
φ 0
J K

Etats n				Etats n+1				Fonctionnement des bascules			
Q_3	Q_2	Q_1	Q_0	Q_3	Q_2	Q_1	Q_0	B_3	B_2	B_1	B_0
0	0	0	0	0	0	0	1	μ0	μ0	μ0	ε
0	0	0	1	0	0	1	0				δ
0	0	1	0	0	0	1	1				
0	0	1	1	0	1	0	0				
0	1	0	0	0	1	0	1				
0	1	0	1	0	1	1	0				
0	1	1	0	0	1	1	1				
0	1	1	1	1	0	0	0				
1	0	0	0	1	0	0	1				
1	0	0	1	1	0	1	0				
1	0	1	0	1	0	1	1				
1	0	1	1	0	0	0	0				

1-2 : en déduire les équations des entrées J_0, J_1, k_2 et K_3 des bascules,

n

Q_3Q_2 \ Q_1Q_0	00	01	11	10
00	1			
01				
11				
10				

Q_3Q_2 \ Q_1Q_0	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Q_3Q_2 \ Q_1Q_0	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Q_3Q_2 \ Q_1Q_0	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

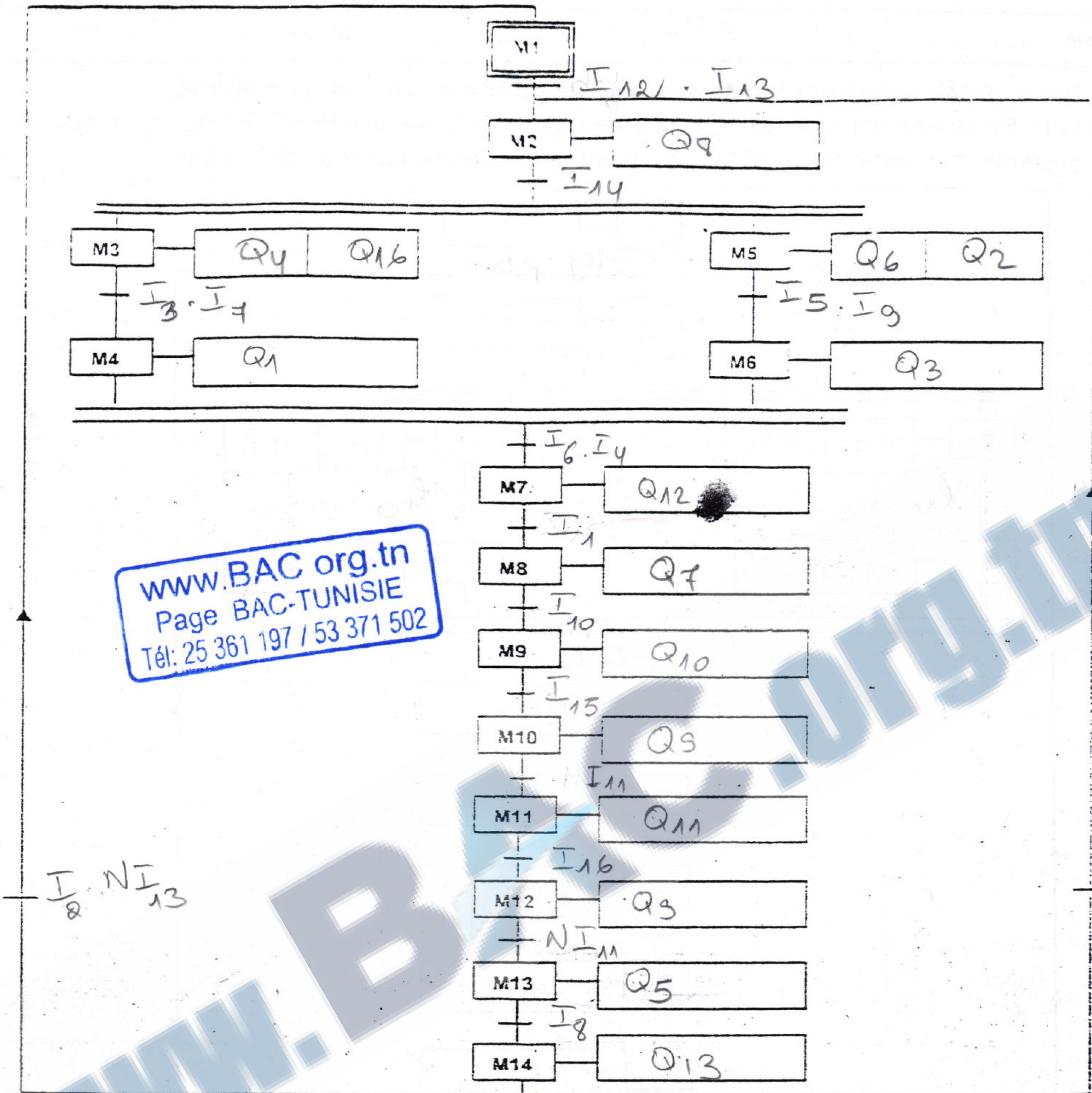
J_0 = ……1………… J_1 = ……Q_0………… k_2 = ……$Q_1 Q_0$………… K_3 = ……$Q_1 Q_0$…………

Feuille réponse 3/4

φ

II) Traduction du GRAFCET en langage API AEG A020. *(6,5 points)*

II-1 : En se référant au GRAFCET du point de vue partie commande et au tableau des codes automate de la page 3/5 du dossier technique, compléter le GRAFCET codé automate suivant.



II-2 : Programmation en schémas à contacts : Pour les étapes M2, M7 et M14, compléter les schémas suivants.

	Activation	Désactivation	Sorties
M2	M1 I12 I13 / M14 I2 I13 — (S) M2	M3 M5 — (R) M2	M2 — ( ) Q8
M7	M4 M6 I6 I4 — (S) M7	M8 — (R) M7	M7 — ( ) Q12
M14	M13 I8 — (S) M14	M1 / M2 — (R) M14	M14 — ( ) Q13

Feuille réponse 2/4

DEVOIR DE SYNTHESE N°1

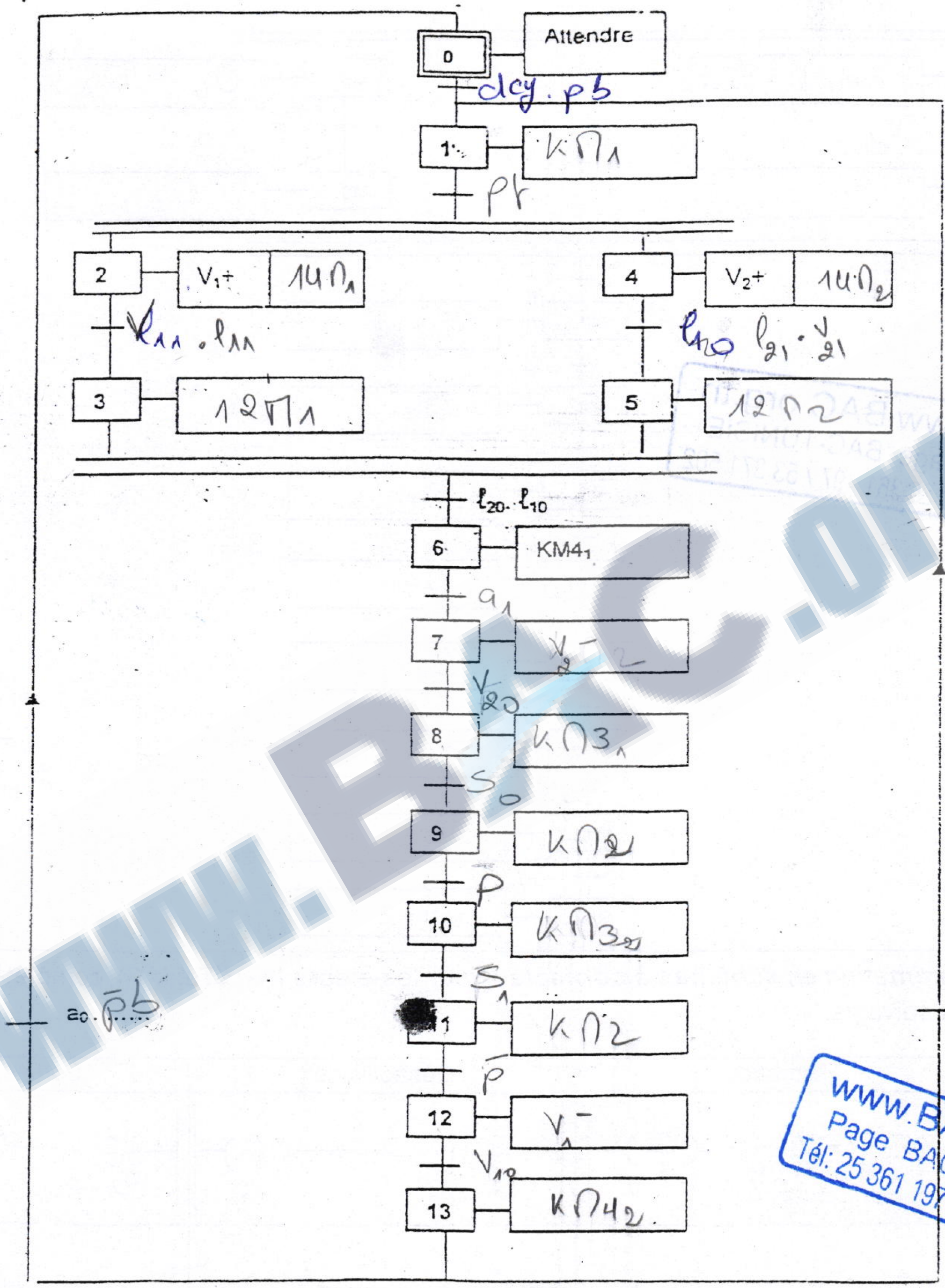
(EPREUVE D'ELECTRICITE)

Note ..../

Nom : .... Prénom : .... Classe : .... N° : ....

I) Analyse temporelle du système de conditionnement *(3,5 points)*

I -1 : En se référant au dossier technique (pages 1-2/5) et au GRAFCET du point de vue système, compléter le GRAFCET du point de vue partie commande suivant .



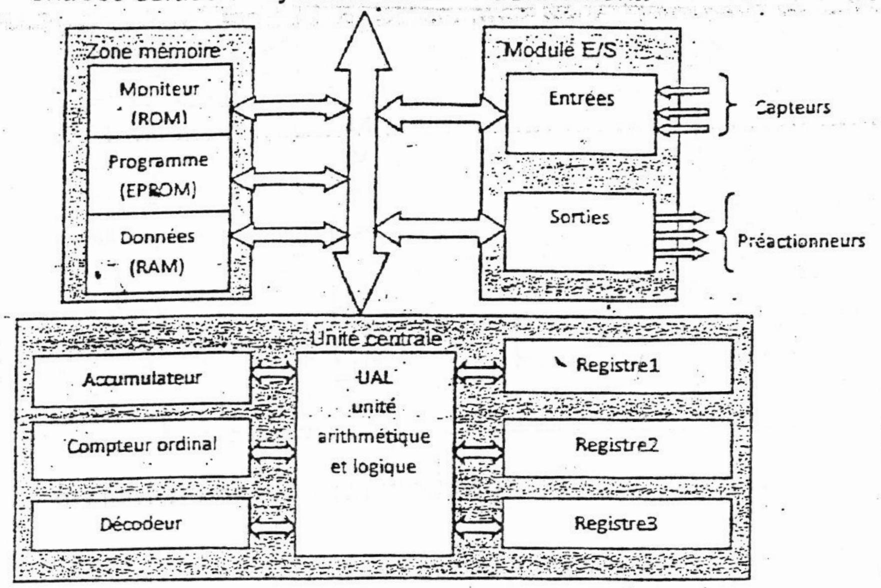
I – 2 : En se référant au GRAFCET du point de vue partie commande, compléter le tableau suivant.

Etapes	Equations d'activation	Equations de désactivation
0	A0 = $X_{13} \cdot a_0 \cdot \bar{p}b + Init$	D0 = $X_1 + X_{13}$
1	A1 = $X_0 \cdot dcy \cdot pb + X_{13} \cdot a_0 \cdot \bar{p}b$	D1 = $X_2 \cdot X_4$
6	A6 = $X_3 \cdot X_5 \cdot l_{20} \cdot l_{10}$	D6 = X_7
13	A13 = $X_{12} \cdot V_{10}$	D13 = $X_0 + X_1$

$X_0 = \overline{X_1}\left(X_{13} \cdot a_0 \cdot \bar{p}b + Init + m_0\right)$

III- PRESENTATION DE LA PARTIE COMMANDE

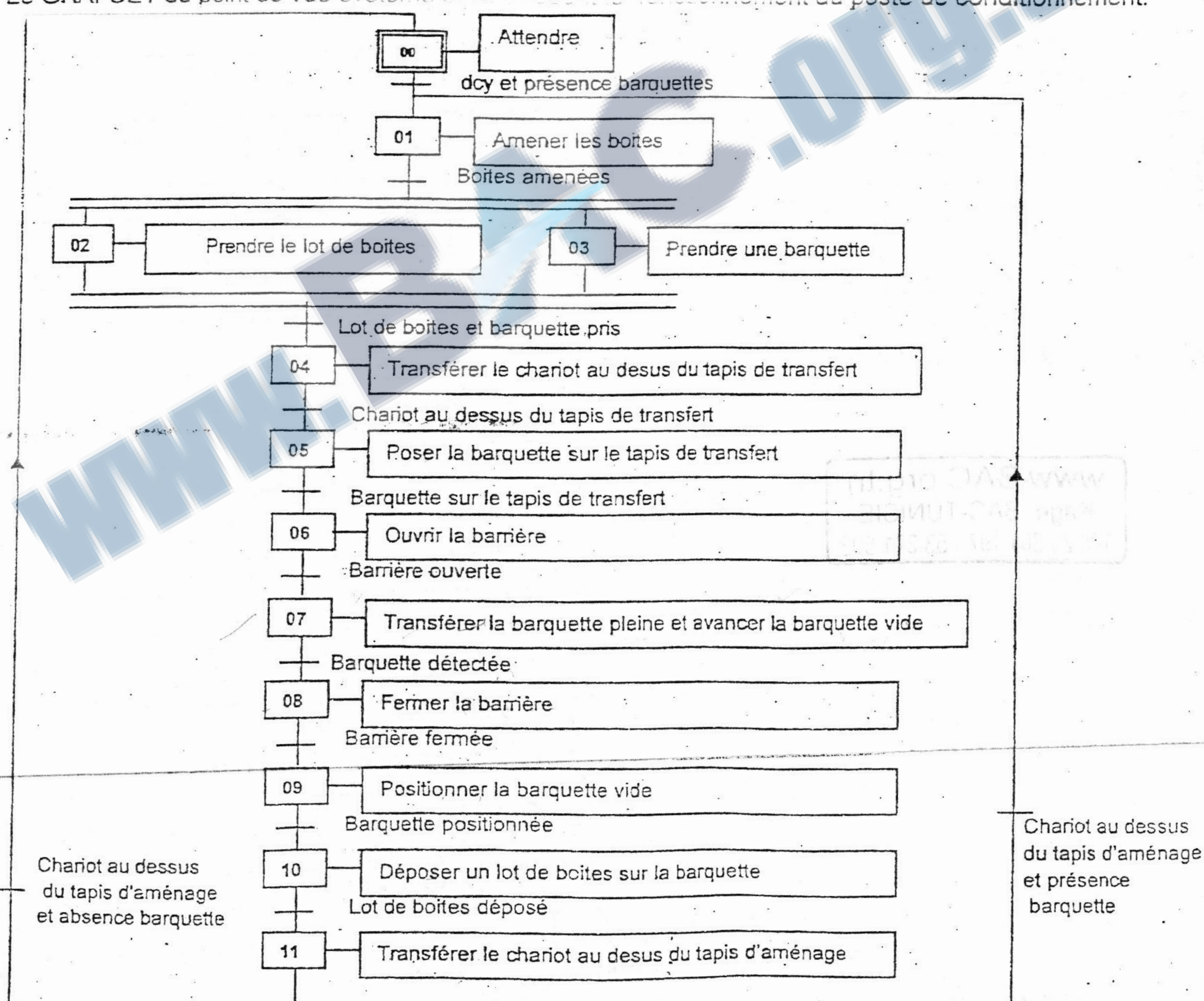
Le système est commandé par un automate programmable industriel de type **AEG A020**, on donne ci-dessous la structure générale d'un API et le tableau de codes automates relatifs au entrées-sorties du système de conditionnement.



E/S	Code automate	E/S	Code automate
a_1	I1	14M1	Q16
a_0	I2	12M1	Q1
ℓ_{11}	I3	14M2	Q2
ℓ_{10}	I4	12M2	Q3
ℓ_{21}	I5	$V1^+$	Q4
ℓ_{20}	I6	$V1^-$	Q5
V_{11}	I7	$V2^+$	Q6
V_{10}	I8	$V2^-$	Q7
V_{21}	I9	KM1	Q8
V_{20}	I10	KM2	Q9
p	I11	$KM3_1$	Q10
Pb	I13	$KM3_2$	Q11
Pt	I14	$KM4_1$	Q12
S_0	I15	$KM4_2$	Q13
Sf	I16	dcy	I12

IV- DESCRIPTION DU FONCTIONNEMENT

Le GRAFCET du point de vue système suivant décrit le fonctionnement du poste de conditionnement.

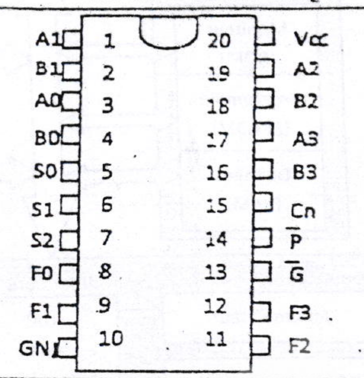


- **Schéma de brochage et table de fonctionnement de l'UAL (74LS 381)**

S2	S1	S0	Opérations réalisées
0	0	0	F = 0000
0	0	1	F= B – A
0	1	0	F = A – B
0	1	1	F = A + B
1	0	0	F = A XOR B
1	0	1	F = A OR B
1	1	0	F = A ET B
1	1	1	F = 1111

(-) : soustraction
(+) : addition

Schéma de brochage



- **Schéma de brochage et table de fonctionnement et chronogrammes du circuit intégré (40162)**

Schéma de brochage.

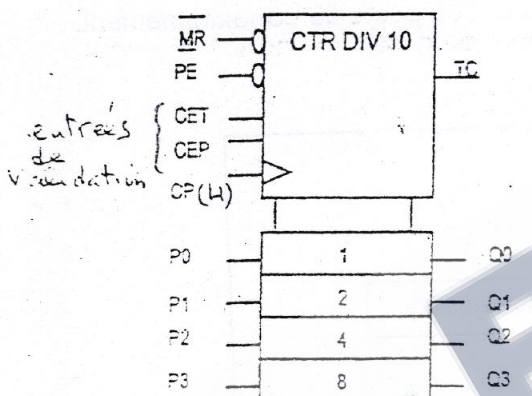
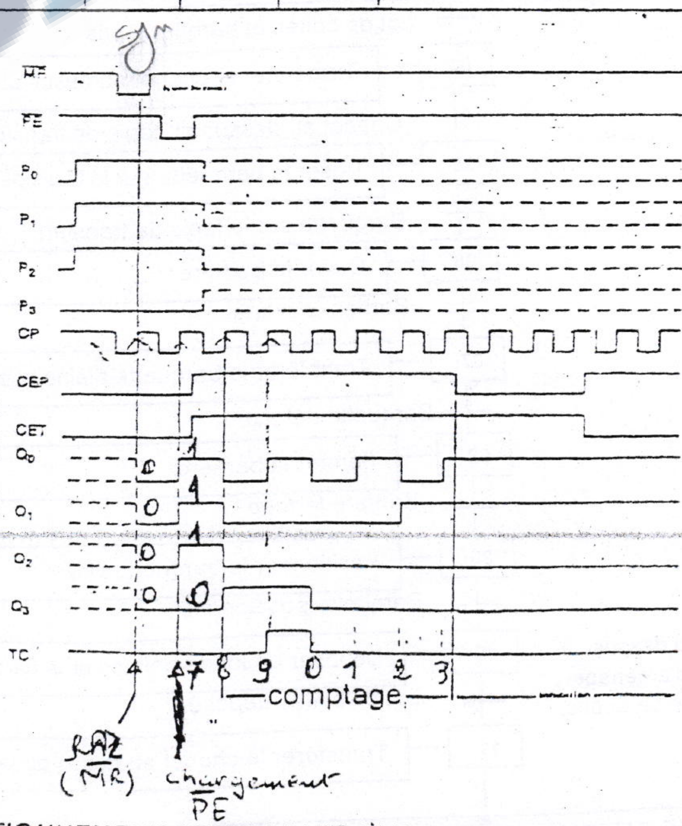


Table de fonctionnement des entrées

$\overline{MR}$	$\overline{PE}$	CEP	CET	Mode
1	0	x	x	Prépositionnement (Chargement)
1	1	0	x	Sans changement
1	1	x	0	Sans changement
1	1	1	1	Comptage
0	x	x	x	RAZ

Chronogrammes.



Lycée Med Ali
Sfax

2012/2013

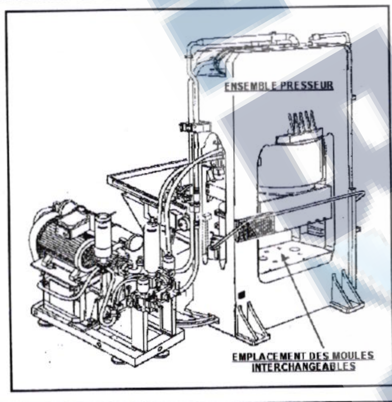
DEVOIR DE SYNTHESE N°1

Discipline: Technologie **4ème ScT2** **Durée : 4H**

FABRICATION DE CARREAUX EN GRES CERAME

1- Présentation du système :

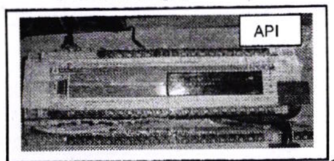
La production des carreaux en grés céramе est obtenue à partir d'un mélange d'argiles (appelé terre), qui est pressé à l'aide d'une presse pour former des carreaux pressés.
Le lot de 30 biscuits formés est éjecté dans le four à une température élevée pour cuire les biscuits.
La presse présentée ci-dessous s'insère dans la chaine de production de carreaux en grés cérame.

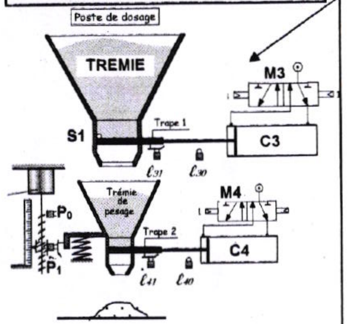


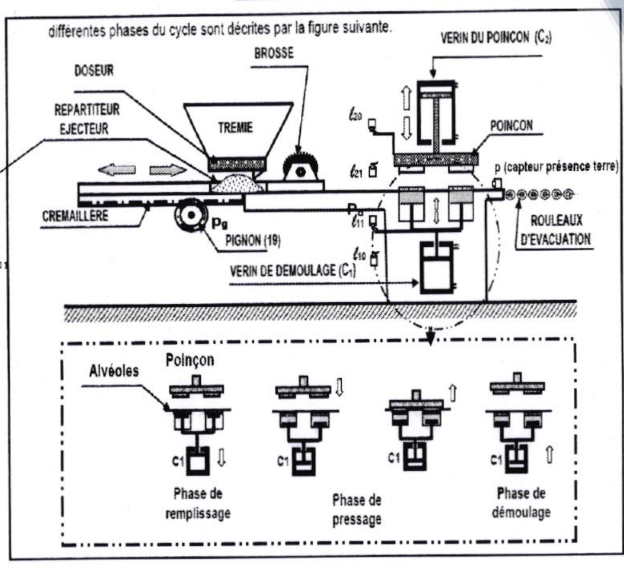
Le système de production des carreaux en grés cérame est constitué de 4 postes :
- Poste de stockage de mélange d'argiles en trémie ;
- **Poste de formation des biscuits (zone d'étude) ;**
- Poste d'éjection des biscuits dans le four ;
- Un automate programmable industriel pour la gestion du cycle de production.

2- Présentation du système d'étude :

La terre, stockée dans la trémie, est chargée sur le répartiteur/éjecteur via le doseur.
Les différentes phases du cycle sont décrites sur la figure suivante:
- Dosage
- Remplissage,
- Pressage,
- Démoulage,

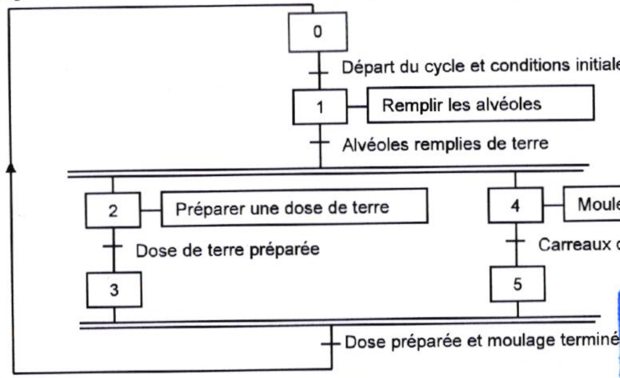






3- Description du fonctionnement :

Le GRAFCET d'un point de vue système représenté ci-dessous concerne les phases de dosage, de remplissage de la terre dans les alvéoles par les cavités du moule, le pressage de la terre par le poinçon et le démoulage des biscuits.
Remarques : *L'évacuation des biscuits sur les rouleaux d'évacuation ne fait pas l'objectif de cette étude. La présence de carreaux au poste de moulage est détectée par le capteur p.*



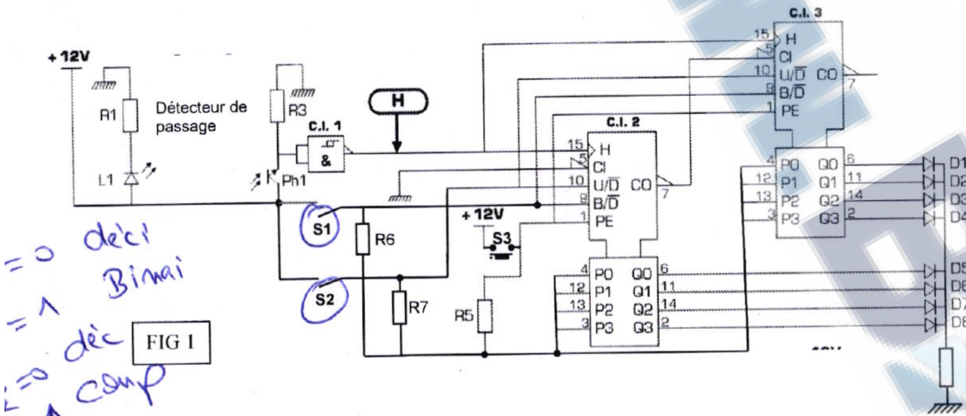
4- Tableau des affectations des entrées et des sorties :

Actions	Sorties système	Sorties Automate AEG	Entrées système	Entées Automate AEG
Dosage du mélange d'argile	14M3 12M3 14M4 12M4	Q1 Q2 Q3 Q4	ℓ_{31} ℓ_{30} ℓ_{41} ℓ_{40}	I12 I13 I14 I15
Remplissage de la terre dans les alvéoles	KM1 (Mt en grande vitesse) KM2 (Mt en petite vitesse)	Q5 Q6	P_g P_d	I10 I11
Commande de la brosse	KMB	Q7		
Presser la terre	14M2 12M2	Q8 Q9	ℓ_{21} ℓ_{20}	I8 I9
Démouler les carreaux	14M1 12M1	Q10 Q11	ℓ_{11} ℓ_{10}	I6 I7
Capteur présence terre dans la trémie			S_1	I5
Capteurs de pesage			P_0	I4
			P_1	I3
Capteur présence terre			p	I2
Bouton départ du cycle			dcy	I1

5- Tableau d'affectation des étapes du GRAFCET :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M10	M11	M12	M13

6- Dispositif de comptage des lots de carreaux de cérame. Ce dispositif utilise deux compteurs intégrés synchrone **CD 4029** comme l'indique le schéma suivant :

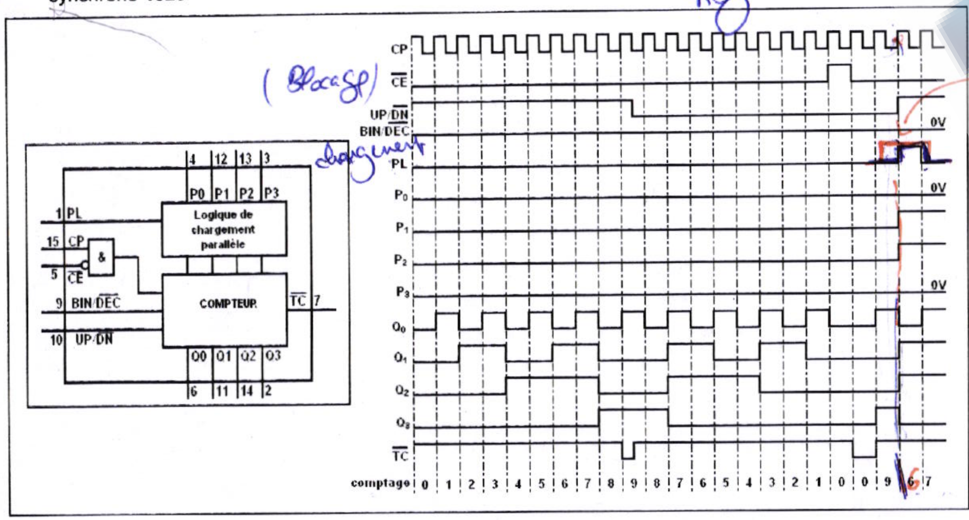


=0 déci
Binai
=1 déc
=0 comp
=1

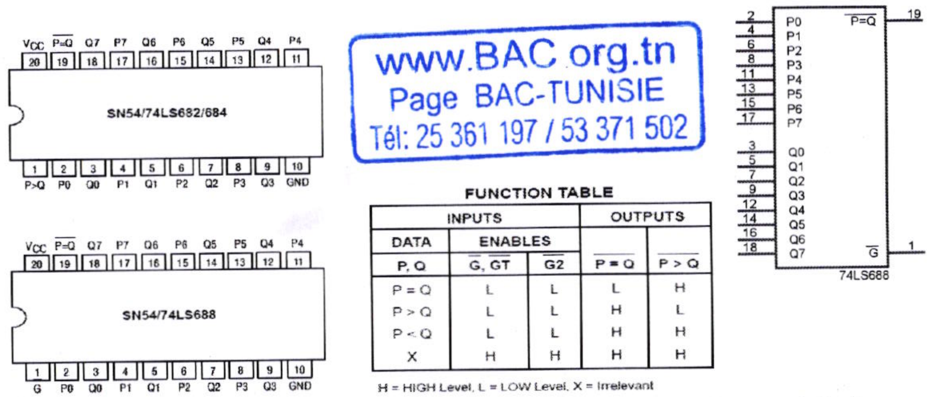
FIG 1

7- Documents constructeur : Schéma de brochage et chronogrammes : Compteur intégré synchrone **4029**

Asy



Dossier Technique FABRICATION DE CARREAUX EN GRES CERAME Page 3/6

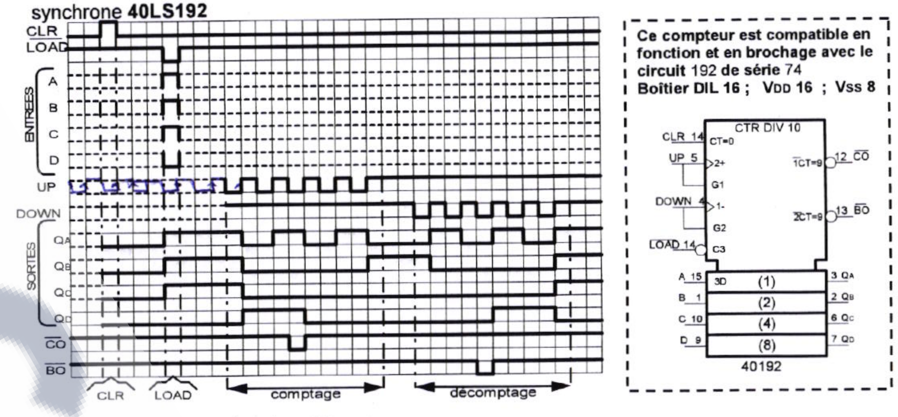


FUNCTION TABLE

INPUTS			OUTPUTS	
DATA	ENABLES			
P, Q	$\overline{G}$, GT	G2	P = Q	P > Q
P = Q	L	L	L	H
P > Q	L	L	H	L
P < Q	L	L	H	H
X	H	H	H	H

H = HIGH Level, L = LOW Level, X = Irrelevant

9- Documents constructeur : Schéma de brochage et chronogrammes du Compteur intégré synchrone **40LS192**



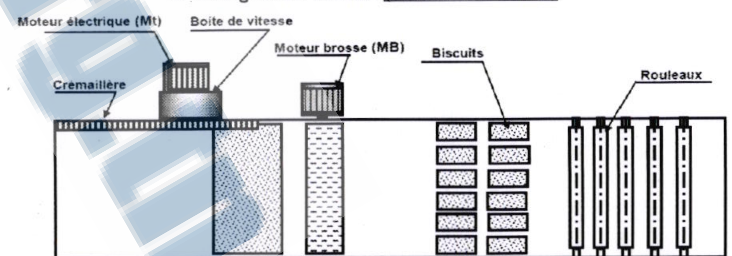
Ce compteur est compatible en fonction et en brochage avec le circuit 192 de série 74
Boitier DIL 16 ; VDD 16 ; Vss 8

10 – Fonctionnement du répartiteur :

Pour animer le répartiteur d'un mouvement de translation de va et vient le système est équipé d'une boite à deux vitesses voir (pages **5/6** et **6/6** du dossier technique) et d'une roue-crémaillère .

11 – Description de la boite des vitesses :

La boite des vitesses, représentée sur la page **6/6** du dossier technique, reçoit son mouvement du moteur **Mt**. La sélection des vitesses est assurée par la translation du pignon baladeur **(19)** commandé par un levier et une fourchette non représentés. Selon la position du baladeur on obtient : ⊙ Une petite vitesse (baladeur à gauche)
⊙ Une grande vitesse (baladeur à droite)



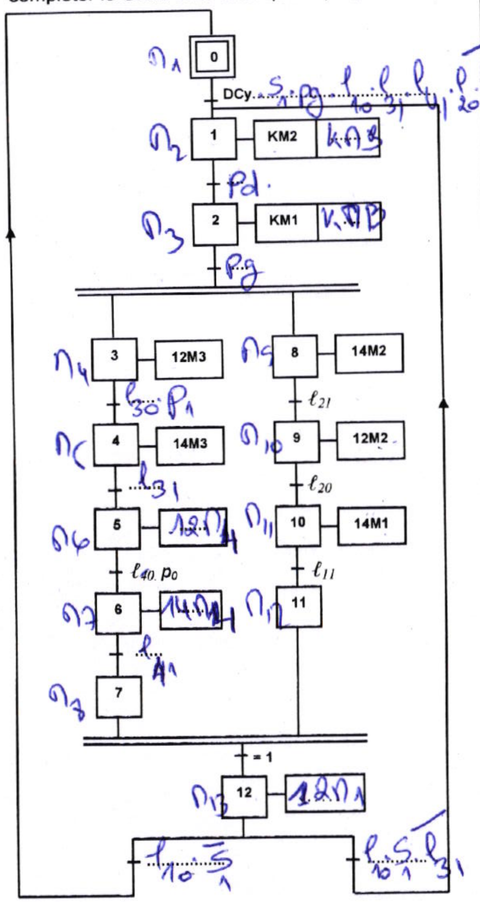
Dossier Technique FABRICATION DE CARREAUX EN GRES CERAME Page 4/6

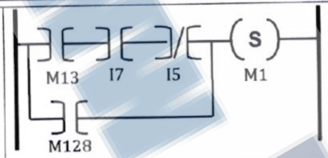
DEVOIR DE SYNTHESE N°1 L.S.MED ALI .SFAX | Epreuve d'électricité : CLASSE 4 SCTE | PROF : BEN JABALLAH Med

NOM : ……………… PRENOM : ……………… …/20

A) DESCRIPTION TEMPORELLE

On donne ci-dessous le GRAFCET du point de vue partie commande et le programme API AEG incomplets, en se référant au dossier technique pages(2/6 ;3/6)et aux tableaux des affectations compléter le GRAFCET ainsi que le programme API



Initialisation et Activation de l'étape0	
Désactivation de l'étape0	–] [– ——(R) M2 M1

Ad : instruction	commentaires
1 : AM1	Activation et Désactivation de l'étape 1
2 : AI1	
3 : AI5	
4 : AI10	
5 : AI7	
6 : AI12	
7 : AI14	
8 : AI9	
9 : ANI2	
10 : AI4	
11 : O(	
12: AM13	
13: AI7	
14: AI5	
15: ANI2	
16 :)	
17 : SLM2	
18 : AM3	
19 : RLM2	

Ad : instruction	commentaires
1 : AM2	Activation et Désactivation de l'étape 2
2 : AI11	
3 : SLM3	
4 : AM4	
5 : AM5	
6 : RLM3	

Ad : instruction	commentaires
1 : AM4	Activation et Désactivation de l'étape 4
2 : AI13	
3 : AI3	
4 : SLM5	
5 : AM6	
6 : RLM5	

Ad : instruction	commentaires
1 : AM2	Sortie KMB
2 : OM3	
3 : = Q7	

Ad : instruction	commentaires
1 : AM13	Sortie 12M1
2 : = Q11	

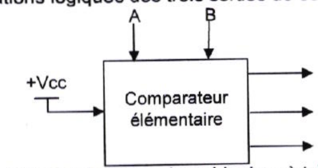
Sortie 12M2	–] [——( ) M10 Q9
Sortie 14M1	–] [——( ) M11 Q10

Feuille réponse 1/4

B) ETUDE D'UN CIRCUIT DE COMPARAISON

1) Pour comparer deux nombres binaires à un seul bit on utilise un circuit combinatoire élémentéire ayant deux entrées et trois srties traduisant les trois possibilités (A>B) , (A=B) et (A<B),

2-1 : rappeler les équations logiques des trois sorties de ce circuit en complétant le schéma suivant.



(A>B) := $A.\overline{B}$

(A=B) : = $A \odot B$

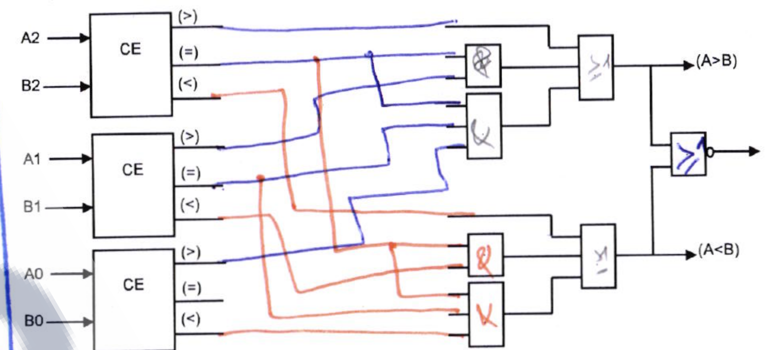
(A<B) : = $\overline{A}.B$

2-2 : Sachant que A et B sont deux nombres binaires à trois bits tel que : A = $A_2A_1A_0$ et B= $B_2B_1B_0$

Pour comparer ces deux nombres on utilise trois comparateurs élémentaire et un circuit logique d'interprétation tel que : **(compléter les symboles qui manquent)**

- : A>B si : A2 > B2 OU A2 = B2 ET A1 > B1 OU A2 = B2 ET A1 = B1 ET A0 > B0
- : A<B si : A2 < B2 OU A2 = B2 ET A1 < B1 OU A2 = B2 ET A1 = B1 ET A0 < B0
- : A=B si : A n'est pas > B ET A n'est pas < B

En se référant à la logique d'interprétation précédente, compléter le logigramme suivant.



C) Etude du dispositif de comptage

1- En se référant au dossier technique page (3/6) documents constructeur (Schéma de brochage et chronogrammes du Compteur intégré synchrone **CD4029)** et à la **fig1**du dispositif de comptage des carreaux de cérame ; Compléter les tableaux suivants en mettant **une croix dans les cases correspondantes :**

- **Le circuit intégré 4029 est un circuit :**

Binaire	X	BCD	X	hexadécimal	
Compteur seul		Décompteur seul		Compteur/décompteur	X

- **L'entrée CE (CI) est une entrée de :**

Validation	X	Chargement		Forçage à zéro	

- **L'entrée PL (PE) :**

Activée à niveau bas (0 Logique)		Activée à niveau haut (1 Logique)	X
Dépend du signal d'horloge		Ne dépend pas du signal d'horloge	X
chargement synchrone		chargement asynchrone	X

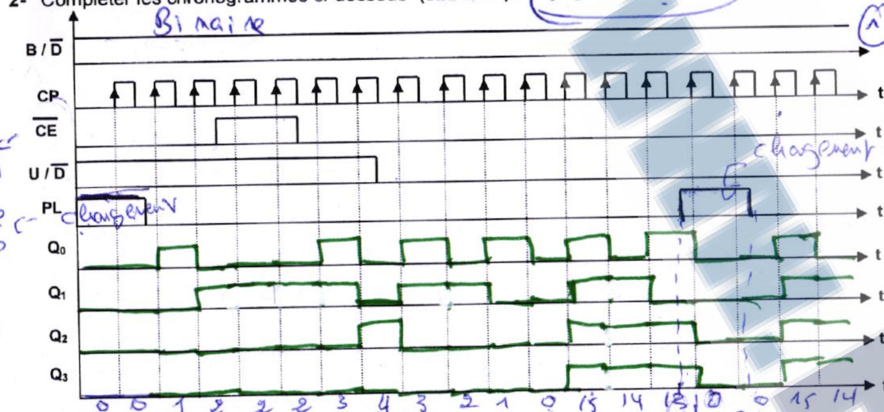
- **Mode de fonctionnement pour les différentes valeurs de S1 et S2,**

S1	S2	Compteur décimal	Compteur binaire	Décompteur décimal	Décompteur binaire
0	0			X	
0	1	X			
1	0				X
1	1		X		

Feuille réponse 1/4

Feuille réponse 2/4

2- Compléter les chronogrammes ci-dessous (sachant que $P_3\,P_2\,P_1\,P_0 = 0000$)



D) Modification du dispositif de comptage

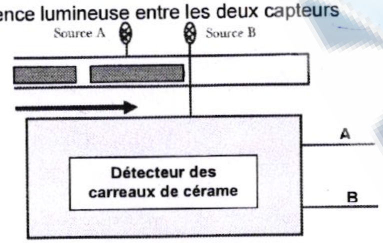
Le mouvement des carreaux sur le tapis d'évacuation peut constituer une source d'erreur, Le dispositif suivant permet de palier à cette défaillance technique.

Ce dispositif se compose de :

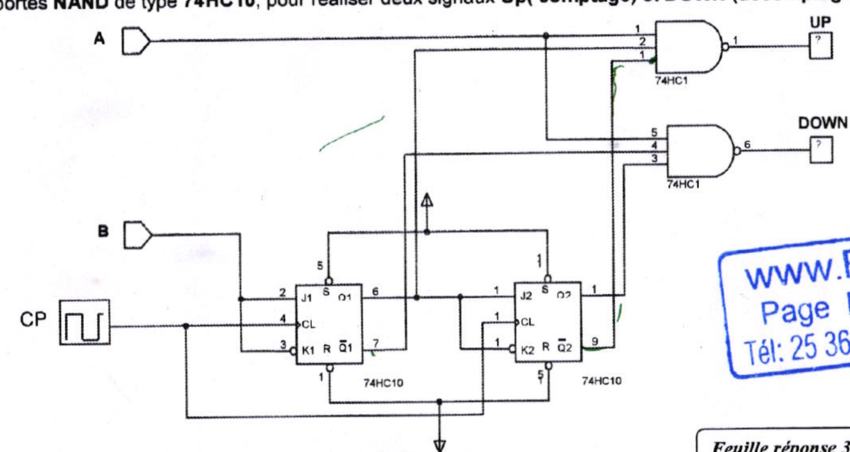
- deux sources lumineuses espacées par une distance réglable , très nettement inférieure à la dimension des carreaux, mais suffisante pour qu'il n'y ait aucune interférence lumineuse entre les deux capteurs

Lorsqu'**un carreau** coupe le faisceau issu de la source lumineuse A, **le signal A** en sortie du circuit de détection et de mise en forme **est à 1**.

Le signal **B** fonctionne de la même façon. Il est à **0** si aucun carreau ne coupe le faisceau issu de la source lumineuse **B**, et à **1** si une pièce coupe ce faisceau.



Le signal **B** est utilisé en entrée d'un ensemble de deux bascules **JK** de référence **74HC109** dont les entrées sont en fait **J** et **K** (**complémentée**) (voir le schéma ci-dessous). Les sorties **Q** et **$\bar{Q}$** des bascules sont associées au signal **A** en entrées de deux portes **NAND** de type **74HC10**, pour réaliser deux signaux **Up(comptage)** et **DOWN (décomptage)**.



Feuille réponse 3/4

1) Pour les deux bascules déterminer les équations logiques des entrées J et K.
J1 = ……B……K1 = ……B…… J2 = ……Q1…… K2 = ……Q1……

2) Ecrire les équations logiques des sorties **Up** et **DOWN** en fonction des entrées **A , Q1** et **Q2**
Up = …A.Q1.Q2……………DOWN=……A.Q1.Q2……

3) En se référant au schéma précédent, compléter la table de vérité et les chronogrammes suivants

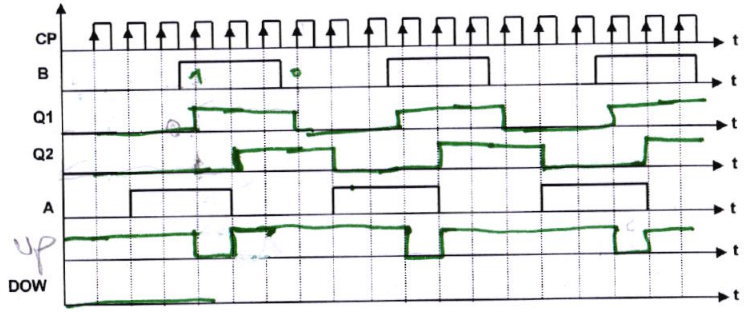


Table de vérité

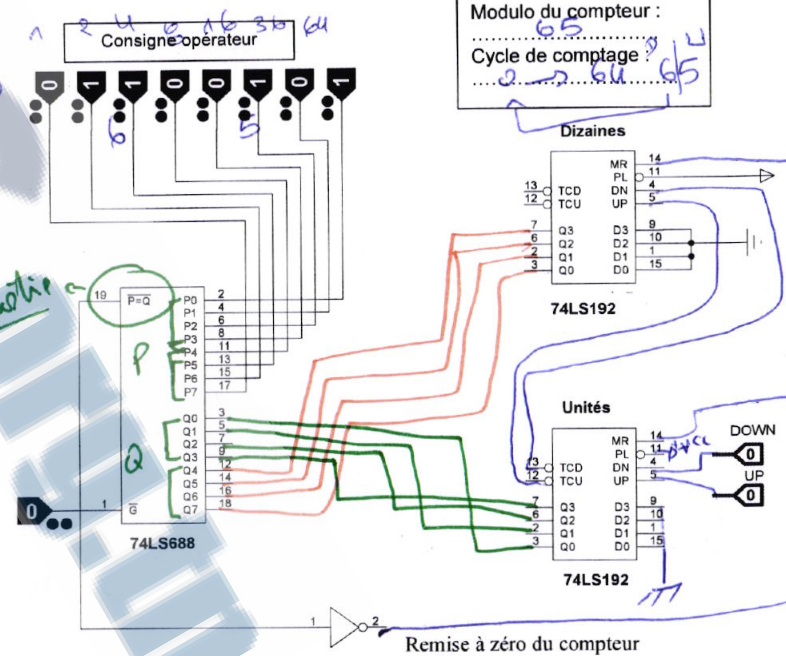
A	Q1	Q2	Up	DN
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

4) Les deux signaux **Up** et **Down** sont appliqués à un circuit de comptage utilisant deux compteurs intégrés BCD de type **74LS192** et un comparateur détecteur d'égalité **74LS688** permettant de comparer le mot binaire à la sortie du compteur et le consigne opérateur , comme l'indique le schéma incomplet suivant.

En se référant aux documents constructeur (dossier technique page **4/6**), On demande de compléter le schéma de câblage de ce circuit, en déduire, le modulo du compteur et le cycle de comptage sachant que le signal issu du comparateur permet de mettre à zéro le compteur.

Modulo du compteur : ……65……

Cycle de comptage : ……0 ... 64……



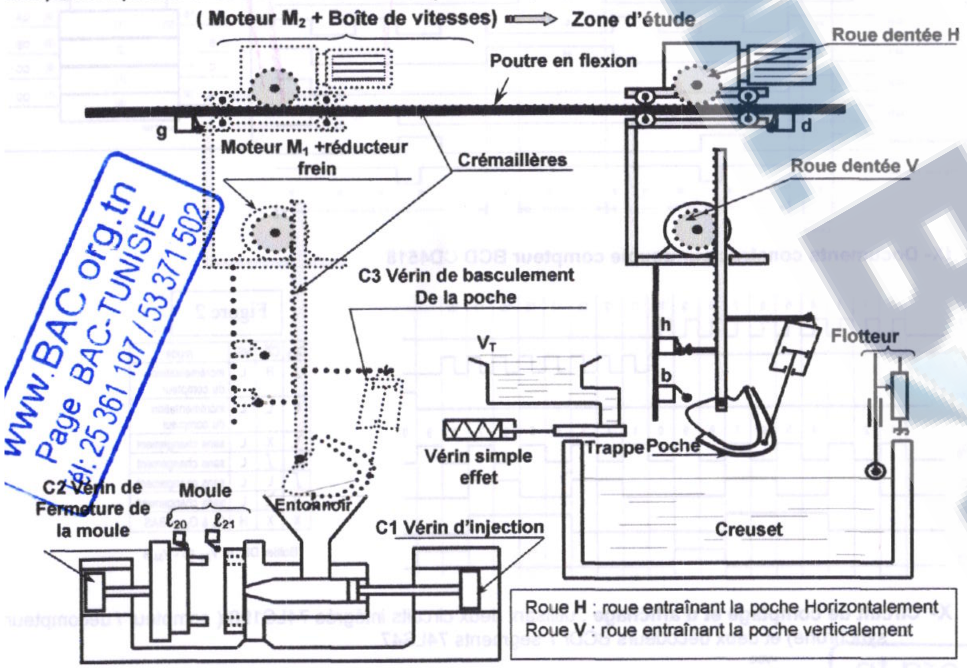
Feuille réponse 4/4

Lycée Med Ali Sfax		Devoir de Synthèse N° 1	
Disciplines : Technologie			Coefficient : 4
Classe :	4ème Sciences techniques	Durée : 4 heures	2013-2014

UNITE AUTOMATIQUE DE MOULAGE

I- Mise en situation :

Le système représenté ci-dessous permet de mouler des pièces sous pression dans un moule alimenté par une poche à partir d'un bac contenant du métal (Aluminium) en fusion arrivant d'un four d'alimentation.



II- Constitution :

Le système ci dessus est constitué principalement :
- D'un moteur M_1 à deux sens de marche + réducteur frein entraînant la poche verticalement.
- D'un moteur M_2 + Boîte de vitesses entraînant la poche horizontalement.
- D'un vérin d'injection (C1).
- D'un vérin de fermeture de la moule (C2).
- D'un vérin de basculement de la poche (C3).

III- Description du système :

La presse à mouler est alimentée par une poche à partir d'un creuset contenant du métal en fusion. La poche se remplie par la descente dans le creuset. Sa vidange se fait par le vérin C_3. Les mouvements vertical et horizontal de la poche sont assurés respectivement par les moteurs à deux sens de marches M_1 et M_2. La position initiale de la poche est au dessus du creuset et le moule est ouvert.
L'action sur le bouton départ cycle **(dcy)** provoque la fermeture de la moule et la descente de la poche. La poche doit rester **7 secondes** dans le creuset pour une homogénéisation des températures avant la remontée. La poche est ensuite translatée jusqu'à la position au dessus du moule.
- Si le moule est fermée la poche effectuera la coulée, l'injection est commandée, cette commande sera maintenue jusqu'au retour de la poche au dessus du creuset, l'injection est terminée le moule s'ouvre.
- Si le moule est ouvert. La poche attendra **2 secondes** avant de revenir en position d'attente au dessus du creuset. Un avertisseur sonore sera actionné si la poche remplie reste plus **d'une minute** en attente.

1

IV- Choix technologique de la partie opérative :

Processeurs	Mouvement	Actionneur	Pré-actionneur	Codes API	Capteurs	Codes API
Poche	- Translation verticale	- Moteur M_1	KM_H KM_B	Q1 Q2	h b	I1 I2
	- Translation horizontale	- Moteur M_2	KM_D KM_G	Q3 Q4	d g	I3 I4
	- Basculement	- Vérin C_3	Distributeur 5/2 M_3 : - $14M_3$ (Sortie) - $12M_3$ (Rentrée)	Q5 Q6	ℓ_{31} ℓ_{30}	I5 I6
Injecteur	- Injection	- Vérin C_1	Distributeur 5/2 M_1 : - $14M_1$ (Sortie) - $12M_1$ (Rentrée)	Q7 Q8	ℓ_{11} ℓ_{10}	I7 I8
Moule	- Fermeture du moule - Ouverture du moule	- Vérin C_2	Distributeur 5/2 M_2 : - $14M_2$ (Sortie) - $12M_2$ (Rentrée)	Q9 Q10	ℓ_{21} ℓ_{20}	I9 I10
Avertisseur sonore	Déclenchement de l'avertisseur	H	KA	Q11	S : Arrêt de l'avertisseur.	I11
Temporisateurs	Enclenchement d'une temporisation		T1 T2 T3	T1(7S) T2(2S) T3(60S)	t1 t2 t3	T1 T2 T3
			-		dcy : Départ cycle	I12

Tableau d'affectation des étapes du GRAFCET :

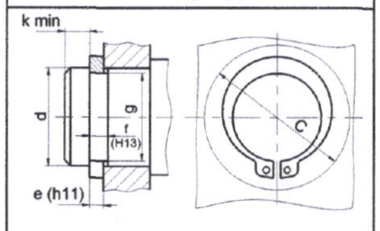
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M10	M11	M12	M13	M14	M15

V- Description de la boîte de vitesses :

La boite des vitesses, représentée sur la page **5/5** du dossier technique, reçoit son mouvement du moteur **M_1**. La sélection des vitesses est assurée par la translation du pignon baladeur **(8)** commandé par un levier et une fourchette **(22,24 et 25)**.

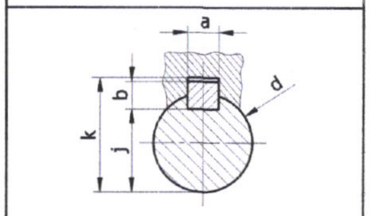
VI - Éléments standard :

Anneau élastique pour arbre



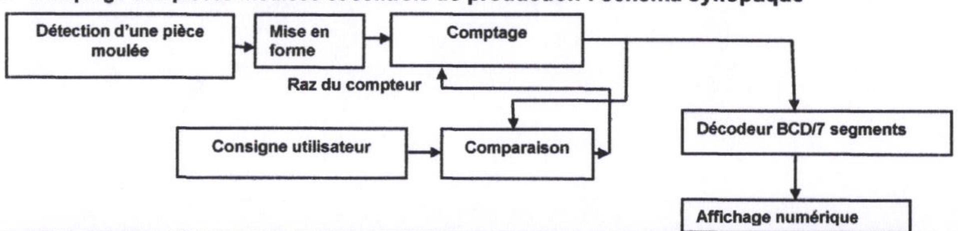
d	e	c	f	g	k
17	1	25,6	1,1	16,2	1,2
20	1,2	29	1,3	19	1,5
22	1,2	31,4	1,3	21	1,5
25	1,2	34,8	1,3	23,9	1,65
28	1,5	38,4	1,6	26,6	2,1

Clavette parallèle, forme A



d	a	b	j	k
de 17 à 22 inclus	6	6	d-3,5	d+2,8
22 à 30	8	7	d-4	d+3,3
30 à 38	10	8	d-5	d+3,3
38 à 44	12	8	d-5	d+3,3

VII- Comptage des pièces moulées et contrôle de production : schéma synoptique



2

VIII- Documents constructeur compteur intégré 74LS190

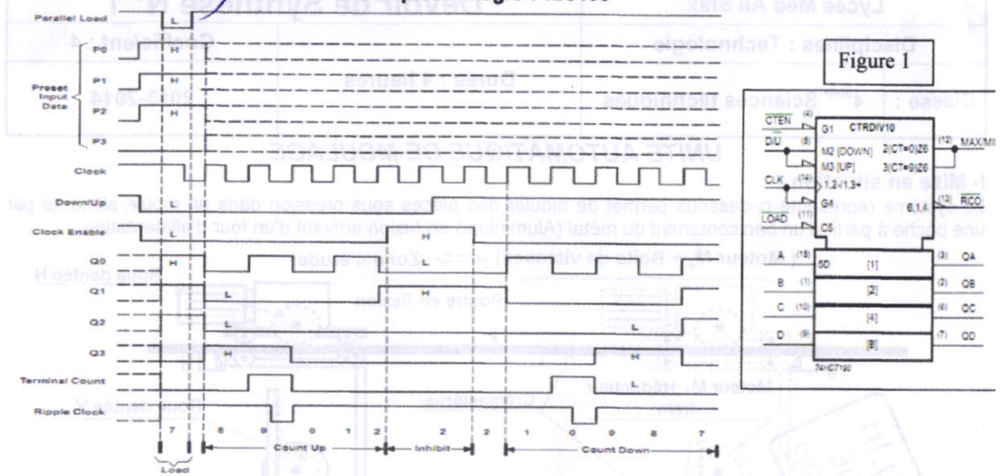


Figure 1

IX- Documents constructeur double compteur BCD CD4518

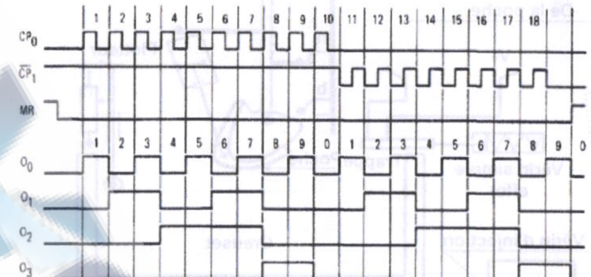


Figure 2

CP_0	$\overline{CP_1}$	MR	mode
ʃ	H	L	incrémentation du compteur
L	ʅ	L	incrémentation du compteur
ʅ	X	L	sans changement
X	ʃ	L	sans changement
ʃ	L	L	sans changement
H	ʅ	L	sans changement
X	X	H	O_0 à O_3 = BAS

Boîtier DIL 16 V_{DD} 16 - V_{SS} 8

X- Circuit de comptage et d'affichage : utilisant deux circuits intégrés 74LS190 (compteur / décompteur synchrone) et deux décodeurs BCD/ 7 segments 74LS47.

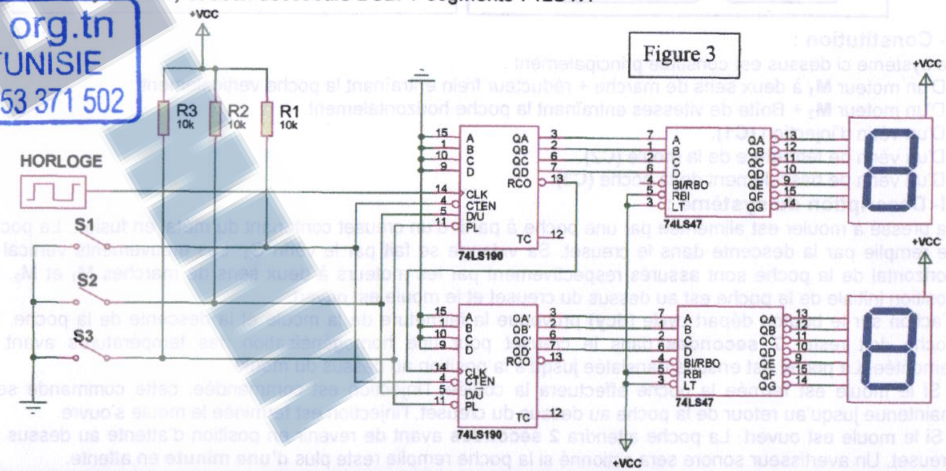


Figure 3

3

DEVOIR DE SYNTHESE N°1
L.S.MED ALI .SFAX

Epreuve d'électricité : CLASSE 4 SCTE

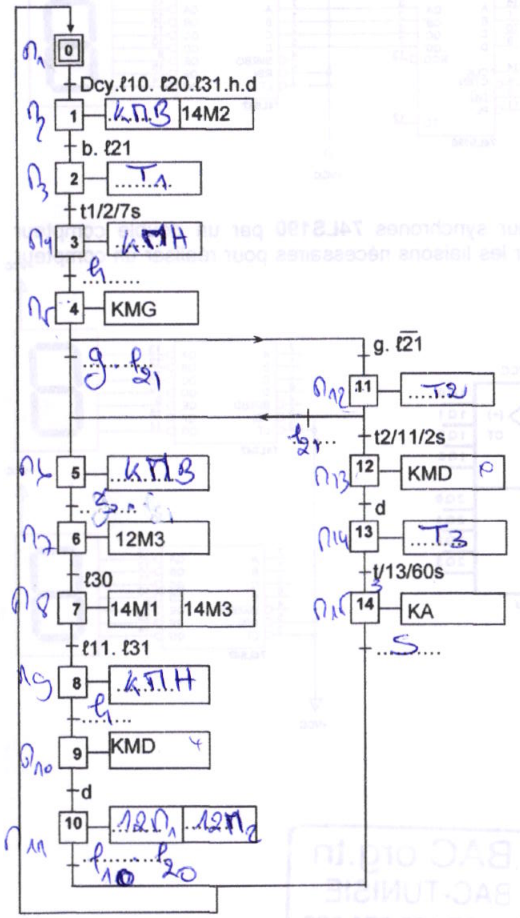
NOM : TOUNSI
PRENOM : FATMA

2013-2014

20

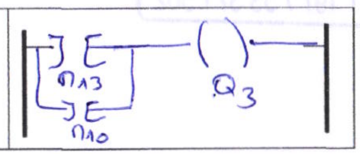
A) DESCRIPTION TEMPORELLE

On donne ci-dessous le GRAFCET du point de vue partie commande et le programme API AEG incomplets, en se référant au dossier technique et GRAFCET ainsi que le programme API



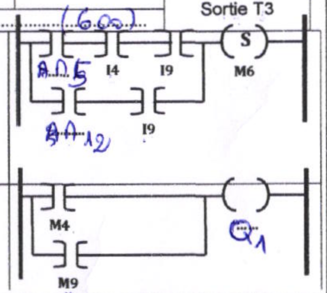
Ad : instruction	commentaires
1 : AM128	Initialisation
2 : SLM1	
3 : AM128	
4 : RLM128	
Ad : instruction	**commentaires**
1 : AM11	Activation de l'étape 0
2 : AI8	
3 : AI10	
4 : O(	
5 : AM15	
6 : AI11	
7 :)	
8: SLM1	
Ad : instruction	**commentaires**
1: AM2	Désactivation de l'étape 0
2: RLM1	
Ad : instruction	**commentaires**
1 : AM4	Activation et Désactivation de l'étape 4
2 : AT1	
3 : SLM5	
4 : AM6	
5 : OM12	
6 : RLM4	
Ad : instruction	**commentaires**
1 : AM5	Activation et Désactivation de l'étape 11
2 : AI4	
3 : AN I9	
4 : SLM12	
5 : AM6	
6 : OM13	
7 : RLM12	
Ad : instruction	**commentaires**
1 : AM2	Sortie KMB
2 : OM6	
3 : = Q2	
Ad : instruction	**commentaires**
1 : AM8	Sortie 14M3
2 : = Q5	
Ad : instruction	**commentaires**
1 : AM14	Sortie T3
2 : = T3 (6,60)	

Sortie KMD



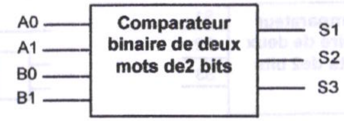
Activation étape 5

Sortie KMH



B) ETUDE D'UN CIRCUIT DE COMPARAISON

1) Pour comparer deux nombres binaires à deux bits (mot A et mot B), on utilise un circuit combinatoire ayant quatre entrées et trois sorties S1, S2 et S3 traduisant les trois possibilités : (A<B) , (A=B) et (A>B),comme l'indique le schéma suivant.



1-1: pour ce circuit compléter la table de vérité en déduire les équations logiques des trois sorties .

Entrées				Sorties		
Mot A		Mot B		S1	S2	S3
A1	A0	B1	B0	A<B	A=B	A>B
0	0	0	0			
0	0	0	1			
0	0	1	0			
0	0	1	1			
0	1	0	0			
0	1	0	1			
0	1	1	0			
0	1	1	1			
1	0	0	0			
1	0	0	1			
1	0	1	0			
1	0	1	1			
1	1	0	0			
1	1	0	1			
1	1	1	0			
1	1	1	1			

S1= ....

S2= ....

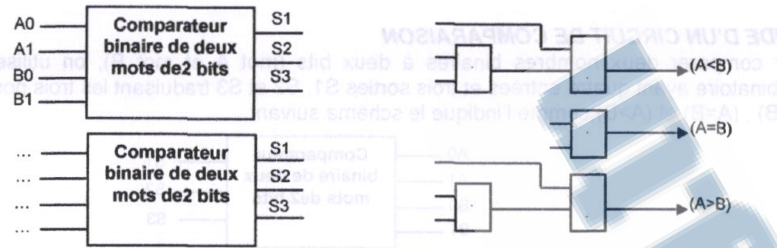
S3= ....

1.2 : On donne les équations simplifiées des sorties S1 utilisant des opérateurs logiques de base et des opérateurs XNOR : $S1= \overline{A1}.B1 + \overline{A0}.B0.(A1 \odot B1)$,
Réecrire les équations des sortie S2 et S3 en utilisant des opérateurs logiques de base et des opérateurs XNOR (démonstration exigée).

S2= ....

S3= ....

1.3 : Pour comparer deux nombre A =A3A2A1A0 et B=B3B2B1B0 de quatre bits , on utilise deux comparateurs à deux bits , compléter le scéma du comparateur 4 bits , en ajoutant les liaisons et les opérateurs logiques nécessaires



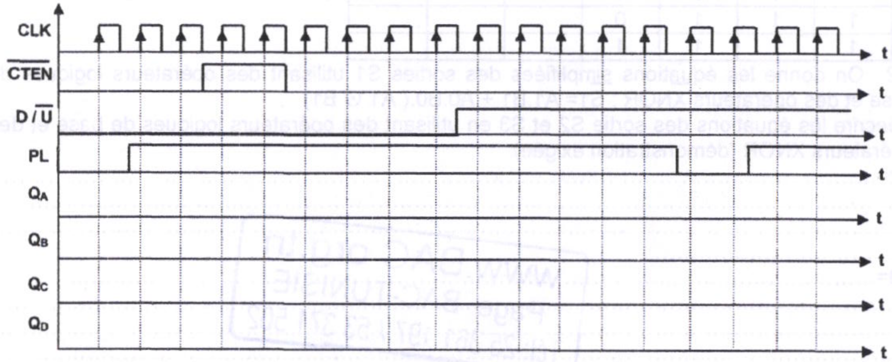
C) **Etude du dispositif de comptage**

1- En se référant au dossier technique page (3/4) documents constructeur (Schéma de brochage et chronogrammes du Compteur intégré synchrone **74LS190**) et au du circuit de comptage et d'affichage (**figure** 3),

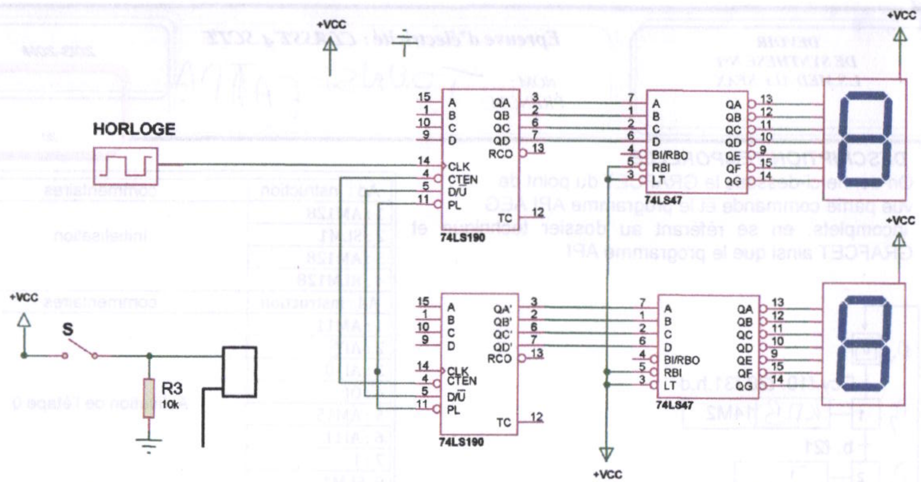
1-1: Compléter le tableau suivant en mettant **une croix dans les cases correspondantes :**

Etats logiques des entrées		Fonctionnement en compteur	Fonctionnement en décompteur	Chargement parallèle	Blocage
S1	0(ouvert)				
	1(fermé)				
S2	0(ouvert)				
	1(fermé)				
S3	0(ouvert)				
	1(fermé)				

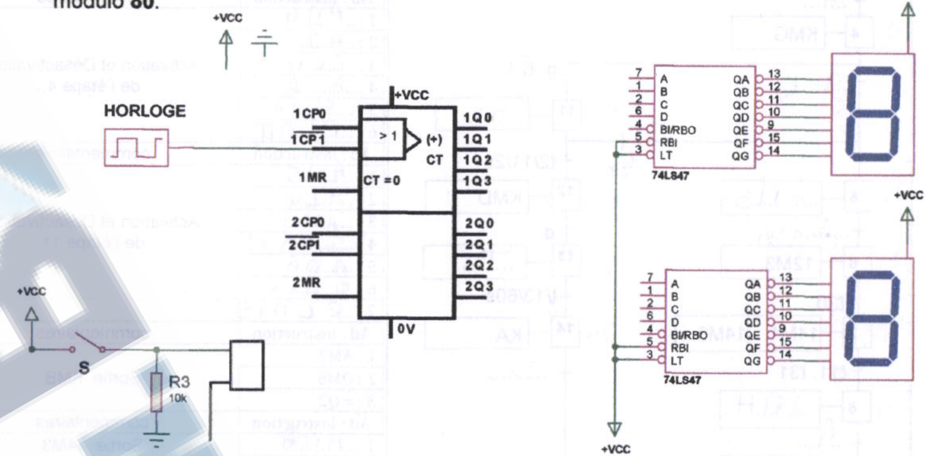
1-2: Compléter les chronogrammes des sorties QA , QB, QC et QD relatif à une séquence de fonctionnement du compteur 74LS190 ci-dessous (sachant que DCBA = 0000)



1-3 : On désire réaliser un **compteur BCD** modulo **80** avec une mise en cascade asynchrone en utilisant des circuits intégrés **75LS190**, compléter les liaisons nécessaires, prévoir un boutons d'initialisation **S**.



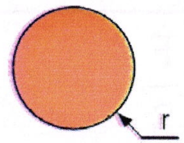
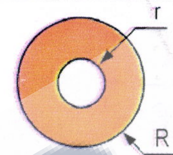
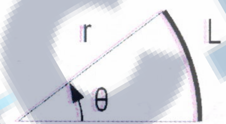
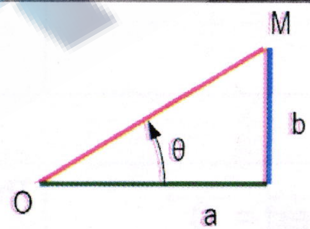
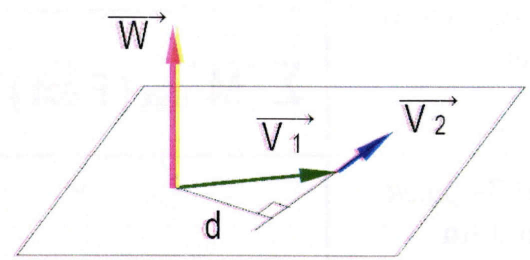
2- Si on remplace les circuits compteur synchrones **74LS190** par un double compteur asynchrone **BCD CD4518**, compléter les liaisons nécessaires pour réaliser un compteur modulo **80**.



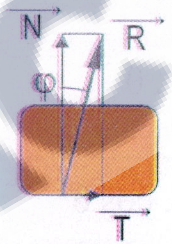
SAKKA-Walid

FORMULAIRE DE MECANIQUE

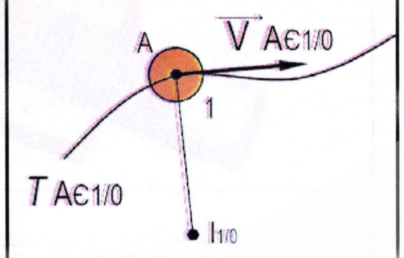
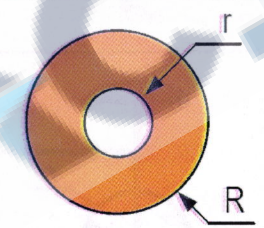
formulaire de base

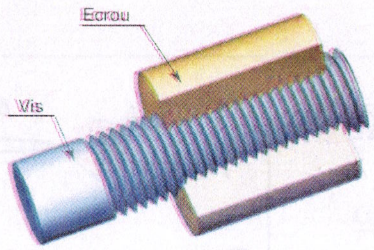
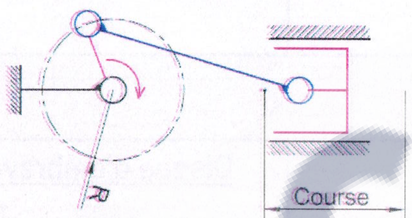
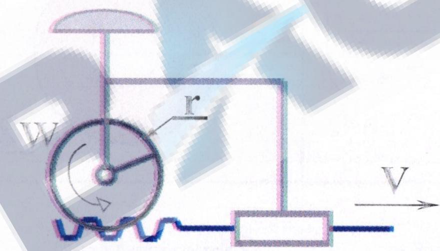
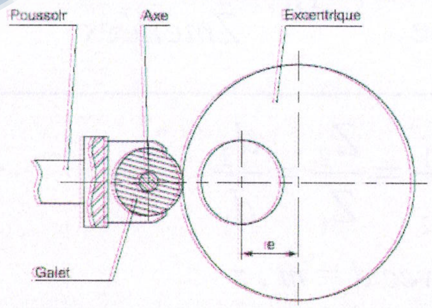
Aire d'un disque	$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \dfrac{d^2}{4}$		A : aire en mm² r : rayon du disque en mm d : diamètre du disque en mm
Aire d'un anneau	$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$		A : aire en mm² r : rayon intérieur de l'anneau en mm R : rayon extérieur de l'anneau en mm
Longueur d'un arc	$L = r \cdot \theta$		L : longueur en mm r : rayon en mm θ : angle en rad
Relations dans le triangle rectangle	$a = OM \cdot \cos\theta$ $b = OM \cdot \sin\theta$ $b/a = \tan\theta$ $a^2 + b^2 = OM^2$		a, b, OM : longueurs en mm θ : angle en ° (degré)
Produit vectoriel	$\vec{V_1} \times \vec{V_2} = \vec{W}$ $\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d \\ e \\ f \end{vmatrix} \begin{vmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{vmatrix}$ $\lVert \vec{W} \rVert = \lVert \vec{V_2} \rVert \times d$	 ... et la règle du tire-bouchon !	

SAKKA-Walid

Poids d'une masse	$P = m.g$	P : poids en N m : masse en kg g : accélération de la pesanteur en m/s²	
Pression	$P = \frac{F}{S}$	p : pression en MPa (N/mm²) F : force en N S : surface pressée en mm²	
Raideur d'un ressort	$k = \frac{F}{f}$	k : raideur du ressort en N/mm F : force appliquée en N f : flèche* du ressort en mm * différence entre sa longueur initiale et sa longueur sous charge	
Frottement	$T = N . f$		T : "force de frottement" (ou composante tangentielle) en N N : composante normale en N f : facteur de frottement (sans unité) avec f = tgφ
Statique			
Principe fondamental de la statique	$\sum \vec{F}ext = \vec{0}$	Théorème de la résultante statique	Pour un système matériel isolé
	$\sum \vec{M}_{Bxyz}(\vec{F}ext) = \vec{0}$	Théorème du moment statique	Tous les moments des résultantes appliquées au système matériel isolé doivent être définis au même point (B)
Changement de point d'expression d'un moment	$\vec{M}_B(\vec{R}) = \vec{M}_A(\vec{R}) + \vec{BA} \times \vec{R}$		

SAKKA-Walid

Cinématique			
Mouvement plan	$\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = \overrightarrow{AI_{1/0}} \times \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ vitesse linéaire : **Autrement dit, $\underline{V = r \cdot \omega}$ pour un mouvement de rotation circulaire**		I1/0 représente le CIR du mouvement de 1/0
Transmission de puissance			
Couple transmissible par friction (embrayage, limiteur de couple, …)	$C_t = \frac{2}{3} \cdot n \cdot \lVert\vec{F}\rVert \cdot f \cdot \left(\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\right)$	Disque d'embrayage 	Ct : couple transmissible en N.mm r:rayon intérieur de garniture en mm R: rayon extérieur de garniture en mm n: nombre de contacts f: facteur de frottement (sans unité)
Rapport de réduction	$r = \frac{N\,\text{sortie}}{N\,\text{entrée}} = (-1)^c \cdot \frac{Zmenantes}{Zmenées}$		r : rapport de réduction Ni : fréquence de rotation en tr/min c : nombre de contacts extérieurs z : nombre de dents
Transmission par courroie et transmission par engrenage	$\frac{N_1}{N_2} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{d_2}{d_1}$ *avec* $d = m \cdot z$ *la dernière égalité (= d_2/d_1) n'est pas valable pour les couples roue + vis sans fin*		n : fréquence de rotation en tr/min z : nombre de dents d : diamètre de poulie ou diamètre de roue en mm m : module de denture en mm

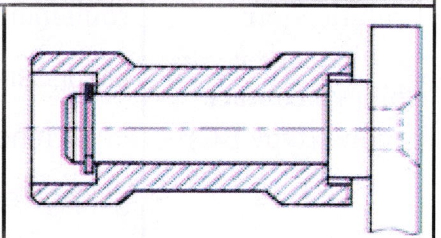
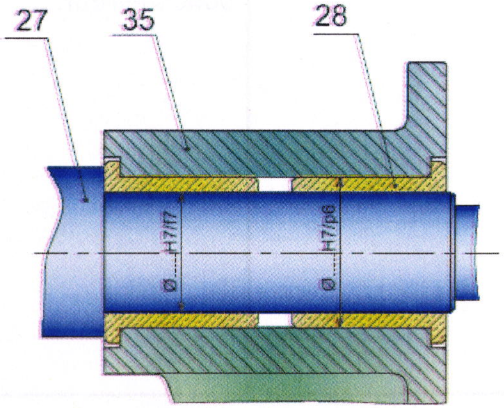
Principe vis-écrou (rotation de vis provoquant une translation d'écrou)	$s = p.\theta.\dfrac{1}{2.\pi}$ $V = p.\dfrac{N}{60}$		s : déplacement de l'écrou en mm p : pas de vis en mm (par tour), θ : angle de rotation de la vis en rad v : vitesse linéaire de l'écrou en mm/s N : fréquence de rotation en tr/min
Principe bielle-manivelle (réversible)	$C = 2 . e$		C : course du piston (translation) en mm e : excentration de la manivelle (rotation) en mm
Principe pignon-crémaillère (réversible)	$s = r . \theta$ $v = r . \omega$ mm/s		s : déplacement de la crémaillère en mm r : rayon primitif du pignon en mm θ : angle de rotation du pignon en rad v : vitesse linéaire de la crémaillère en mm/s ω : vitesse angulaire du pignon en rad/s
Principe came excentrique - poussoir (non réversible) (rotation de came provoquant une translation de poussoir)	$C = 2 . e$		C : course du poussoir (translation) en mm e : excentration de la came (rotation) en mm

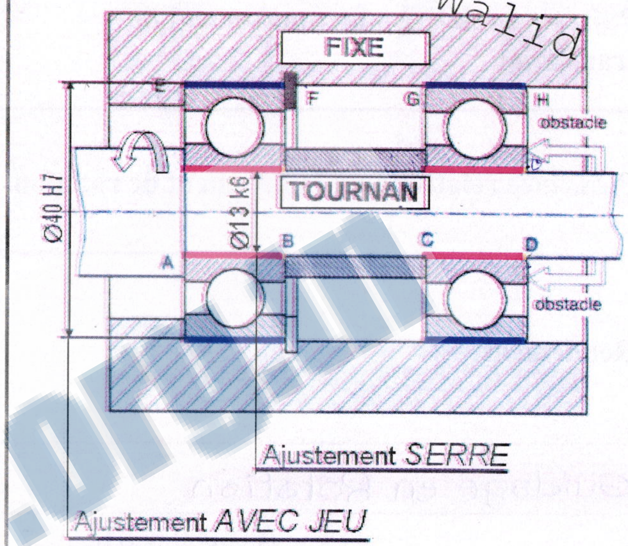
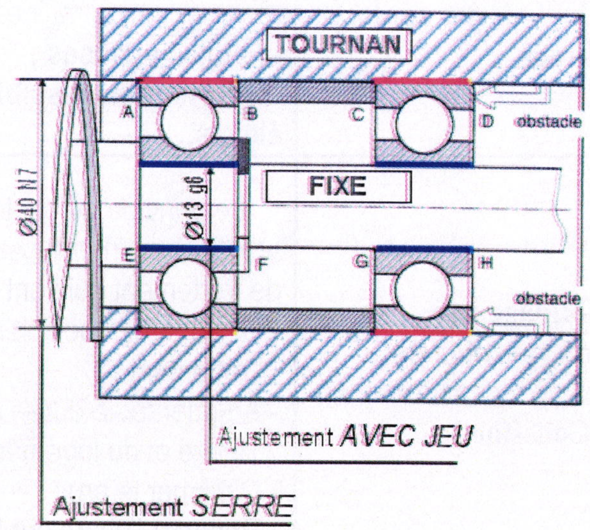
Page Facebook : BAC – TUNISIE Site Web : www.BAC.org.tn Admin : Saber Gù Tél : 28.355.106

SAKKA-Walid

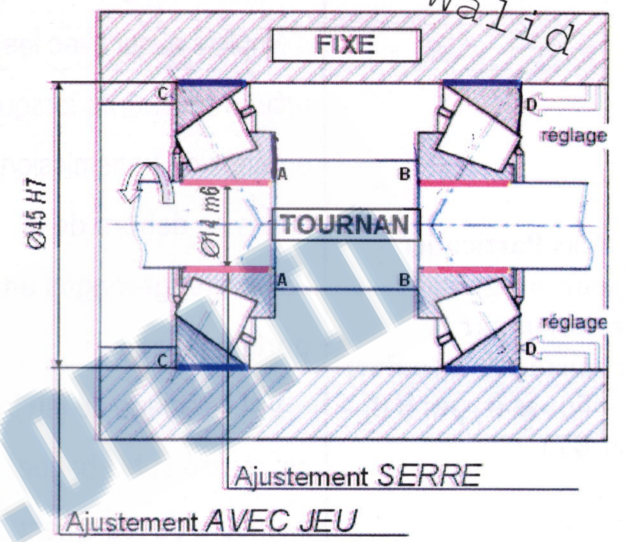
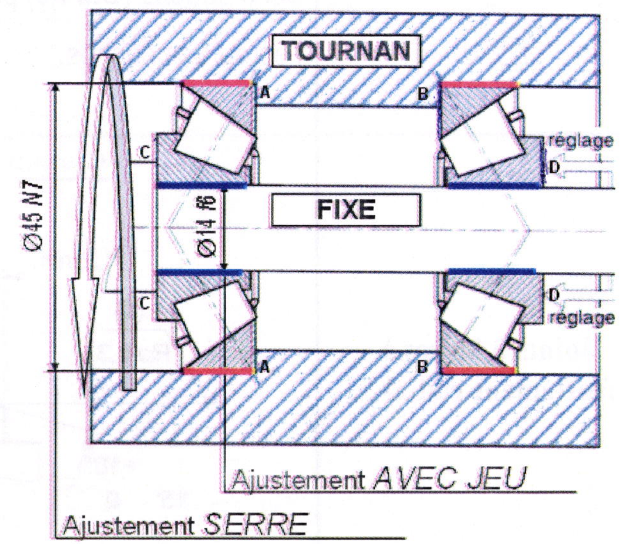
Puissance relative à un mouvement de translation	$P = F \cdot V$	P : puissance en W F : force en N v : vitesse linéaire en m/s
Puissance relative à un mouvement de rotation	$P = C \cdot \omega$ N.m	P : puissance en W C : couple en N.m ω : vitesse angulaire en rad/s
Rendement	$\eta = \dfrac{P_{sortie}}{P_{entrée}} = \dfrac{P_{utile}}{P_{absorbée}}$	P_{sortie} : Puissance de Sortie en W $P_{entrée}$: Puissance d'entrée en W P_{utile} : Puissance utile W $P_{absorbée}$: Puissance absorbée en W

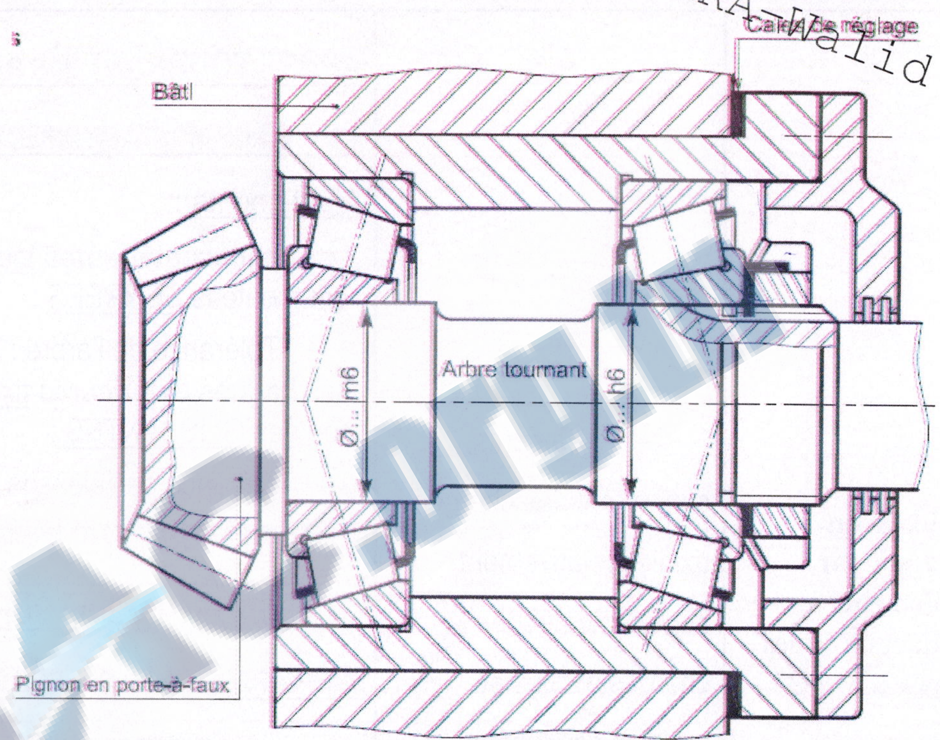
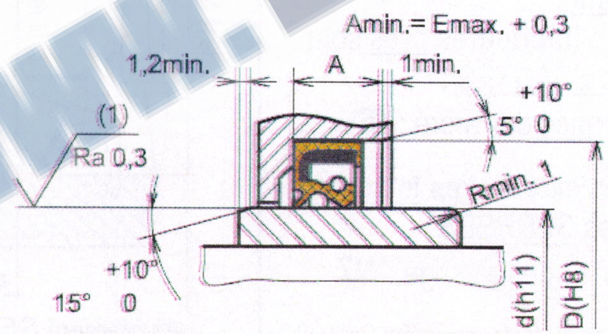
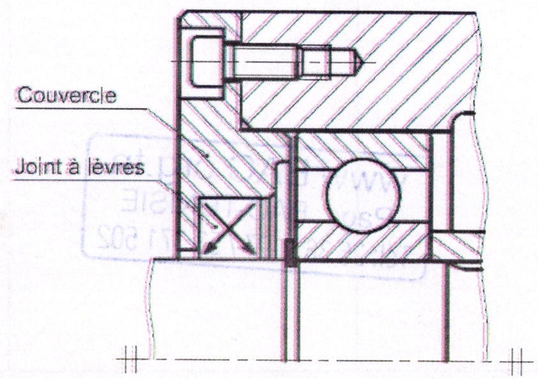
Guidage en Rotation

Guidage par contact direct	A cause des risques d'échauffement, cette solution est à réserver aux domaines suivants : - **Faibles vitesses ;** - **Efforts transmissibles peu élevés.**	**Les ajustements possibles (Ex)** **H7/e7 - H8/e8 - H6/f6 - H7/f7 - H8/f7 - H6/g5 - H7/g6 . . .**	
Guidage par interposition de bagues de frottement (Coussinet)	Le principe du contact direct est amélioré en interposant des bagues de frottement qui vont : - Diminuer le coefficient de frottement ; - Augmenter la durée de vie de l'arbre et du logement ; - Diminuer le bruit ; - Reporter l'usure sur les bagues.	**Diamètre extérieur** **H7/p6** **Diamètre intérieur** **H7/f7**	

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Guidage en rotation par roulements à billes à contact radial (type BC)</td>
<td rowspan="2">En remplaçant le frottement par glissement par du roulement, on diminue la puissance absorbée.
Le rendement du guidage en rotation est donc meilleur.</td>
<td><u>ARBRE TOURNANT PAR RAPPORT A LA CHARGE</u>
<u>Les Ajustements :</u>
Les bagues intérieures <u>tournantes</u> sont montées <u>SERREES</u> :
Tolérance de l'arbre : k6
Les bagues extérieures <u>fixes</u> sont montées <u>GLISSANTES</u> :
Tolérance de l'alésage : H7
(la régosité de porte de roulement Ra=0,8)</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td><u>ALESAGE (MOYEU) TOURNANT PAR RAPPORT A LA CHARGE</u>
<u>Les Ajustements :</u>
Les bagues intérieures <u>fixes</u> sont montées <u>GLISSANTES</u> :
Tolérance de l'arbre : g6
Les bagues extérieures <u>tournantes</u> sont montées <u>SERREES</u> :
Tolérance de l'alésage : N7
(la régosité de porte de roulement Ra=0,8)</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

SAKKA-Walid

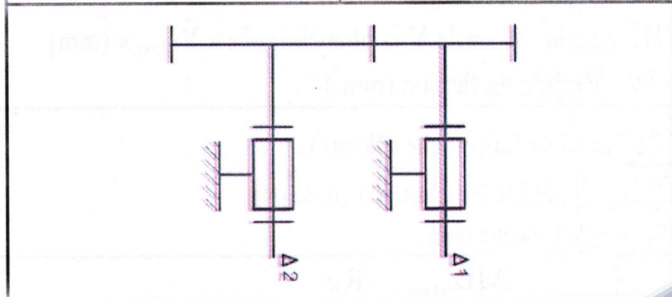
Guidage en rotation par roulements à contact obliques (types KB et BT)	Ces roulements supportent des charges axiales relativement importantes et des charges axiales et radiales combinées.	ARBRE TOURNANT PAR RAPPORT A LA CHARGE MONTAGE DIRECTE EN 'X' **Ajustements** : Les **bagues intérieures** tournantes sont montées SERREES : Tolérance de l'arbre : ***m6*** Les **bagues extérieures** fixes sont montées GLISSANTES : Tolérance de l'alésage : ***H7*** *(la régosité de porte de roulement Ra=0,8)*	
		ALESAGE (MOYEU) TOURNANT PAR RAPPORT A LA CHARGE MONTAGE INDIRECTE EN 'O' **Ajustements** : Les **bagues intérieures** fixes sont montées GLISSANTES : Tolérance de l'arbre : ***f6*** Les **bagues extérieures** tournantes sont montées SERREES : Tolérance de l'alésage : ***N7*** *(la régosité de porte de roulement Ra=0,8)*	

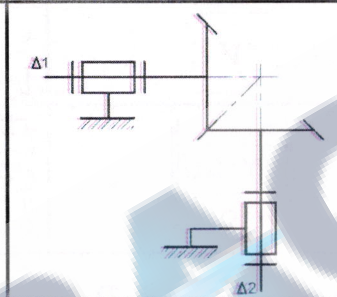
Cas Particulier pour un guidage en **rotation par roulements à contact** obliques (types KB et BT)	- Le montage en «O» s'emploie aussi avec les arbres tournants lorsque les organes de transmission sont situés en **dehors de la liaison (engrenages en porte à faux).** - Le réglage du jeu interne est réalisé sur la bague intérieure du roulement qui est à gauche (**Ø... h6**) par l'écrou à encoches.	
Joints à lèvres à frottement radial	Conditions de montage  (1) Sans stries hélicoïdales	Exemple de montage 

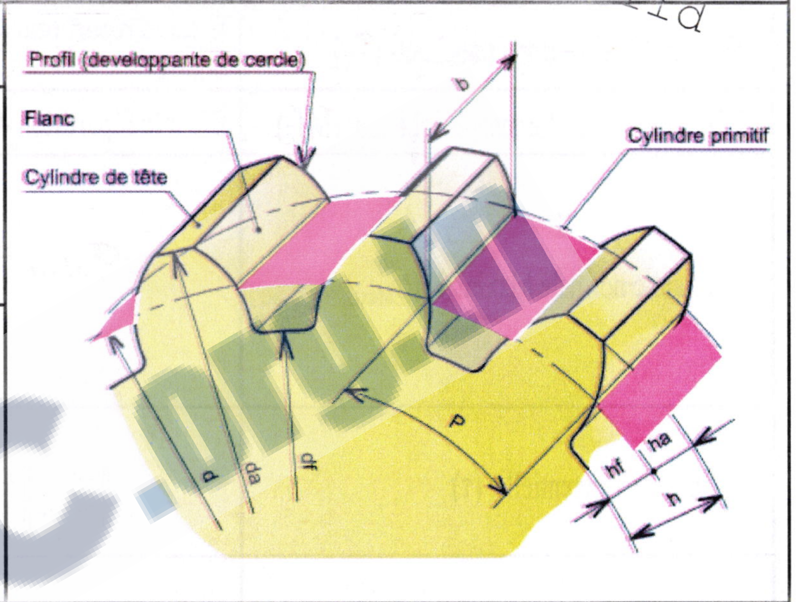
SAKKA-Walid

Les Engrenages

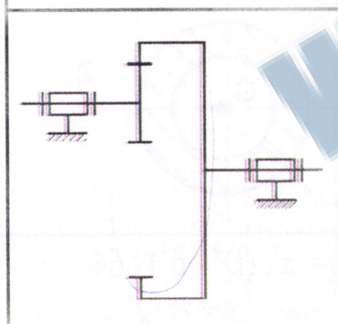
Engrenages cylindriques à denture droite	Engrenages cylindriques à denture hélicoïdale	Engrenages coniques
- Les plus courants. - Les plus économiques. - Petite roue : pignon - Pas d'effort axial.	- Contact progressif donc moins de bruit. - Présence d'un effort axial.	- Nécessite un réglage (coïncidence des sommets des cônes primitifs). - Axes non parallèles - Denture droit, hélicoïdale ou hypoïde.

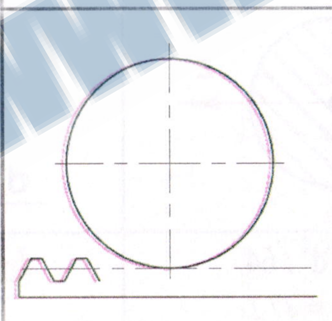


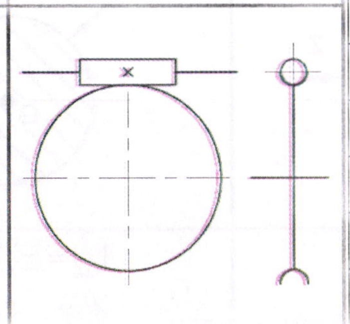




Engrenages cylindriques à contact intérieur	Pignon - crémaillère	Roue et vis sans fin
- Les deux roues ont même sens de rotation.	- Transformer un mouvement de rotation en un mouvement de translation et réciproquement.	- Grand rapport de réduction - Vis : Z=nombre de filets - Irréversibilité possible - Axes perpendiculaires.







Z		Nombre de dents
m		Module
d	$d = m \times Z$	Diamètre primitif
h_a	$h_a = m$	Saillie
h_f	$h_f = 1{,}25\ m$	Creux
h	$h = 2.25\ m$	Hauteur de dent
p	$p = \pi . d / Z = \pi . m$	Pas au primitif
d_a	$d_a = d + 2m$	Diamètre de tête
d_f	$d_f = d - 2{,}5\ m$	Diamètre de pied
a	$(d_1 + d_2) / 2 = m\,(Z_1 + Z_2) / 2$	Entraxe de deux roues dentées

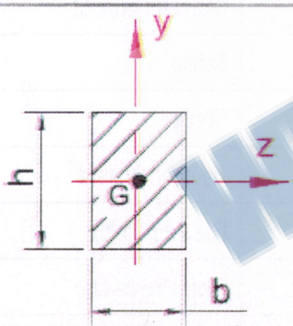
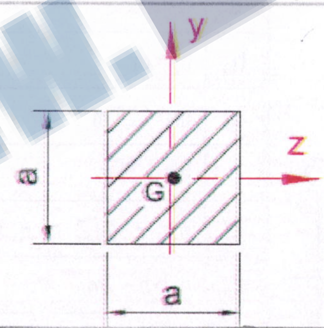
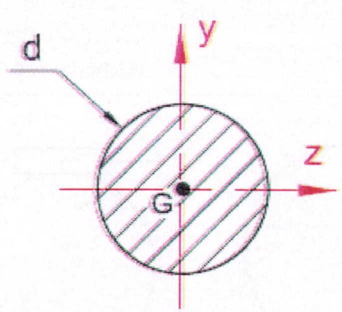
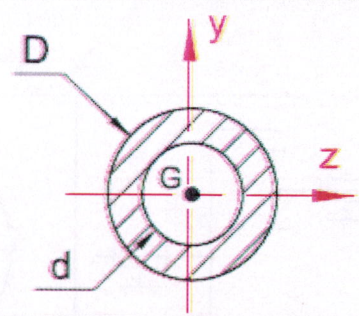
SAKKA-Walid

Flexion Plane Simple

- Diagramme des efforts tranchants (T_Y)	C'est la répartition des actions perpendiculaires à la ligne moyenne sur toute la longueur de la poutre	$T_{Y\ Maxi}$
- Diagramme des Moments Fléchissant (Mf_Z)	C'est la répartition des moments autour de l'axe (OZ) Sur toute la longueur de la poutre	$Mf_{Z\ Maxi}$

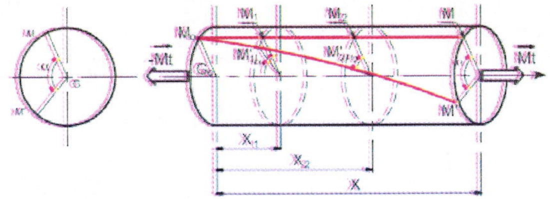
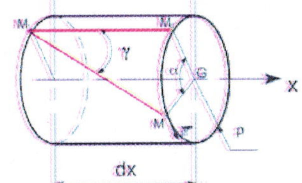
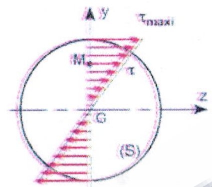
- Contrainte normale Maximale (σ_{Maxi})	$$\sigma_{Maxi} = \frac{Mfz_{Maxi}}{\dfrac{I_{GZ}}{v}}$$	σ_{Maxi} : Contrainte normale Maximale (N/mm²) $Mf_{Z\ Maxi}$: Moments Fléchissant Maximale (Nm) I_{GZ} : Moment Quadratique (mm⁴) v : Désigne la valeur de Y la plus éloignée « Y_{Maxi} » (mm) I_{GZ} / v : Module de flexion (mm³)
- Contrainte Tangentielle (τ)	$$\left\|\vec{\tau}_{moy}\right\| = \frac{\left\|\vec{T}_{Y\ Maxi}\right\|}{S}$$	$\left\|\vec{\tau}\right\|$: Contrainte Tangentielle (N/mm²) $\left\|\vec{T}_{Y\ Maxi}\right\|$: Effort Tranchant Maximale (N) ; S : Section de la poutre (mm).
- Condition de Résistance	$$\sigma_{Maxi} \le R_{pe} \quad \Rightarrow \quad \frac{Mfz_{Maxi}}{\dfrac{I_{GZ}}{v}} \le \frac{Re}{s}$$	

- Valeur du moment Quadratique de surfaces élémentaires : I_{GZ}

			
$I_{GZ} = b\,h^3 / 12$ *Avec* $v = h/2$	$I_{GZ} = a^4 / 12$ *Avec* $v = a/2$	$I_{GZ} = \pi\,.\,d^4 / 64$ *Avec* $v = d/2$	$I_{GZ} = \pi\,.\,(D^4 - d^4) / 64$ *Avec* $v = D/2$

SAKKA-Walid

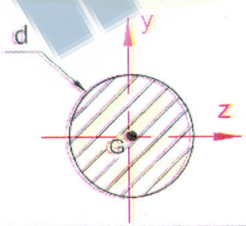
Torsion Simple

- Angle unitaire de torsion (θ)		$\theta = \dfrac{\alpha}{L}$	L : Longueur de l'éprouvette en mm θ: est exprimé en rd/mm α: angle de torsion en rd
- Répartition des contraintes	 	$\tau = G.\rho.\theta$ et $\tau_{Maxi} = G.R.\theta$	G : Module d'élasticité transversale ou module de Coulomb (N/mm²) R : Rayon de la section (mm) $R=\rho_{maxi}$ τ : Contrainte de torsion (N/mm²)
- Equation de la déformation élastique $Mt = \theta . G . I_0$	$\theta = \dfrac{M_t}{G.Io}$	Mt : Moment de torsion en (N.mm) G : Module d'élasticité transversale en (N/mm²)	Io : Moment quadratique polaire en (mm⁴) θ : Angle unitaire de torsion en (rd/mm)
- Condition de rigidité	$\theta \leq \theta_{limite}$		
- Condition de résistance	$\tau_{Maxi} = \dfrac{Mt}{\left(\dfrac{Io}{R}\right)} \leq \tau_p = \dfrac{\tau_e}{s}$	Mt : Moment de torsion (N.mm) τ_{Maxi} : Contrainte tangentielle Maxi (N/mm²) τ_e : (Reg) Limite élastique au cisaillement ou au glissement (MPa) (N/mm²).	Io : Moment quadratique polaire (mm⁴) R : Distance entre la fibre neutre et la fibre la plus éloignée (mm) s : Coefficient de sécurité τ_p : (Rpg) Résistance pratique au glissement (MPa).

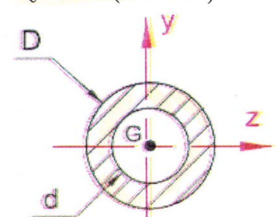
$\frac{I_0}{R}$ = Module de torsion

- Valeur du moment Quadratique plaire : I_0

$I_0 = \pi . d^4 / 32$



$I_0 = \pi . (D^4 - d^4) / 32$



LYCEE M[ed] ALI SFAX
LABORATOIRES DE GENIE MECANIQUE & ELECTRIQUE

DEVOIR DE SYNTHESE N°1

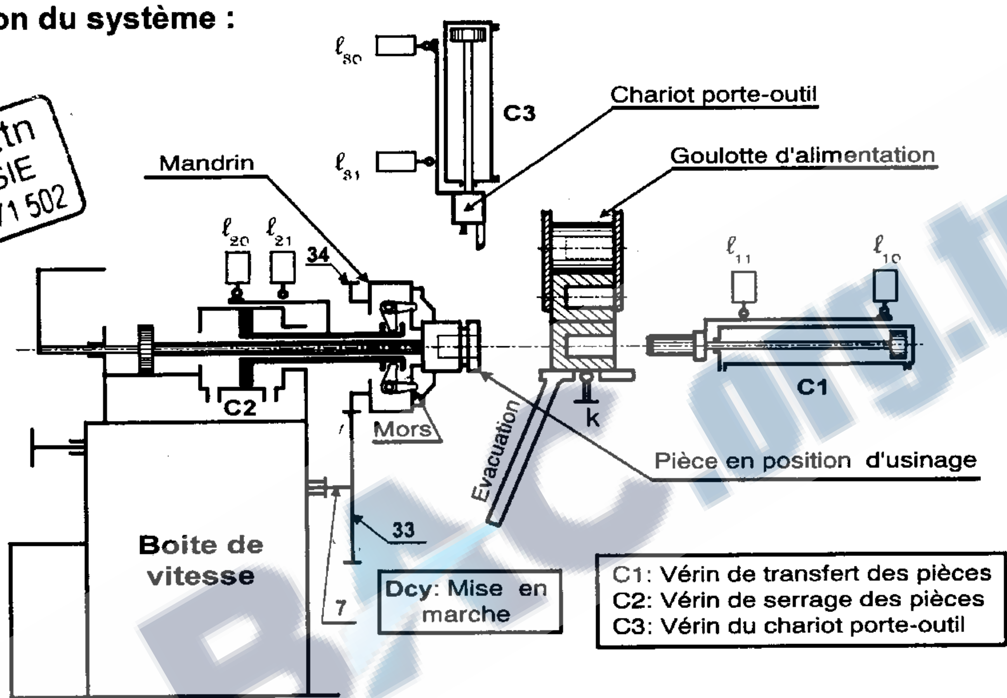
AS 2009/2010

4 ScTECHNIQUE 1&2 **Durée : 4h** **Coef.4**

EPREUVE : DISCIPLINES TECHNIQUES

TOUR DE REPRISE AUTOAMTIQUE

I- Présentation du système :



II- Description du système :

Sur le mandrin d'un tour à serrage pneumatique, des pièces, dont l'alimentation et obtenue par gravité dans une goulotte, seront amenées par l'action d'un vérin **C1**. Le serrage des pièces est obtenu par le la sortie de la tige du vérin **C2** qui actionne les mors du mandrin.

Le vérin **C3** commande le déplacement du chariot porte-outils. Une fois l'usinage terminé, le chariot porte outil revient en position de départ et le vérin **C4** provoque l'éjection de la pièce (non étudié).
Au bas de la goulotte d'alimentation est prévu un capteur d'information de présence de pièce **K**.
Cette machine est équipée d'une boite à deux vitesses (voir dessin d'ensemble dossier technique page **5/5**) commandée par la fourchette **2** qui permet de sélectionner la vitesse voulue.

III- Fonctionnement:

Le départ du cycle et les conditions initiales permettent :

Le déplacement de la pièce vers le mandrin par **C1**.
Le serrage de la pièce par la rentrée du vérin **C2**.
Le retour du vérin **C1**.
Le fonctionnement du moteur **M** et l'avance des outils par **C3**.
Le retour des outils.
La position Haute des outils déclenche le desserrage de la pièce par le vérin **C2** puis son éjection (hors étude); c'est la fin de l'usinage.

On prévoit un cycle de production de pièces par quantité **N=10**. Pour cela un compteur interne permet de compter le nombre de pièces usinées. Il délivre une information notée **x**:

⊙ Lorsque **N <10, x=0** ⊙ Lorsque **N =10, x=1**

V-I Mécanisme de transmission de mouvement :

Le système de transmission de mouvement de rotation du coté moteur au coté mandrin est assurée par

- une boite de vitesses à deux vitesses.

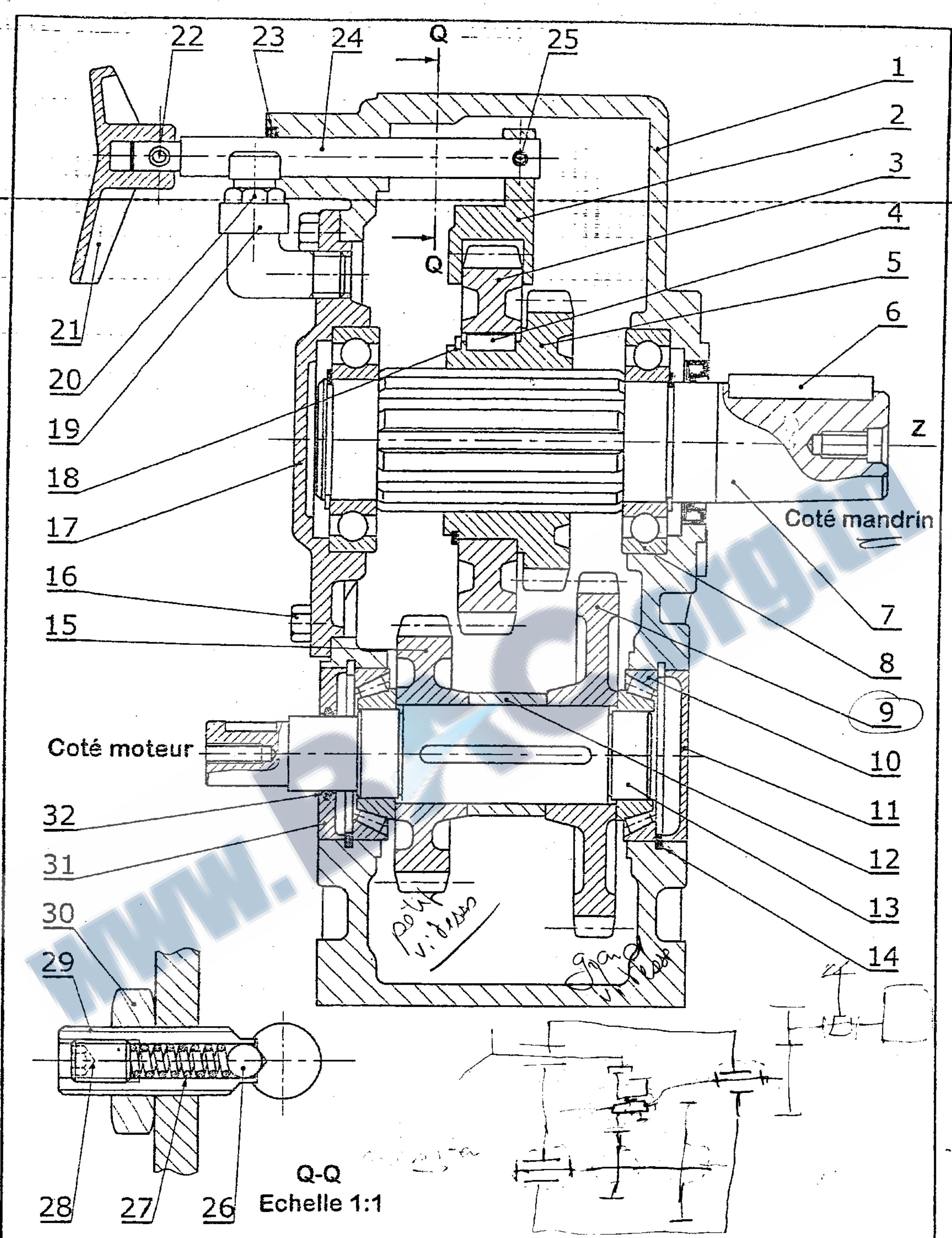
La translation du baladeur suivant l'axe **Z** au moyen de la fourchette **(2)** permet de sélectionner la vitesse convenable.

- Un engrenage cylindrique (33-34)

V-II Nomenclature :

Rep	Nb	Désignation	Matière	Observation
34	1	Roue dentée		
33	1	Roue dentée		
32	1	Joint feutre		
31	1	Capuchon de fermeture		
30	1	Ecrou M16		
29	1	Vis		
28	1	Vis sans tête M10		
27	1	Ressort		
26	1	Bille		
25	1	Goupille élastique		
24	1	Axe		
23	1	Bague		
22	8	Goupille élastique		
21	1	Poignée de sélection de vitesse		
20	2	Bouchon de remplissage		
19	1	Raccord		
18	2	Anneau élastique intérieur		
17	1	Couvercle		
16	6	Vis H		
15	1	Roue dentée **Z=30 dents**		
14	2	Anneau élastique intérieur		
13	1	Arbre d'entrée		
12	1	Entretoise		
11	1	Capuchon de fermeture		
10	2	Roulement **KB**		Roulement à rouleaux coniques
9	1	Roue dentée **Z=...... dents**		
8	2	Roulement BC		Roulement à une rangée de billes
7	1	Arbre de sortie		
6	1	Clavette		
5	1	Roue dentée **Z=34 dents**		
4	1	Clavette		
3	1	Roue dentée **Z=44 dents**		
2	1	Fourchette		
1	1	Carter		

TOUR DE REPRISE AUTOMATISE
(BOITE DE VITESSES)



Echelle 1:1	**Tour de reprise automatisé (Boite de vitesses)**	Dessiné par :
A4 V	Dossier Technique Page: 5/5	

$r_{1-3} = \frac{\quad}{Z_3} = \frac{\quad}{34} =$

$r_g = r_{1-3} \times r_{33-34} = 0,68 \times 1,2 = 0,816$

$r_g = \frac{N_r}{N_m} \Rightarrow N_r = r_g \times N_m = 0,816 \times 1500 = 1224$ tr/min

$$a = \frac{m(Z_1 + Z_3)}{2} = \frac{3(30+44)}{2} = 111$$

Alors $a = \frac{m(Z_9 + Z_5)}{2} \Rightarrow Z_9 + Z_5 = \frac{2a}{m}$

$Z_9 = \frac{2 \times 111}{3} - 34 = 40$ dents

$r_{9-5} = \frac{Z_9}{Z_5} = \frac{40}{34} = 1,17$

$r_g = r_{9-5} \times r_{33-34} = 1,17 \times 1,2 = 1,41$

$r_g = \frac{N_r}{N_m} \Rightarrow N_r = r_g \cdot N_m = 1,41 \times 1500 = 2117,6$ tr/min

Nom:	Prénom :	Classe:	N°: ....

A- ANALYSE FONCTIONNELLE

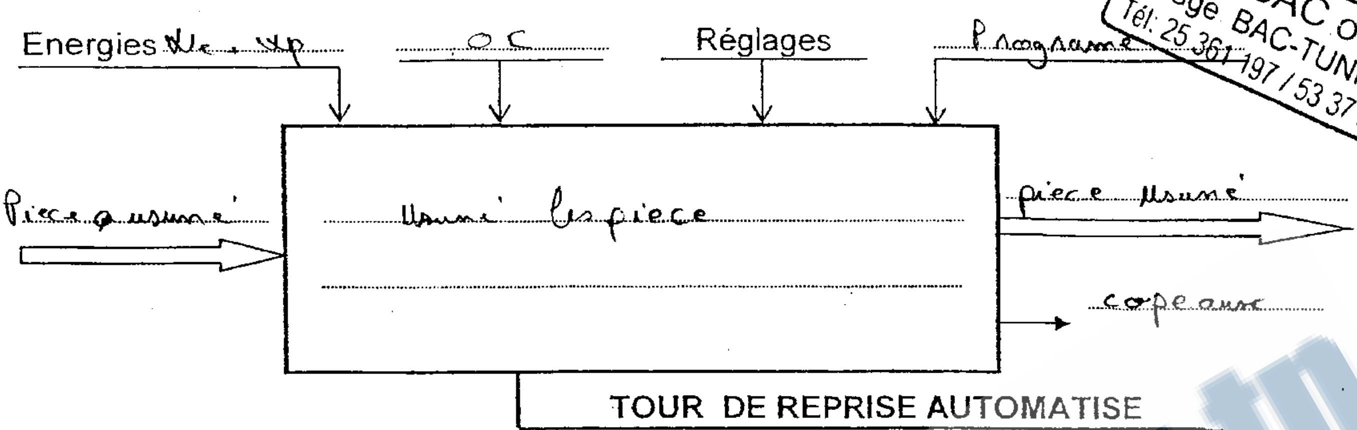
Boîte vitesse

/ 20

I-1 Analyse fonctionnelle globale:

/ 1,5

- En se référant au dossier technique, compléter l'actigramme de niveau A-0 du système TOUR DE REPRISE AUTOMATISE.



I-2 Analyse fonctionnelle de la partie opérative:

/ 2

a) En se référant au dossier technique **page 1/5**, compléter le **F.A.S.T** ci-dessous.

FONCTIONS		PROCESSEURS
1. Alimenter en pièce.	⇨	goulotte d'alimentation
2. Amener les pièces au mandrin	⇨	Vérin C1
3. serré la pièce	⇨	Vérin **C2**+ Mors du mandrin
4. déplacer le chariot porte outil	⇨	Vérin **C3**
5. éjecter les pièce	⇨	Vérin **C4**

b) A partir du dessin d'ensemble, donner la fonction de chaque pièce:

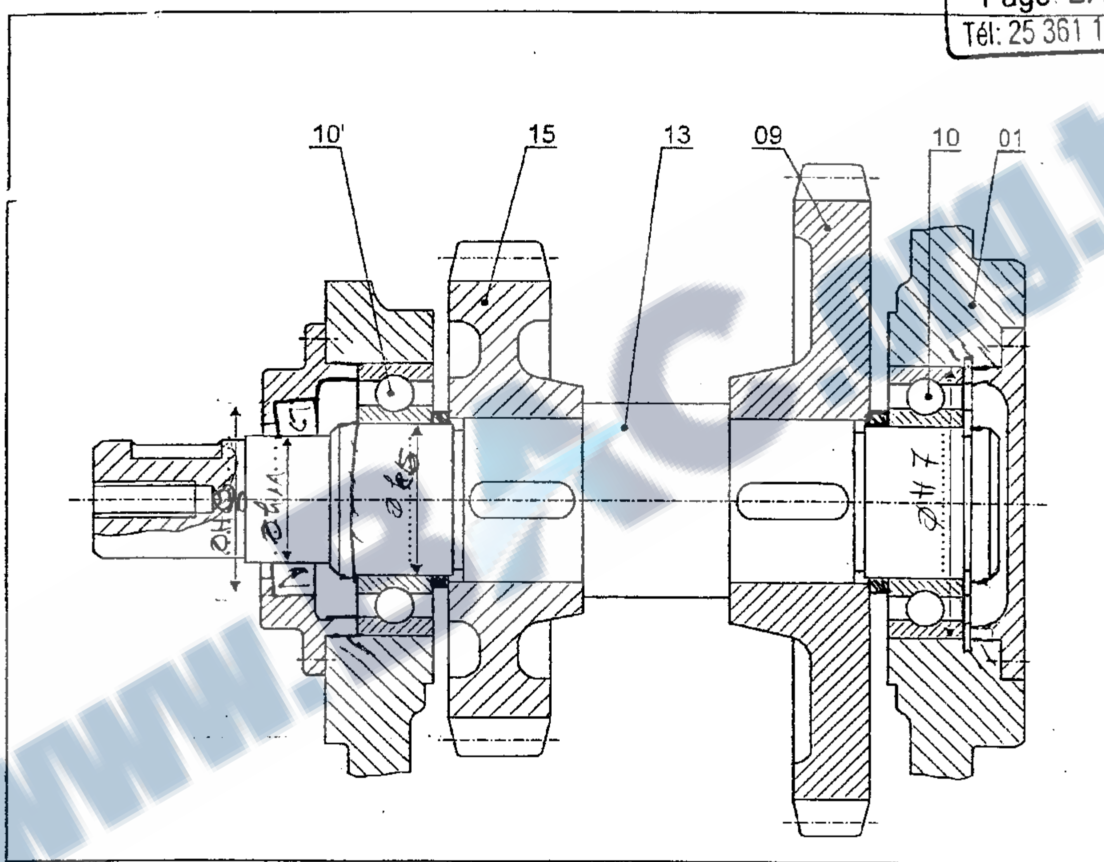
- Bouchon de remplissage **20**: bouchée l'orifice de remplissage
- Roulements à rouleaux coniques **10**: guider en rotation l'arbre 13
- Capuchon de fermeture **11**: assuré l'étanchéité

C- PRODUCTION D'UNE SOLUTION OU D'UNE MODIFICATION : / 4

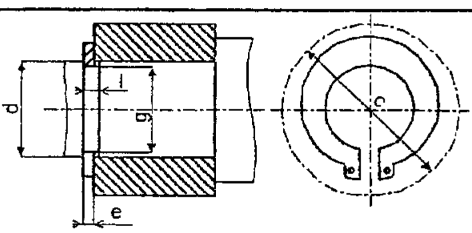
C1- Partie opérative:

Afin d'améliorer la solution adoptée par le constructeur au niveau de l'utilisation des roulements à contact oblique type BT **(10)** et **(10')** pour le guidage en rotation de l'arbre de sortie **(13)** et d'assurer le bon fonctionnement du système, on vise à changer cette solution par deux roulements à contact radial type BC. On demande d(e) :

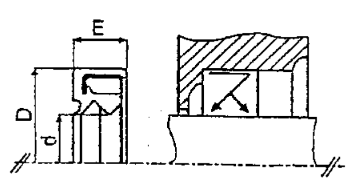
- Assurer le guidage en rotation de l'arbre **(13)** par rapport au carter **(1)** ;
- Assurer l'étanchéité du côté gauche par un joint à deux lèvres ;
- Indiquer les ajustements nécessaires pour le bon fonctionnement.



Anneau élastique pour arbre	Joint à deux lèvres



d	e	c	l	g
20	1.2	29	1.3	19
22	1.2	31.4	1.3	21



d	D	E	d	D	E
17	25	6	20	35	7
18	32	7	22	40	7

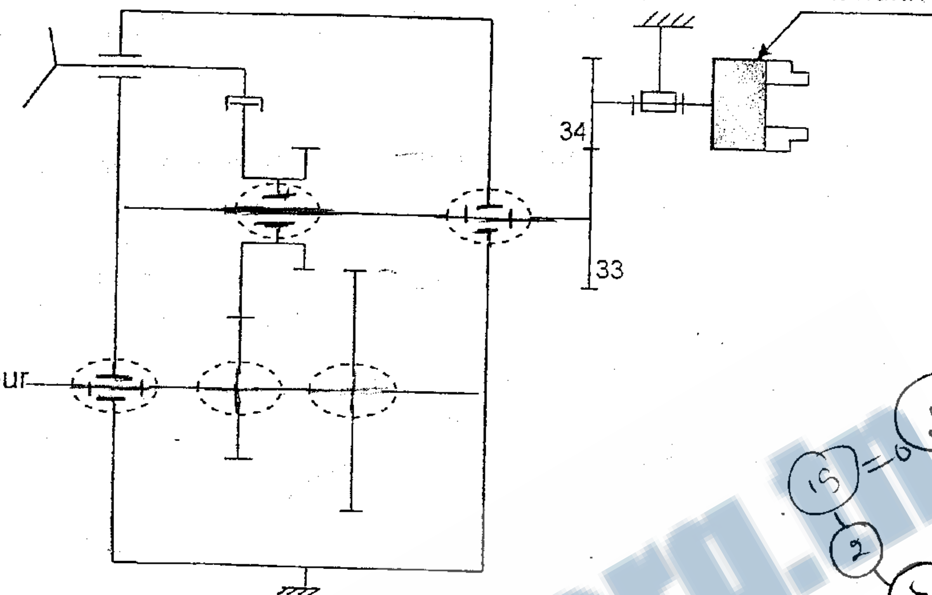
Devoir de synthèse N°1 Le 08/12/2009

B- CALCUL DE PREDETERMINATION OU DE VERIFICATION

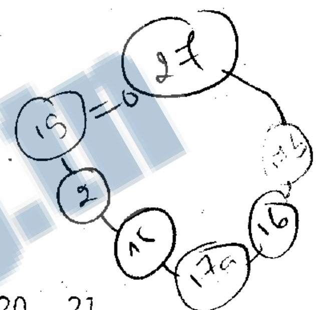
B1- Partie opérative:

B1-1 Schéma cinématique : En (se référant aux pages **1/5** et **5/5** du dossier technique)

b)- Compléter le schéma cinématique minimal de la boite de vitesses .



/ 1.5



B-1-2 – Cotation fonctionnelle :

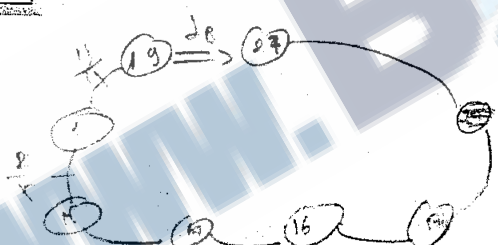
a/ La condition B est-elle mini ou Max ? min.

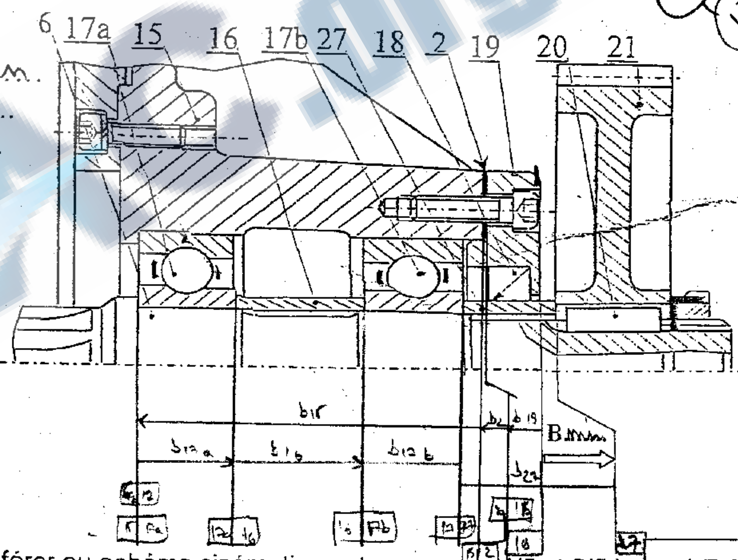
Justifier :...

....

b/ Tracer sa chaîne de cotes

/ 1,5





B1-3 Transmission de mouvement : (Se référer au schéma cinématique et aux pages 1/5 et 5/5) **/ 5.5**

La boite de vitesses est constituée par des engrenages cylindriques à dentures droites de même module **m**=3mm. Le baladeur formé par les roues (**3** et **5**) peut avoir deux positions.

Données : Le moteur tourne à N_m= 1500 tr/mn; Z_3=44dents; Z_5= 34 dents et Z_{15}=30dents ;

Le rapport de l'engrenage (33-34) est $r_{33\text{-}34}$= **1,2**

a/ Préciser les chaînes cinématiques correspondantes aux deux vitesses du mandrin.

NB : On désigne par N_1 :1[er] vitesse ; N_2 : 2[ème] vitesse préciser pour chaque vitesse la position du baladeur (gauche ou droite)

N_1 : baladeur à gauche	Arbre(13) → 1 → 3 → 33 → 34 → (mandrin)
N_2 : baladeur à droit	Arbre(13) → 4 → 5 → 32 → 34 → (mandrin)

Nom:............................	Prénom :............................	Classe:...............	N°:.......

- **Position 1: Le baladeur est totalement à gauche:**

b/Calculer le rapport de vitesse: $r_{15\text{-}3}$: $r_{15-3} = \frac{Z_{15}}{Z_3} = \frac{30}{44} = 0{,}68$

c/ Calculer la vitesse de rotation du mandrin : $N_{mandrin}$ = $r_{15-3} \times r_{33-32} \times N_m$

$= 0{,}68 \times 1{,}2 \times 1500 = 1224$ tr/min

r15-3= 0,68

- **Position 2: Le baladeur est totalement à droite:**

$N_{mandrin}$= 1224 tr/min

d/Déterminer le nombre de dents de la roue 9: Z 9 :(Rq :les engrenages (15-3) et (9-5) ont le même entraxe)

$a = \frac{m(Z_{15}+Z_3)}{2} = \frac{2 \times (30+44)}{2} = 111$

$a = \frac{m(Z_9+Z_5)}{2} \Rightarrow Z_9 = \frac{2a}{m} - Z_5$

$= \frac{2 \times 111}{3} - 34 = 40$

Z_9= 40 dents

e/Calculer le rapport de vitesse $r_{9\text{-}5}$ $r_{9-5} = \frac{Z_9}{Z_5}$

$= \frac{40}{34} = 1{,}176 = \frac{20}{17}$

r 9-5= 1,17

f/ Calculer la vitesse de rotation du mandrin : $N_{mandrin}$

$N_{mandrin} = r_{9-5} \times r_{33-32} \times N_m = \frac{20}{17} \times 1{,}2 \times 1500 = 2117{,}6$ tr/min

B1- 4 Etude des résistances des matériaux: / 4

$N_{mandrin}$= 2117,6 tr/min

L'arbre de sortie **(7)** est assimilée à une poutre de section circulaire pleine, de diamètre **d** et sollicitée à la torsion simple sous l'effet d'un couple maximal de moment **M_T= 12 m.N** .Il est en acier de résistance pratique τ_P = 20 N/mm² et de module d'élasticité transversale G= 80000 N/mm²

a/ Calculer le diamètre minimal de l'arbre (7) d_{mini} pour qu'il résiste en toute sécurité :

$\tau_{max} = \frac{M_T}{I_0/v} \leq \tau_p$ avec $\frac{I_0}{v} = \frac{\pi d^3}{16}$

$\Leftrightarrow \frac{16\, M_T}{\pi d^3} \leq \tau_p \Rightarrow d \geq$

$\Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16\, M_T}{\pi\, \tau_p}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 12 \times 10^3}{\pi \times 20}} = 14{,}5$ mm

d_m= 14,5 mm

b/ Calculer l'angle de déviation α°(en degré) entre les deux sections extrêmes de l'arbre sachant que sa longueur **L= 100 mm.**

$\theta = \frac{\alpha}{L} = \frac{M_T}{I_0 \cdot G} \Rightarrow \alpha = \frac{L \times M_T}{I_0 \cdot G}$ avec $I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{32 \times L \times M_T}{\pi d^4 \times G} = \frac{32 \times 100 \times 12 \times 10^3}{\pi \times (14{,}5)^4 \times 8 \times 10^4} = 0{,}0034$ rd

$= 0{,}19°$

α°= 0,19°

c/ Pour la rigidité de l'arbre(7) l'angle unitaire ne doit pas dépasser la valeur de **θ= 0,5°/m** $8{,}7 \times 10^{-6}$ rd/mm

Calculer la nouvelle valeur du diamètre minimale d_m pour satisfaire à cette condition :

$\theta \leq \theta_L$

$\frac{M_T}{G \cdot I_0} \leq \theta_L \Leftrightarrow \frac{32 \times M_T}{\pi \cdot d^4 \cdot G} \leq \theta_L \Leftrightarrow \theta_L \times \pi \times d^4 \times G \geq 32\, M_T$

$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \times M_T}{G \cdot \pi \cdot \theta_L}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 12 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \times \pi \times 8{,}7 \times 10^{-6}}} = 20{,}47$ mm

d_m= 20,47 mm

50 11

LYCEE HEDI CHAKER SFAX	Devoir de synthèse N°1	Décembre 2012
EPREUVE : TECHNOLOGIE	SECTION : SCIENCES TECHNIQUES	Durée : 4 heures Coefficient : 4

1. UNITE DE PRODUCTION

Cette unité de production conditionne un produit alimentaire en boites en une ou deux couches posées sur une barquette et protégées par un film plastique assurant l'étanchéité et l'hygiène du produit.

Arrivée des boites → « Poste A » Conditionnement par 6 ou par 60 → « Poste B » Fardelage → Vers stockage

Fardelage : opération qui consiste à entourer les 6 boites par un film plastique.

2. PRESENTATION DU SYSTEME

1- POSTE A : CONDITIONNEMENT

1-1 ARCHITECTURE GENERALE (voir Fig. 1)

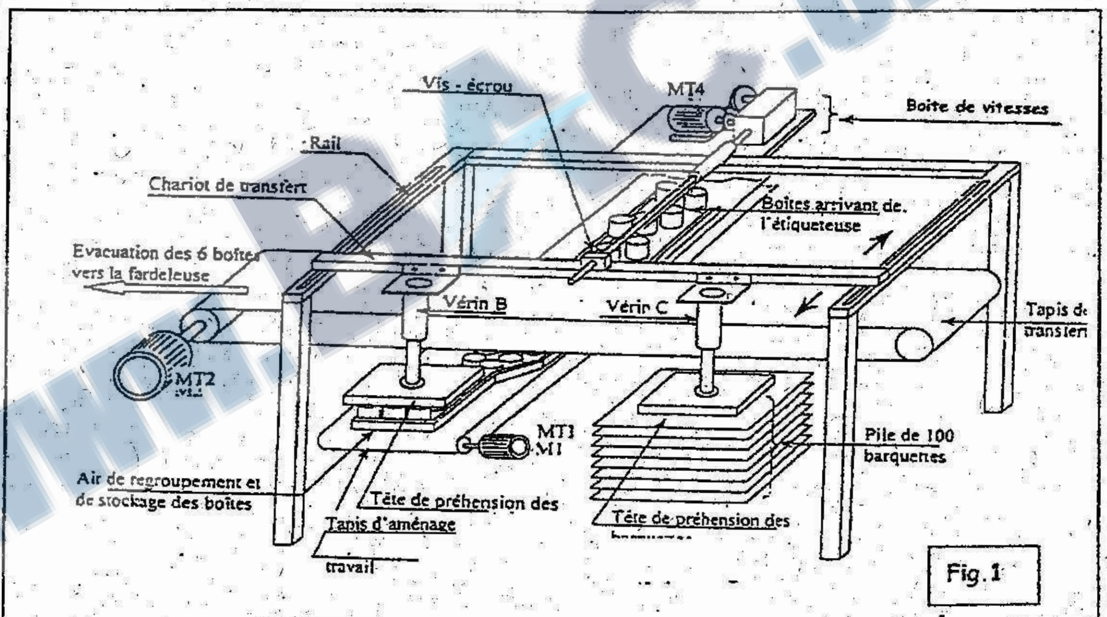


Fig.1

1-2- CHARIOT DE TRANSFERT (voir Fig.1 et dessin d'ensemble page 3/3)

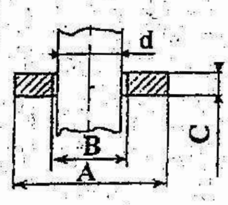
Le chariot de transfert permet aux deux têtes de préhension de se déplacer au dessus du tapis d'aménage ou au dessus du tapis de transfert. Le déplacement du chariot dans les deux sens est assuré par un moto réducteur frein MT4 à deux sens de rotation, muni d'un système vis écrou.

8

2- Elements Standards

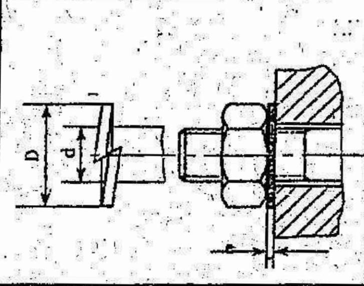
51

Rondelles plates



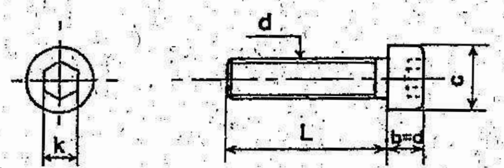
d	A				B		c
	Série				Fabrication		
	Z	M	L	LL	U	N	
5	10	12	16	20	5,25	5.5	1
6	12	14	18	24	6,25	7	1.2
8	16	18	22	30	8,25	9	1.5
10	20	22	27	36	10,25	11	2
12	24	27	32	40	12,5	14	2.5
14	27	30	36	45	14,5	16	2.5
16	30	32	40	50	16,5	18	3

Rondelles Grower W



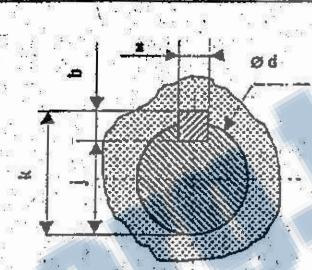
d	D	e
4	7.3	1.5
5	8.3	1.5
6	10.4	2
8	13.4	2.5
10	16.5	3
12	20	3.5
14	23	4
16	25	4
20	31	5

Vis à tête cylindrique à 6 pans creux CHc



d	pas	c	k
M6	1	10	5
M8	1,25	13	6
M10	1,5	16	8
M12	1,75	18	10

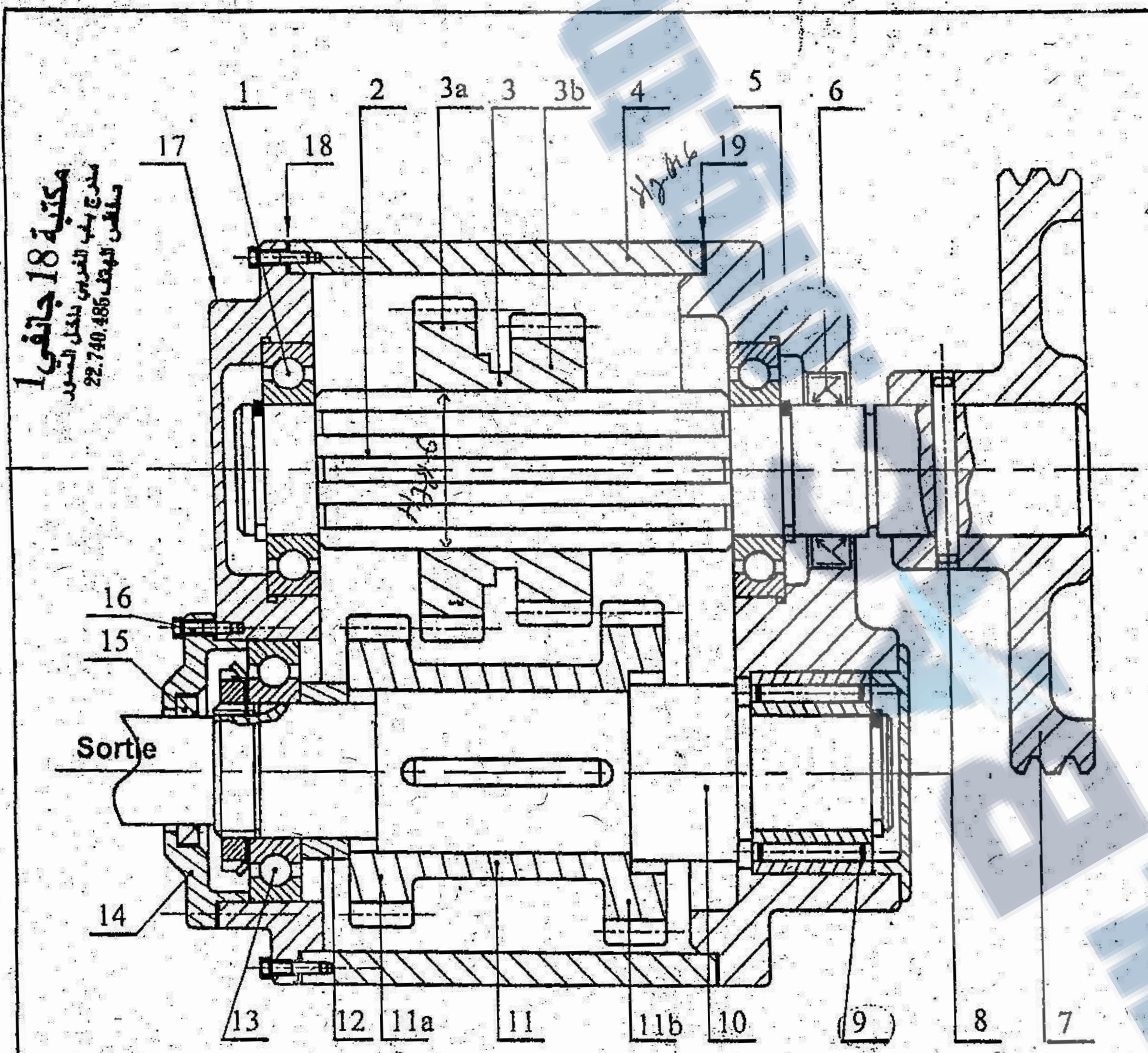
Clavette parallèle Forme A



d	a	b	j	k
10 à 12 incl	4	4	d-2.5	d+1.8
12 à 17	5	5	d-3	d+2.3
17 à 22	6	6	d-3.5	d+2.8
22 à 30	8	7	d-4	d+3.3

9

52



17	1	Palier
16	3	Vis H
15	1	Joint à lèvre
14	1	Couvercle
13	1	Roulement Type BC
12	1	Bague entretoise
11	1	Roue dentée étagée
10	1	Arbre de sortie
9	1	Roulement à aiguille
8	1	Goupille cylindrique
7	1	Poulie réceptrice
6	1	Joint à lèvres
5	1	Corps
4	1	Carter boite de vitesse
3	1	Baladeur
2	1	Arbre cannelé
1	2	Roulement type BC
Rep	Nb	Désignation

LYCEE HEDI CHAKER SFAX	Echelle:1:2
SYSTEME AUTOMATISE DE CONDITIONNEMENT DE PRODUIT ALIMENTAIRE	Dossier technique Page : 3/3

c- Le constructeur a choisi d= 36 mm.

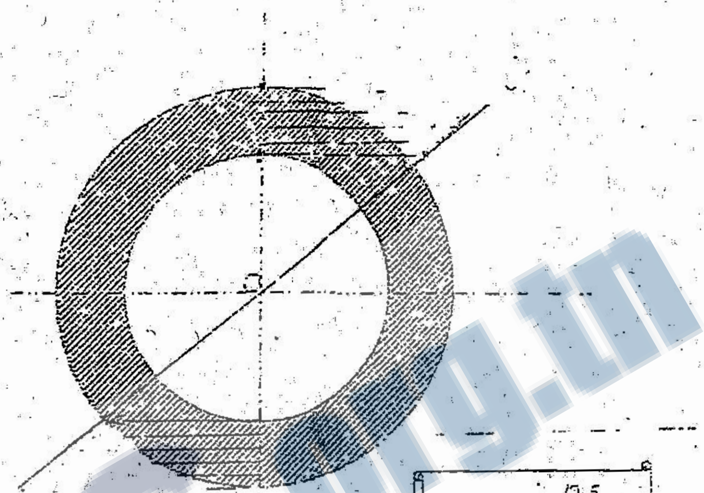
Calculer les valeurs des contraintes tangentielles minimale " τ_{mini} " et maximale " τ_{maxi} "

d- Tracer sur la section de la poutre ci-dessus, la répartition des contraintes tangentielles en respectant l'échelle.

* Echelle des contraintes:

τ = 1N/mm² ⟶ 4 mm

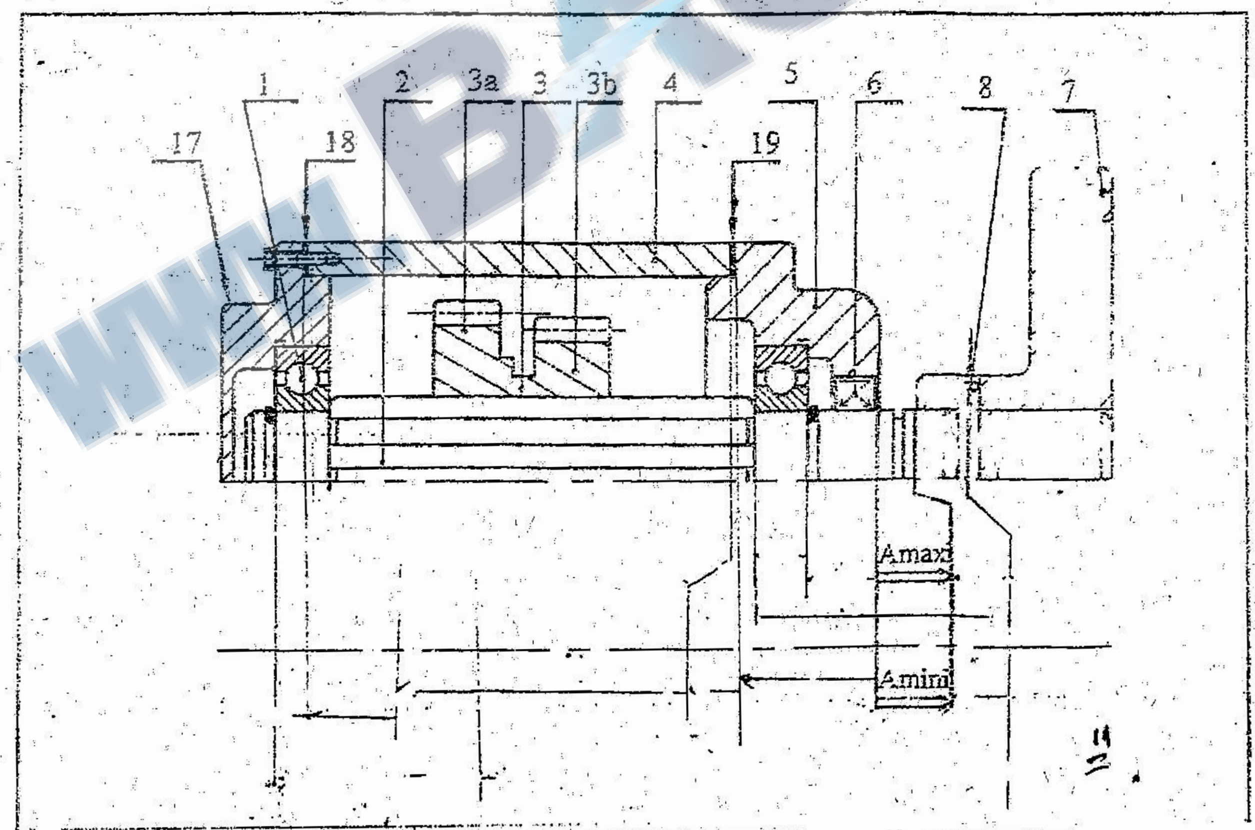
e- Vérifier la résistance du manchon à la torsion.



/2,5

B-3- Cotation fonctionnelle

Tracer les chaînes de cotes relatives aux conditions « Amaxi » et « A mini ».



Page Facebook : BAC – TUNISIE Site Web : www.BAC.org.tn Admin : Saber Gù Tél : 28.355.106

54

/5

C-3- ETUDE DE CONCEPTION :

On demande d'assurer sur le dessin ci-dessous la liaison encastrement entre l'arbre (20) du moteur MT4 et la poulie motrice (21) en utilisant :

*Une clavette parallèle forme A .

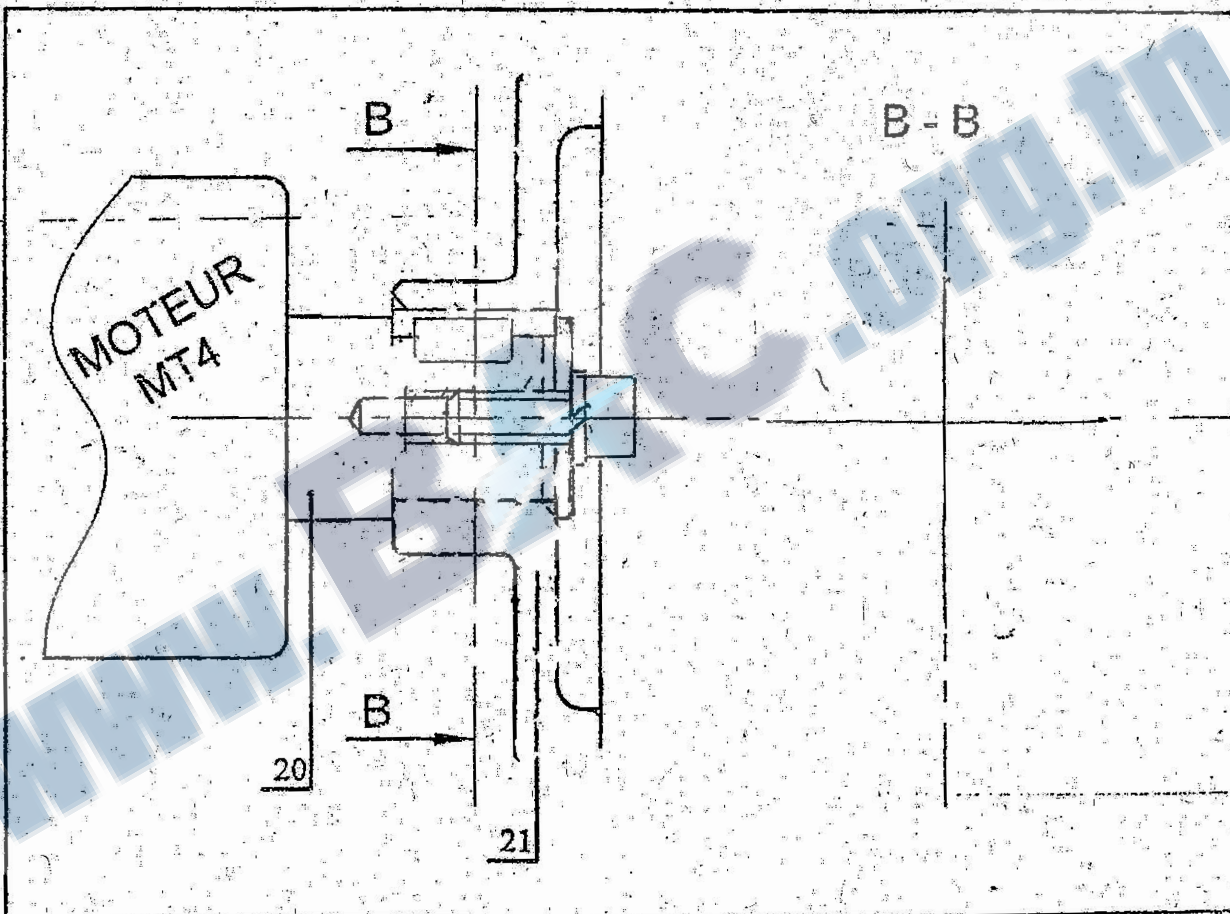
*Une rondelle plate d'appui

*Une rondelle grower pour le freinage de la vis

*Une vis CHc M8-22.

a/ Compléter, ci-dessous la vue de face en coupe et la section B-B

N.B :Pour le choix des éléments standards se référer au dossier technique feuille 2/3



b/ Compléter le tableau des ajustements suivant.

Pièces Assemblées	(3a) / (2)	(5) / (4)	(1) / (17)	(1) / (2)
Ajustements	......	......	......	......

4°/L'arbre du moteur (MT4) tourne à une vitesse de 1440 trs/mn, et transmet son mouvement par le système poulies courroies à l'arbre (2), le rapport de cette transmission est r_1= 0,25.

Compléter le tableau suivant : /3,25

	1ère vitesse		2ème vitesse	
Roues dentées	3b	11b	3a	11a
Module (m)	2mm			2mm
Nombre de dents (Z)		27 dents	30 dents	
Diamètre primitif (d)	50 mm			
Entraxe (a)	52 mm			
Rapport (r_2)				
Rapport global (rg)				
Vitesse de sortie (N10)				

Calcul obligatoire :

B-2- Torsion /4,5

Le manchon de la poulie réceptrice (7) est sollicité à la torsion. Ce dernier est assimilé à une poutre de section cylindrique creuse, de diamètre extérieur D=52mm, diamètre intérieur d et de résistance pratique au glissement Rpg= 30 N/mm².

Il transmet une puissance P=7,54 KW à une fréquence de rotation N=360 tr/min.

a- Calculer le moment de torsion exercé sur ce manchon.

b- Calculer la valeur du diamètre intérieur maximal "d_{max}"de ce manchon.

13

NOM :.................................... PRENOM :.................................... 4SC.T......

A- ANALYSE FONCTIONNELLE D'UN SYSTEME TECHNIQUE

A 1 - Analyse fonctionnelle de la partie opérative

/2.25

a- En se référant au dessin d'ensemble à la page3/3 du dossier technique, compléter par les repères des pièces la chaîne cinématique de la fonction FT «Transmettre le mouvement de rotation de l'arbre du moteur MT4 à l'arbre de sortie (10).

MT4 → Poulie motrice → Deux courroies → 7 → 8 → 2 → 3 → 11 → 10 → Ecrou + chariot de transfert

b- Compléter le F.A.S.T partiel relatif à fonction technique suivante.

FT: Transmetire le mouvement de rotation de l'arbre du moteur MT4 à l'arbre de sortie (10).

FT1: Convertir l'énergie électrique en énergie mécanique	
FT2 :	Système poulies -courroies
FT3: Guider en rotation l'arbre (2)/au corps	
FT4:	Boîte de vitesses (3+11)
FT5:	Roulements (9) et (13)

B- ANALYSE DE LA PARTIE OPERATIVE

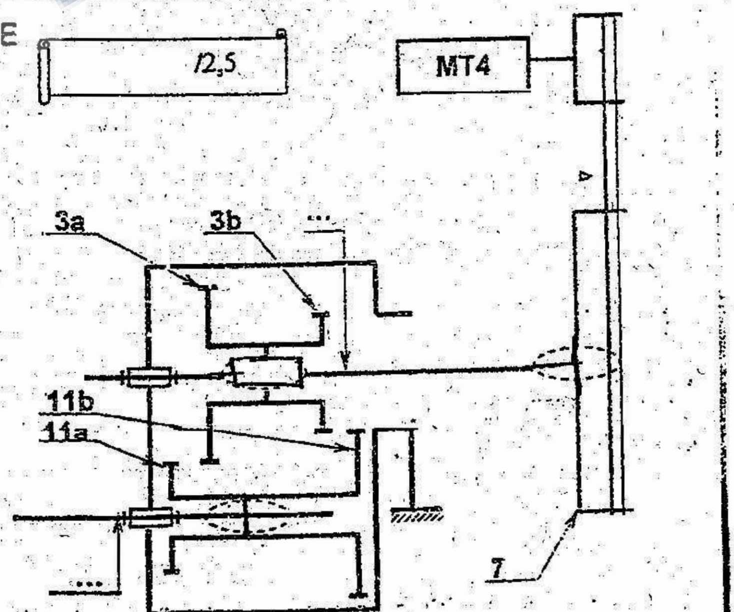
/2,5

B-1- *Schéma cinématique*

1° /En se référant au dessin d'ensemble page 3/3 du dossier technique, compléter le schéma cinématique simplifié ci-contre.

2° /Compléter par les repères des pièces cinématiquement liées le bloc.

A= {4,



3°/Justifier la présence de la gorge sur l'arbre cannelé (2) c- Le constructeur a choisi d= 36 mm.

Calculer les valeurs des contraintes tangentielles minimale " τ_{mini} " et maximale " τ_{maxi} "

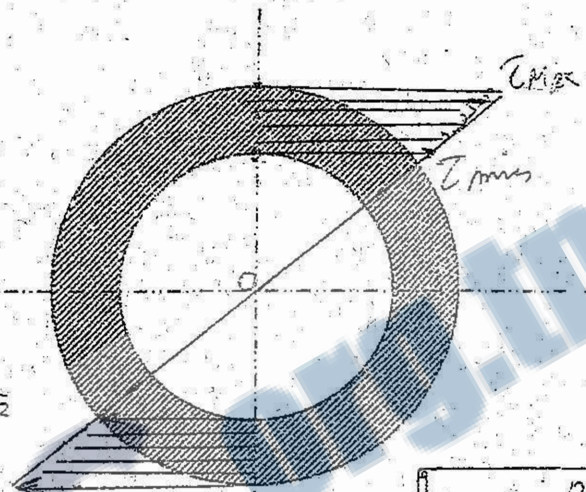
$$\tau_{min} = \frac{Mt}{I_0} \times \frac{d}{2} = \frac{Mt \times d \times 16}{\pi(D^4 - d^4)} = 6,51 \; N/mm^2$$

$$\tau_{max} = \frac{Mt}{I_0} \times \frac{D}{2} = \frac{Mt \times 32 \times D}{\pi(D^4 - d^4)\,2} = 9,4 \; N/mm^2$$

d- Tracer sur la section de la poutre ci-dessous, la répartition des contraintes tangentielles en respectant l'échelle.

* Echelle des contraintes:

τ =1N/mm² ⟶ 4 mm



e- Vérifier la résistance du manchon à la torsion.

$\tau_{Max} = 9,4 \; N/mm^2$

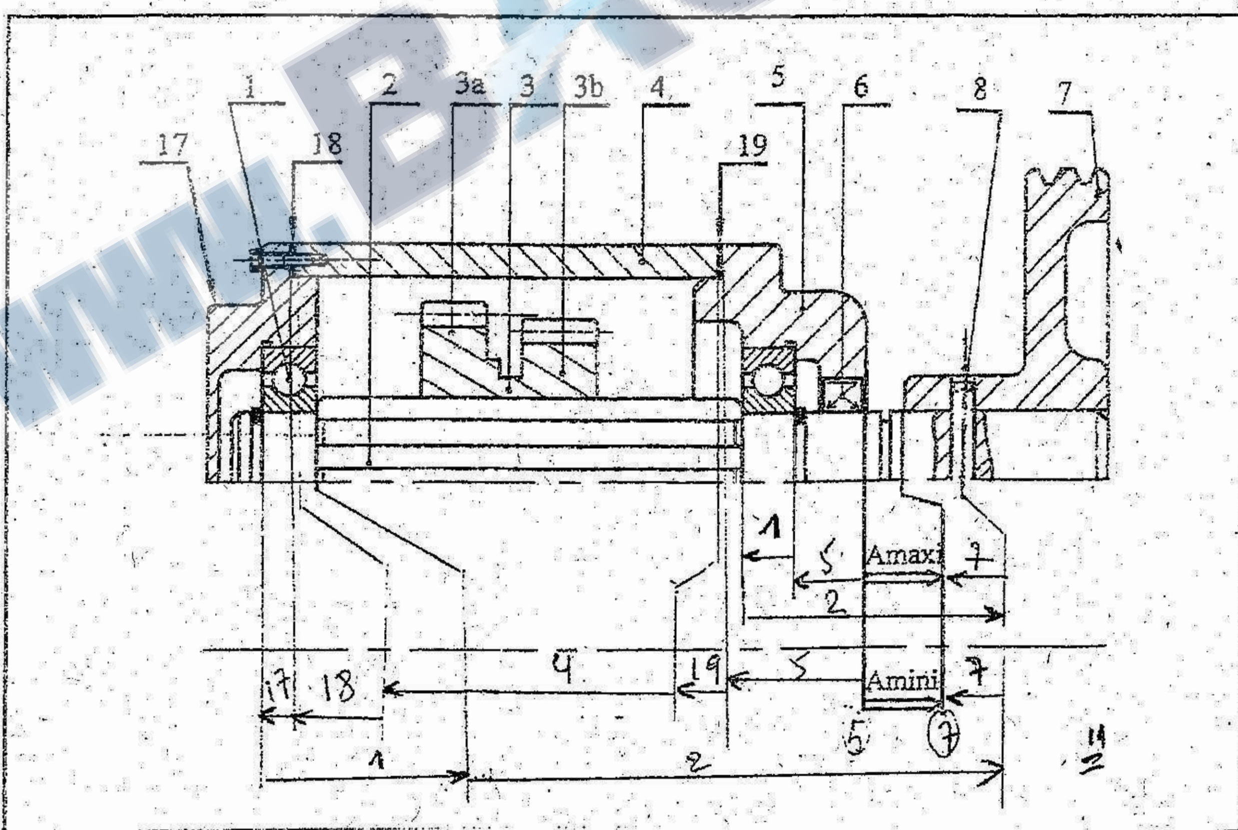
$R_{pg} = 30 \; N/mm^2$

$\tau_{Max} < R_{pg} \Rightarrow$ l'arbre resiste

B-3- *Cotation fonctionnelle*

/2,5

Tracer les chaînes de cotes relatives aux conditions « Amaxi » et « A mini ».



58

C-3- *ETUDE DE CONCEPTION :* /5

On demande d'assurer sur le dessin ci-dessous la liaison encastrement entre l'arbre (20) du moteur MT4 et la poulie motrice (21) en utilisant :

*Une clavette parallèle forme A .

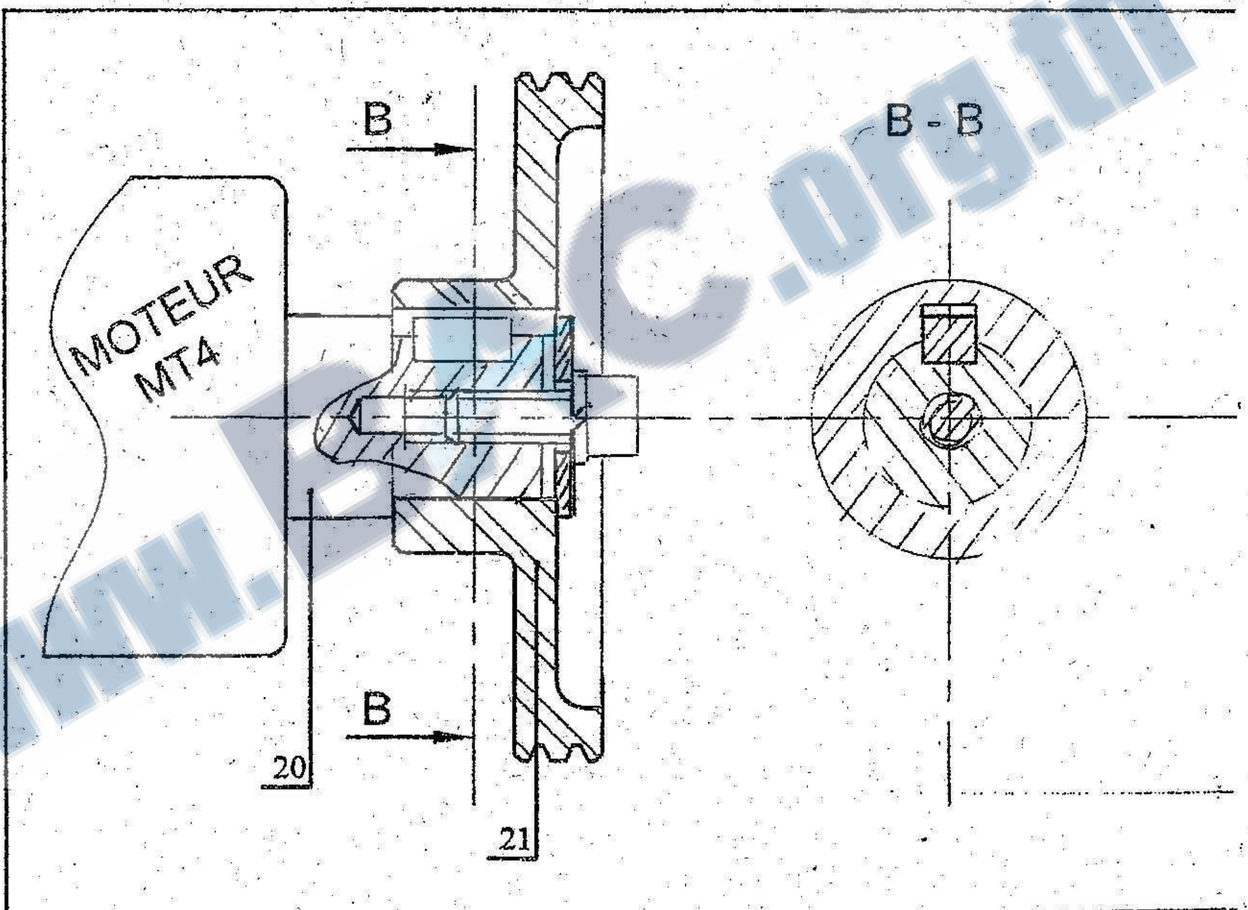
*Une rondelle plate d'appui

*Une rondelle grower pour le freinage de la vis

*Une vis CHc M8-22.

a/ Compléter, ci-dessous la vue de face en coupe et la section B-B

N.B :Pour le choix des éléments standards se référer au dossier technique feuille 2/3



b/ Compléter le tableau des ajustements suivant.

Pièces Assemblées	(3a) / (2)	(5) / (4)	(1) / (17)	(1) / (2)
Ajustements	ø H7g6	ø H7/h6	ø H7	ø m6

59

4°/L'arbre du moteur (MT4) tourne à une vitesse de 1440 trs/mn, et transmet son mouvement par le système poulies courroies à l'arbre (2), le rapport de cette transmission est r_1= 0,25.

Compléter le tableau suivant : /3,25

	1ère vitesse		2ème vitesse	
Roues dentées	3b	11b	3a	11a
Module (m)	2mm	2 mm	2mm	2mm
Nombre de dents (Z)	25	27 dents	30 dents	22
Diamètre primitif (d)	50 mm	54 mm	60 mm	44
Entraxe (a)	52 mm		= 52 mm	
Rapport (r_2)	25/27 = 0,925		30/22 = 1,36 > 1	
Rapport global (rg)	rg = 0,25 x 0,925 = 0,23		0,25 x 1,36 = 0,34	
Vitesse de sortie (N10)	N_{10} = 1440x0,23 = 331 tr/mn		N_{10} = 1440x0,34 = 489,6 tr/mn	

Calcul obligatoire :

$$a = \frac{m(Z_{3a}+Z_{11a})}{2} \Rightarrow \frac{2a}{m} = Z_{3a}+Z_{11a}$$

$$52 = 30 + Z_{11a} \Rightarrow Z_{11a} = 22$$

B-2- *Torsion* /4,5

Le manchon de la poulie réceptrice (7) est sollicité à la torsion. Ce dernier est assimilé à une poutre de section cylindrique creuse, de diamètre extérieur D=52mm, diamètre intérieur d et de résistance pratique au glissement Rpg= 30 N/mm².

Il transmet une puissance P=7,54 KW à une fréquence de rotation N=360 tr/min.

a- Calculer le moment de torsion exercé sur ce manchon.

$$P = C.\omega \Rightarrow C = \frac{P}{\omega} = \frac{7540 \times 60}{2\pi . 360} = 200 \text{ Nm}$$

b- Calculer la valeur du diamètre intérieur maximal "d_{max}"de ce manchon.

$$\frac{Mt \times R}{I_0} \leq Rpg \Rightarrow \frac{Mt}{\frac{\pi(D^4-d^4)}{32}} \times \frac{D}{2} \leq Rpg \Rightarrow \frac{16 \times Mt \times D}{\pi(D^4-d^4)} \leq R$$

$$\frac{16 \times Mt \times D}{\pi . Rpg} \leq D^4 - d^4 \Rightarrow d \leq \sqrt[4]{D^4 - \left[\frac{16 \times 2.10^5 \times 52}{\pi \times 30}\right]}$$

$$d \leq 48,528 \text{ mm} \Rightarrow d_{Max} = 48,52 \text{ mm}$$

13

60

NOM : .... PRENOM : .... 4SC.T....

A- ANALYSE FONCTIONNELLE D'UN SYSTEME TECHNIQUE

A 1 - Analyse fonctionnelle de la partie opérative

/2.25

a- En se référant au dessin d'ensemble à la page3/3 du dossier technique, compléter par les repères des pièces la chaîne cinématique de la fonction FT «Transmettre le mouvement de rotation de l'arbre du moteur MT4 à l'arbre de sortie (10).

MT4 → Poulie motrice → Deux courroies → 7 → 8 → 2 → 3 → 11 → 10 → Ecrou + chariot de transfert

b- Compléter le F.A.S.T partiel relatif à fonction technique suivante.

FT: Transmettre le mouvement de rotation de l'arbre du moteur MT4 à l'arbre de sortie (10).

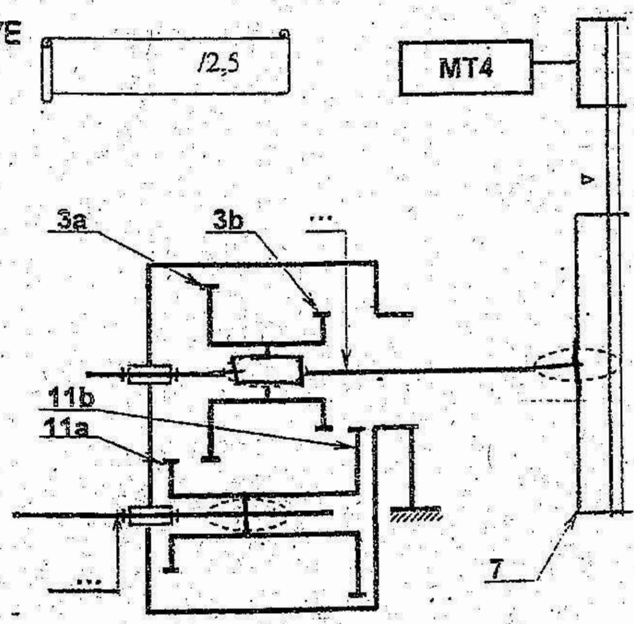
FT1: Convertir l'énergie électrique en énergie mécanique	Moteur Mt4
FT2 : Transmettre le mvt de la poulie mot à (2)	Système poulies -courroies
FT3: Guider en rotation l'arbre (2)/au corps	2 Roulements (1)
FT4: Transmettre et adapter le mvt de (2) → (10)	Boîte de vitesses (3+11)
FT5: Guider en rotation (10)/ bati	Roulements (9) et (13)

B- ANALYSE DE LA PARTIE OPERATIVE

B-1- *Schéma cinématique*

/2,5

1° /En se référant au dessin d'ensemble page 3/3 du dossier technique, compléter le schéma cinématique simplifié ci-contre.



2° /Compléter par les repères des pièces cinématiquement liées le bloc.

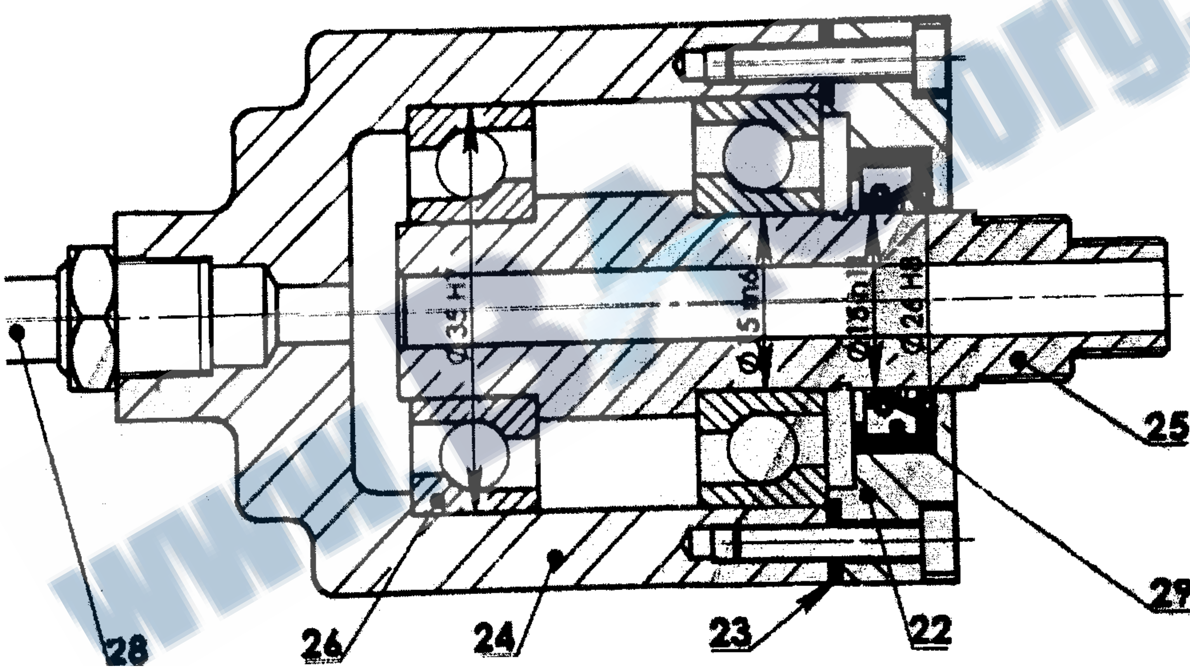
A= {4, 5, 6, (9 BE), (13 BE), 14, 15, 16, 17, 18, 19}

14

3°/Justifier la présence de la gorge sur l'arbre cannelé (2)

pour séparer des surfaces avec des tolérances différentes

A-A



L.MedALI - Sfax	DEVOIR DE CONTROLE N°02	$2^{ème}$ Trimestre
LABO : MECANIQUE	SCIENCE TECHNIQUE	Date : 09-02-2015
A-S : 2014-2015	GENIE MECANIQUE	Durée : 120min

NOM ET PRENOM ....Touns Fatma.......................................CLASSE : 4ST3.N°......

18,25/20

1- Solution associées aux fonctions technique

En se référant au dossier technique, compléter le diagramme FAST suivant en indiquant les solutions utilisées pour les quatre premières fonctions. *(1.5pt)*

1,25

	F : plier la tôle	Solution
FT1	Transformer l'énergie électrique en énergie mécanique	moteur électrique (1)
FT2	Lier à volonté le moteur à la poulie motrice	Embrayage hydraulique poulie motrice (5) + piston (11) + guide de piston (13).
FT3	Augmenter le couple à transmettre	système poulie-courroie
FT4	Transformer la rotation de la poulie réceptrice en translation du poinçon	Système bielle-manivelle

2- Analyse et compréhension du mécanisme

A partir du dessin d'ensemble

1,5

2-1 Compléter la désignation et la fonction des pièces suivantes. *(4x0,5pt)*

(17)...Clavette : pour guider en translation maintient le positionnement de l'arbre (17)

(9)...garniture : augmenter l'adhérence résiste au frottement et au chaleur.

(21)...vis : liée la poulie motrice (5) avec cloche (7)

(10). Ressort : Assurent le retour du piston (11) + Assurer le débrayage

2-2 La transmission est assurée par. Mettre une x devant la réponse juste. *(0,25pt)*

Obstacle	
Adhérence	X

0,25

2-3 Calculer le couple transmissible, on donne :

$C_r = \frac{2}{3}.n.N.f.\frac{(R^3-r^3)}{(R^2-r^2)}$, avec $\|\vec{N}\|$=200N, *f*=0.4 : *(1pt)*

0,1

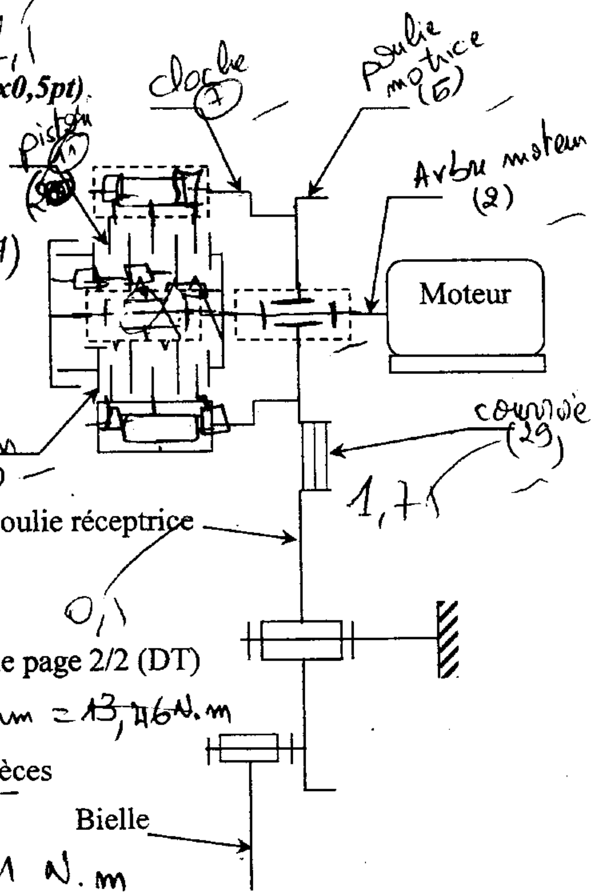
Remarque relever les valeurs de **R**, **r** et **n** à partir du dessin d'ensemble page 2/2 (DT)

$C_T = \frac{2}{3} \times 6 \times 200 \times 0,4 \times \left(\frac{36^3 - 26^3}{36^2 - 26^2}\right) = 13462,85$ N.mm = 13,46 N.m

$\left(\frac{48^3 - 39^3}{39^2 - 46^2}\right) = 20446,11$ N.m

2-4 En se référant au dessin d'ensemble indiquer les repères des pièces et compléter le schéma cinématique du système. *(2,25pts)*

1,75



3- Etude de la flexion de l'axe (25).

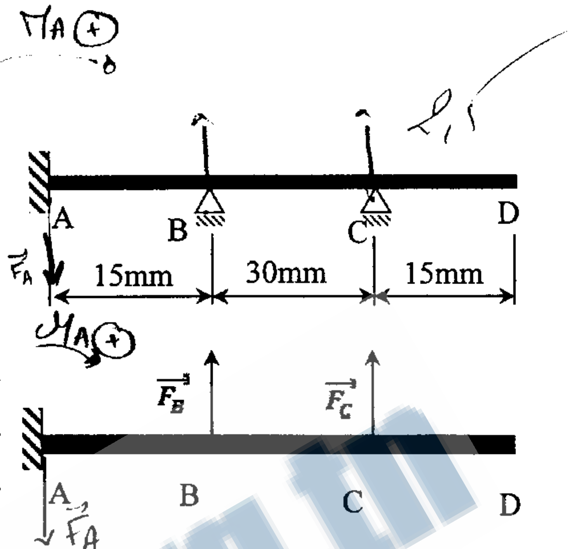
L'axe (25), assimilé à une poutre cylindrique de longueur 80mm et de diamètre Ø=12mm repose sur appuis B et C, encastré avec l'arbre moteur (2) au point A, est supposé sollicité à la flexion simple.

L'arbre est en acier de résistance à la limite élastique Re=500N/mm² et le coefficient de sécurité s=3.

On donne : $\|\vec{F_B}\| = \|\vec{F_C}\| = 420N$.

3-1 Etude de l'équilibre de l'axe(25).

Calculer et représenter ci-contre les actions au point(A) *(2.5pt)*



$\sum \vec{F_{ext}} = \vec{0}$ Aig

$-F_A + F_B + F_C = 0$

Aig $F_A = F_B + F_C = 420 \times 2$

$= 840\ N$

$\sum \mathcal{M}_{F_{ext}} = \vec{0}$ Aig

$\mathcal{M}_{F_A/A} + \mathcal{M}_A + \mathcal{M}_{\vec{F_B}/A} + \mathcal{M}_{\vec{F_C}/A} = \vec{0}$

$0 + \mathcal{M}_A + \mathcal{M}_{\vec{F_B}/A} + \mathcal{M}_{\vec{F_C}/A} = \vec{0}$

Aig $\mathcal{M}_A = F_B \times AB + F_C \times AC$

$= 420 \times 15 + 420 \times 45$

$\mathcal{M}_A = 25\,200\ N.mm$

$= 25,2\ N.m$

3-2 Tracer le diagramme des efforts tranchants le long de la poutre. *(1pt)*

Echelle : 1mm ⟶ 20N

Zone AB

Ty : $= -(-F_A) = F_A = 840\ N$

Zone BC

Ty : $-(-F_A + F_B) = F_A - F_B$

$= 840 - 420 = 420\ N$

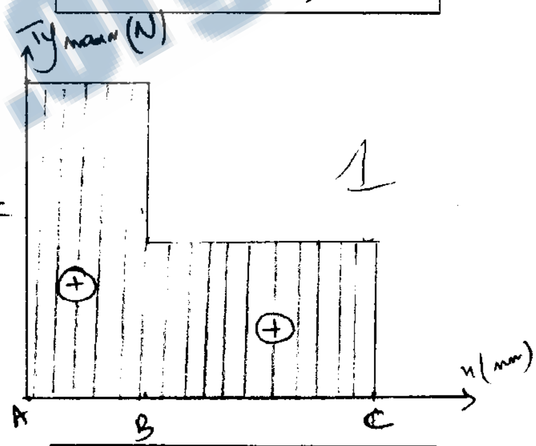
Echelle 1mm → 20N

42 mm → 840N

21 mm → 420 N

[C, D] : $T = F_A - F_B - F_C$

$= 0$



3-3 Tracer le diagramme des moments fléchissants le long de la poutre. *(1pt)*

Echelle : 1mm ⟶ 1N.m

Zone AB : $0 < x < 15$

$M_{f_3}(x) = -(F_A.x - \mathcal{M}_A)$

$= -F_A x + \mathcal{M}_A$

$M_{f_3}(0) = -840 \times 0 + 25,2$

$= 25,2\ N.m$

$M_{f_3}(15) = -840 \times 15 + 25\,200$

$= -37,8\ N.m$ ~~$= -37,8\ N.m$~~ $12,6\ N.m$

Zone BC : $15 < x < 45$

$M_{f_3}(x) = -(F_A.x - \mathcal{M}_A - F_B(x-15))$

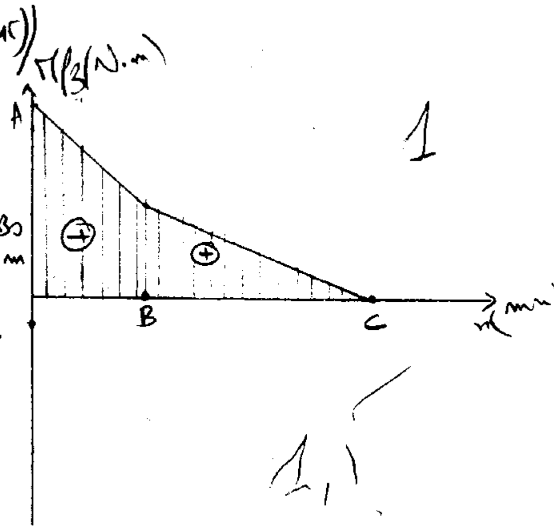
$= -F_A x + \mathcal{M}_A + F_B(x-15)$

$M_{f_3}(15) = -840 \times 15 + 25200 + 0$

$= 12,6\ N.m$

$M_{f_3}(45) = -840 \times 45 + 25200 + 420 \times 30$

$= 0\ N.m$



3-4 Calculer la contrainte normale maximale et vérifier si l'axe(4) résiste en toute sécurité. *(1.5pt)*

$\sigma_{maxi} = \dfrac{M_{f_3\,maxi}}{\dfrac{I_{G_3}}{V}} = \dfrac{M_{f_3\,maxi}}{\dfrac{\dfrac{\pi d^4}{64}}{\dfrac{d}{2}}} = \dfrac{M_{f_3\,maxi}}{\dfrac{\pi d^3}{32}}$

$= \dfrac{25,2 \times 32 \times 10^3}{\pi \times (12)^3}$

$\sigma_{maxi} = 148,54\ N/mm^2$

On a $\sigma_{maxi} < \dfrac{Re}{s} = \dfrac{500}{3}$

$\sigma_{maxi} < 166,6$

Donc l'axe (4) résiste en toute sécurité.

4-Définition d'un élément d'un produit.

Dans la position débrayée l'arbre (2) est guidé en rotation par rapport à la poulie (5) par deux roulements (3) et (3') comme le montre la figure ci-contre.

4-1 Etablir la chaine de cote de la cote condition A. *(1pt)*

4-2 Soit la chaine de cote de cote condition B.

On donne; B= $3^{+0,6}_{-0,4}$; B5=22±0,2 ; B7=24±0,1

Calculer ci-dessous B6. *(1.5pt)*

$B_{max} = B_{5max} + B_{6maxi} - B_{7mini}$

$B_{6max} = B_{max} - B_{5max} + B_{7mini}$

$= 3,6 - 22,2 + 23,9$

$= 5,3$

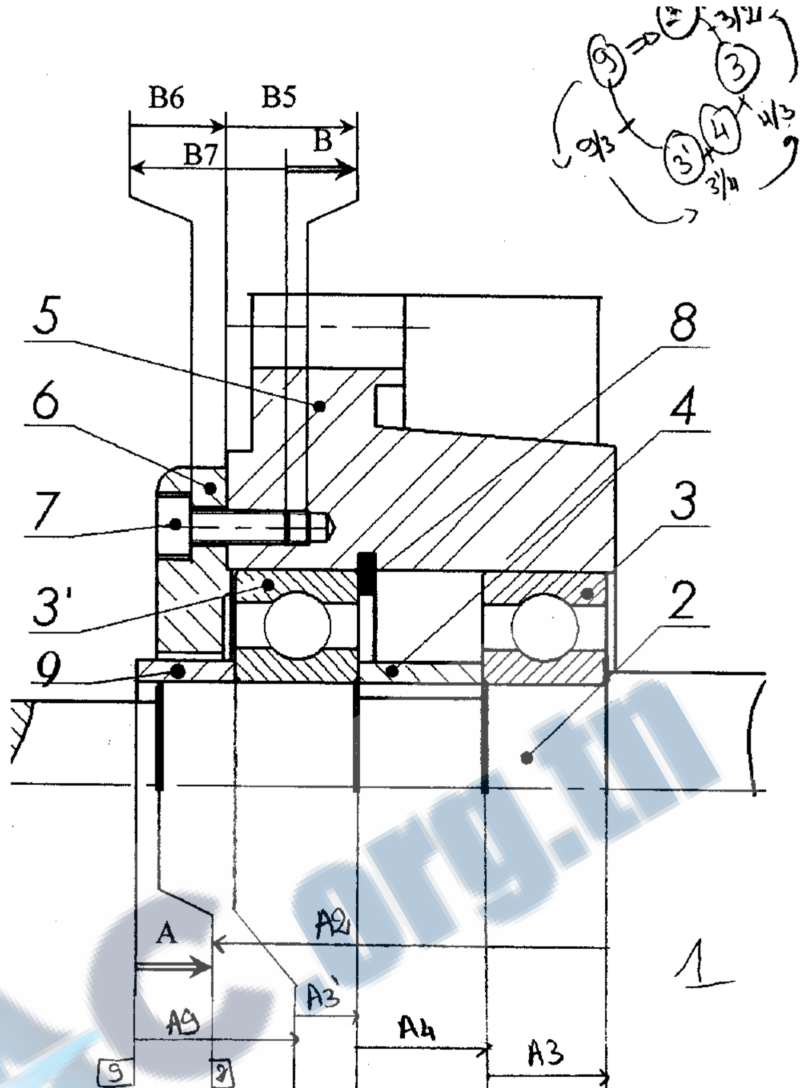
$B_{6mini} = B_{mini} - B_{5mini} + B_{7max}$

$= 2,6 - 21,8 + 24,1$

$= 4,9$

$B = 5^{+0,3}_{-0,1}$

1



1

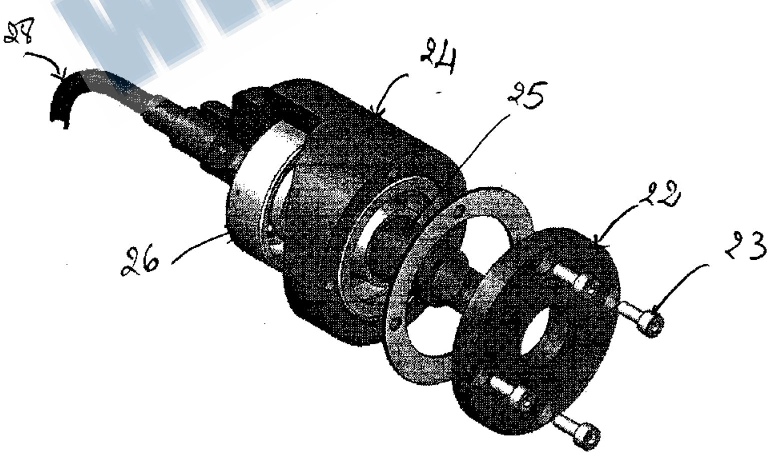
5-Conception

On se propose de compléter la conception du raccord tournant assurant l'arrivée d'huile vers le piston(11) voir figure ci-dessous. La liaison pivot entre l'axe (25) et le corps (24) est assurée par deux roulements de type BT.

- Compléter cette liaison. *(2pt)*
- Assurer l'étanchéité. *(0.5pt)*
- Indiquer les ajustements. *(1pt)*
- Indiquer les repères de chacune des pièces sur le dessin. *(1pt)*

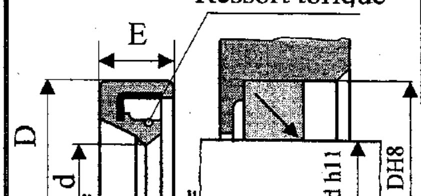
3,

1



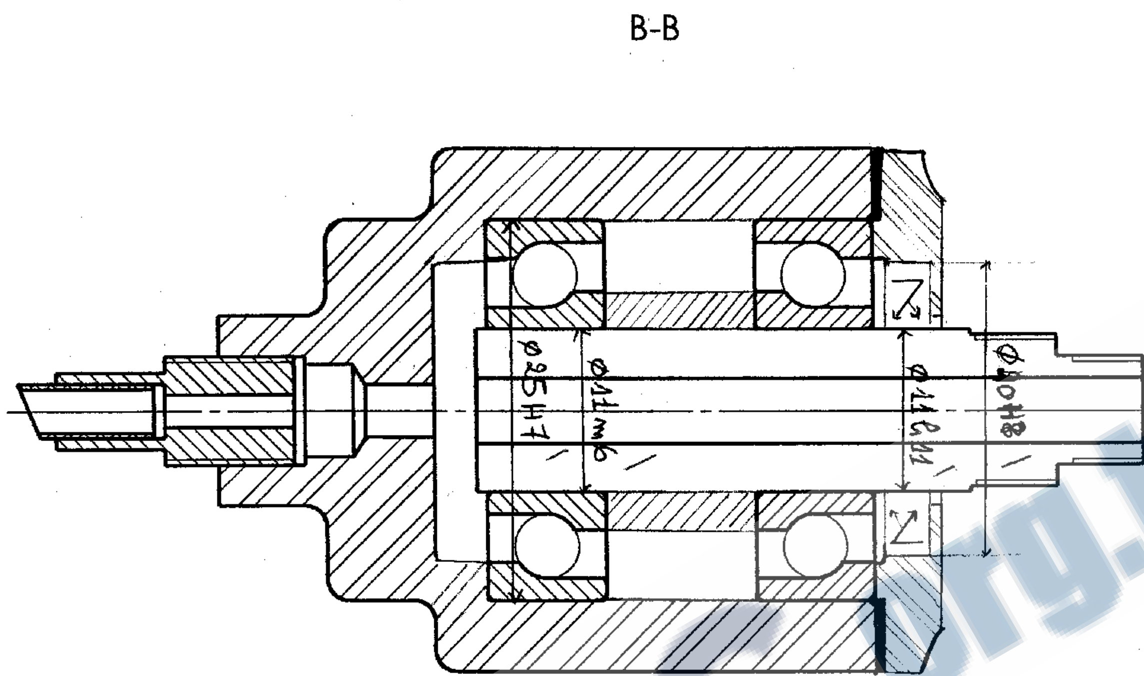
Raccord tournant

Symbole Paulstra : IE
Nadella :ET



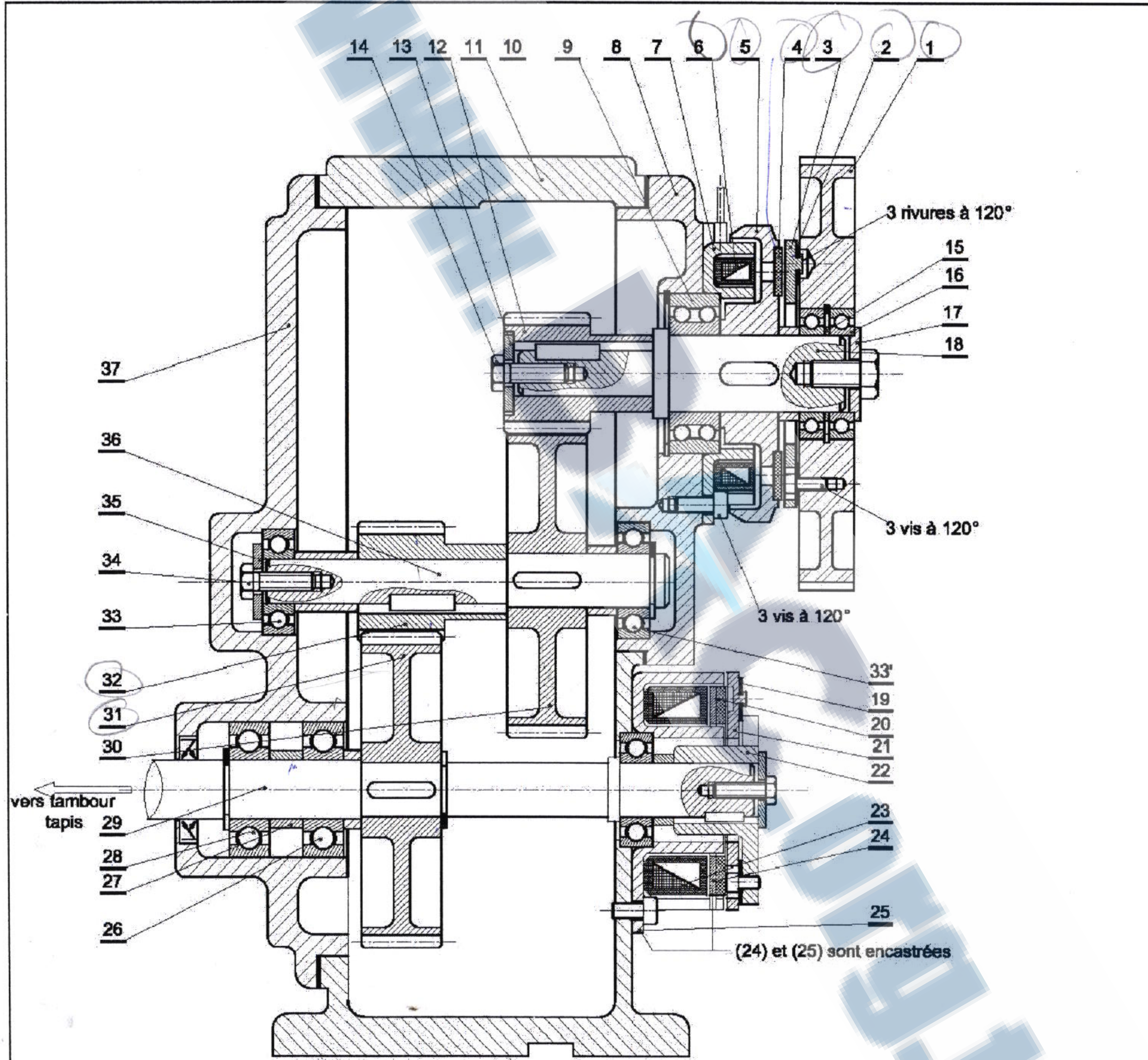
Joints Paulstra type IE et IEL

d	D	E	d	D	E
10	25	8	32	50	8
12	28	8	35	52	10
15	30	8	38	55	10
18	35	8	40	58	10
20	38	8	42	60	12
22	40	8	45	62	12
25	42	8	48	68	12
28	45	8	50	72	12
30	48	8	52	75	12



Rep.	Nbre	Désignation	Matière	Référence
29	1	Joint à double lèvre		
28	1	Conduite hydraulique		
26	2	Roulement type BT		
25	1	Axe		
24	1	Corps		
23	4	Cales		
22	1	Couvercle		

LABO-MECANIQUE Lycée: Med Ali -Sfax	Echelle: 2:1	Remarques:	Dessiné par: *Prof:SAKKA-WALID* AU:2014-2015
MOTEUR-EMBRAYAGE			Remis à jour le: N° réf: P-3



37	1	Flasque
36	1	Arbre intermédiaire
35	1	Rondelle
34	1	Vis H
33'	1	Roulement BC
33	1	Roulement BC
32	1	Pignon
31	1	Roue dentée
30	1	Roue dentée
29	1	Arbre de sortie
28	1	Roulement BC
27	1	Bague
26	1	Roulement
25	1	Porte bobine
24	1	Support de garniture
23	1	Bobine
22	1	Plateau
21	1	Disque de frein
20	1	garniture de friction
19	1	Membrane élastique (joue le rôle d'un ressort)
18	1	Arbre d'entrée
17	1	Rondelle spéciale
16	2	Roulement BC
15	1	Bague
14	1	Vis H
13	1	rondelle
12	1	Pignon
11	1	Bâti
10	1	
9	1	Roulement
8	1	Flasque
7	1	porte bobine
6	1	bobine
5	1	Rotor
4	1	Garniture de friction
3	1	disque d'embrayage
2	1	membrane élastique (joue le rôle d'un ressort)
1	1	Poulie réceptrice
Rep	Nb	Désignation

CONDITIONNEUSE DE POTS DE YAOURT

REDUCTEUR - EMBRAYAGE - FREIN

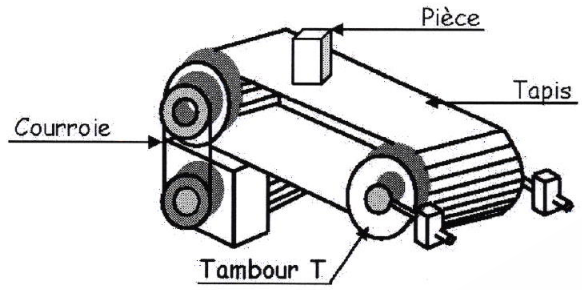
Echelle 1:1

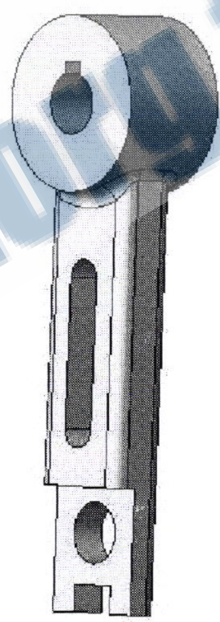
Dossier technique page 3/3

LYCEE ALI BOURGUIBA MAHRES	Devoir de Contrôle N° 2	Classe : 4 Sc.Tech
A.S : 2013/2014		Durée : 2heures

Système d'amener les pièces

Fonction: Permettre d'amené des pièces à travers des bandes transporteuses (Tapis) commandé par un moteur réducteur avec embrayage frein accouplé à l'axe de transmission par un **lien flexible**.
Le tambour tapis est fixé sur le banc de la machine.

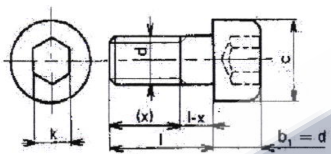




Pièce (38) en 3D

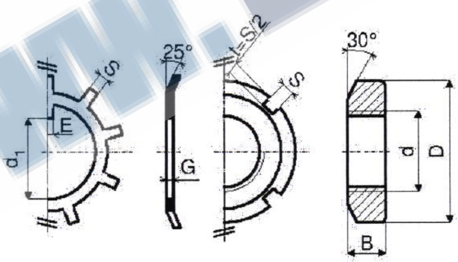
Eléments standards :

- Vis à tête cylindrique à 6 pans creux :CHc



d	5	6	8
c	8,5	10	13
k	4	5	6

- Ecrou a encoche et rondelle frein :



N°	d x pas	D	B	S	d_1	E	G
3	17 x 1	28	5	4	15.5	4	1
4	20 x 1	32	6	4	18.5	4	1
5	25 x 1.5	38	7	5	23	5	1.25

B2- Étude du frein : (0 ,75 pts)

Le positionnement des pièces sous les différents postes avec précision impose le freinage instantané du tapis tournant. Pour cela, un frein est installé pour arrêter l'arbre de sortie (29).

- Donner le type du frein:

Frein a disque

- Donner le type de commande de ce frein :

Frein a commande électromagnétique

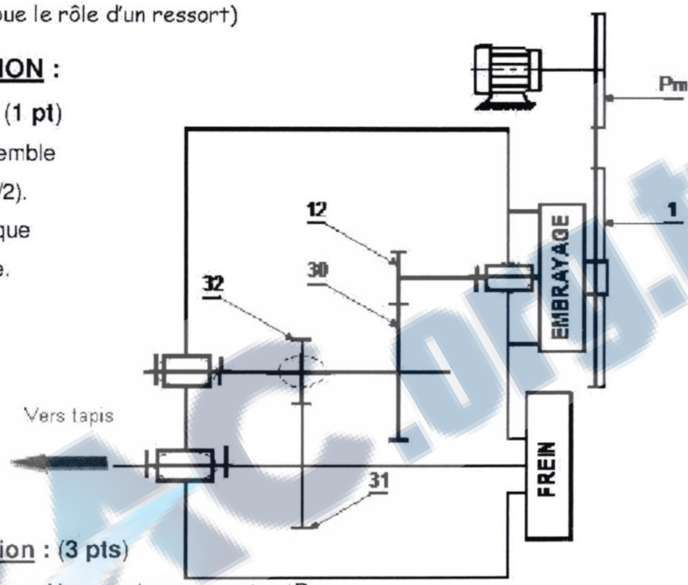
- Donner le rôle de la pièce (**19**) :

créer l'effort de de freinage (Joue le rôle d'un ressort)

C- ÉTUDE DE LA TRANSMISSION :

C1- Schéma cinématique : (1 pt)

En se référant au dessin d'ensemble (Voir dossier technique page 2/2). Compléter le schéma cinématique ci- contre en position embrayée.



2- Calcul de prédétermination : (3 pts)

But : Déterminer la vitesse moteur Nm et puissance moteur Pm.

Données : ~~N_m = 1500 trs/min~~ ; Z_{12} = 17 dents ; Z_{30} =51 dents ; Z_{32} = 15 dents ; Z_{31} = 60 dents ;d_t = 200 mm ;diamètre poulie motrice d_m = 40 mm.

La vitesse de translation d'une charge sur le tapis V_t = 0,3m/s

Le diamètre tambour de tapis D_t = 120 mm

En se référant au dessin d'ensemble (voir dossier technique page 6/6) et au schéma ci- dessus.

a- Calculer le rapport global de transmission entre l'arbre moteur et l'arbre (29) $\mathbf{r_g}$.

$$r_g = \frac{d_m}{d_t}\times\frac{Z_{12}}{Z_{30}}\times\frac{Z_{32}}{Z_{31}} = \frac{40}{200}\times\frac{17}{51}\times\frac{15}{60} = 0.016$$

b- Déterminer la vitesse de rotation de l'arbre de sortie lié au tapis N_{29}.

$$V_t = \frac{D_t}{2}\times W_{29} = 60.10^{-3}\times\frac{\pi\times N_{29}}{30} \Rightarrow N_{29} = \frac{30\times V_t}{\pi\times 0.06} = \frac{30\times 0.3}{\pi\times 0.06} = 47.7tr/\min$$

c- Déduire la vitesse motrice N_m.

$$r_g = \frac{N_{29}}{N_m} \Rightarrow N_m = \frac{N_{29}}{r_g} \Rightarrow N_m = \frac{47.7}{0.016} = 2981.25tr/\min$$

E- **CONCEPTION** : (5,75 pts)

- **Etude de l'assemblage du palier (38)**

On donne à l'échelle 1:1 le dessin d'ensemble partiel défini par la vue de face en coupe A-A incomplète et la vue de droite incomplète.

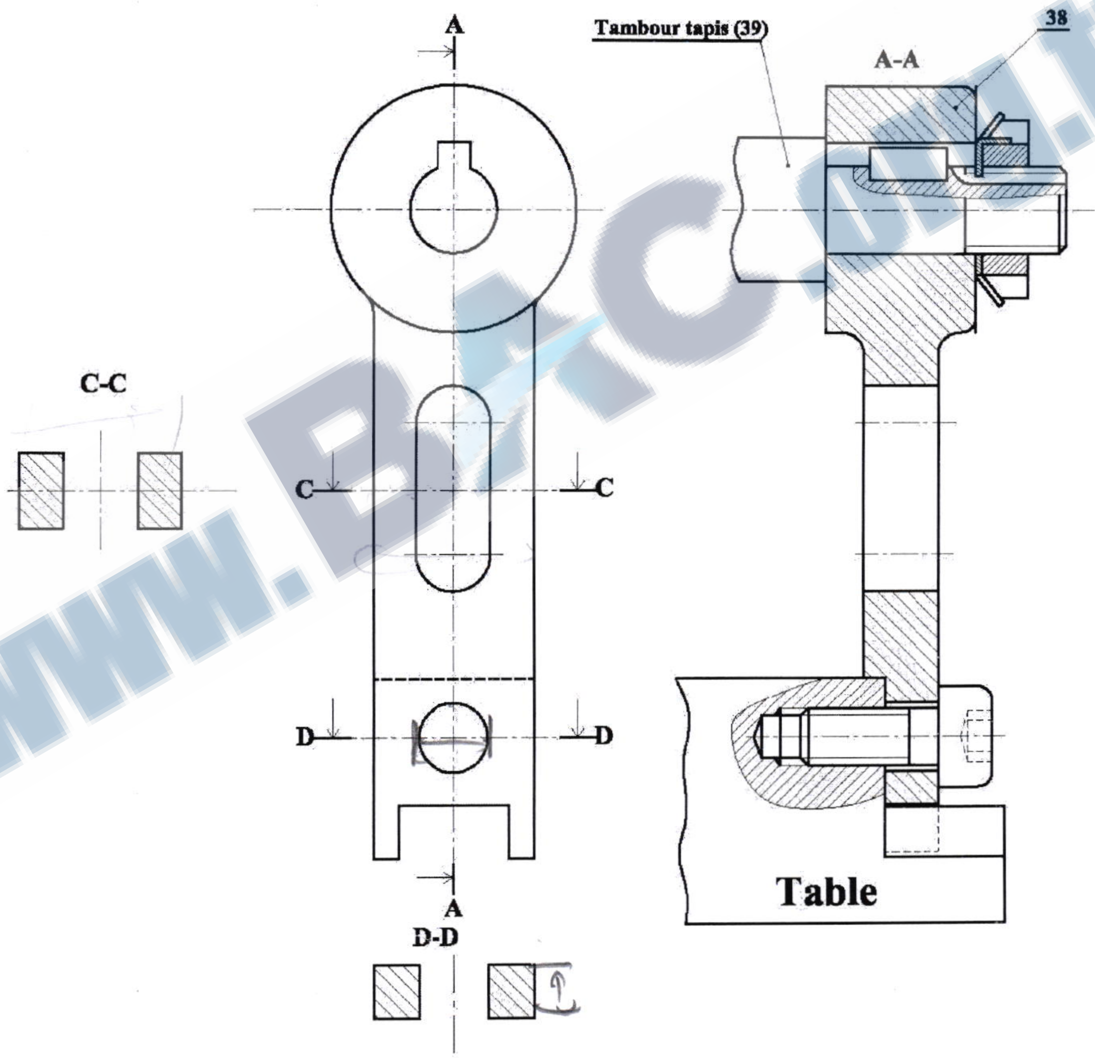
a- Compléter sur la vue de face :

- la représentation de l'assemblage du palier (38) avec (39) en assurant :
  - la fixation du palier sur l'arbre par **un écrou a encoche et rondelle frein**
- la fixation du palier (38) sur la table **par une vis à tête cylindrique a six pans creux** dont les dimensions seront choisies à partir de la page 1/2 du dossier technique.

b- Compléter la représentation du palier(38) sur la vue de droite.

c- représenter la section D-D.

d- représenter la section sortie C-C.



Nom ; .... Prénom : ....Classe : $4^{ème}$ ScT N°........

A- ANALYSE FONCTPONNELLE : (2 pts)

En se référant au dossier technique pages : **1/2** et **2/2** ; compléter ci-dessous le **F.A.S.T.** partiel décrivant la fonction : **"Entrainer le tapis en rotation"** par la fonction ou le processeur qui convient.

FP **Entrainer en rotation le plateau tournant**

Transformer l'énergie électrique en énergie mécanique de rotation.	Moteur électrique
Transmettre le mouvement de rotation de l'arbre moteur à la poulie (**1**)	Système poulies courroie (1)
Guider en rotation (**1**) par rapport à (**18**)	Deux roulements (16)
Lier a volonté (1) ,(5) et (18)	Embrayage
Guider en rotation (18) par rapport à (8).	Roulement à deux rangées de billes à contact oblique
Transmettre le mouvement de rotation de (**18**) à (**29**)	Engrenages (12,30) et (32,31)
Freiner l'arbre de sortie (29)	Frein
Transmettre le mouvement de rotation de (**29**) au tambour tournant	Système poulies courroie

B- ÉTUDE TECHNOLOGIQUE : (2, 5 pts)

B1- Étude de l'embrayage :

- Donner les repères de composants qui constituent l'embrayage :

(1,2,3,4,5)

- Donner le type de commande de cet 'embrayage :

Embrayage a commande électromagnétique

- Déterminer la source de l'effort presseur :

Electro-aimant (6)

- Déterminer le couple transmissible par cet embrayage. (pour les données manquantes, se référer au dessin d'ensemble page 2/2). On rappelle que :

$$Ct = \frac{2}{3} .n.N.f. \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$$

Avec : - **Ct** : couple transmissible (**Nmm**) | - **f = 0.4** ; **N = 150N**

- **n** = 1 | - **R** = 23 **mm** ; **r** = 14 **mm**.

$$Ct = \frac{2}{3} \times 1 \times 150 \times 0.4 \times \frac{23^3 - 14^3}{23^2 - 14^2} = 1131.9 \text{ Nmm}$$

d- Calculer la puissance motrice P_m sachant que P_{29} = 1,7Kw et le rendement global η_g = 0,85

$$\eta_g = \frac{P_{29}}{P_m} \Rightarrow P_m = \frac{P_{29}}{\eta_g} = \frac{1700}{0.85} = 2000w$$

D- COMPORTEMENT D'UN SOLIDE DÉFORMABLE (Flexion) : (5,25 pts)

Objectif de l'étude : Vérifier la résistance de l'arbre (18) à la flexion.

1. Modélisation

L'arbre (**18**), supposé sollicité à la flexion uniquement, est assimilé à une poutre cylindrique pleine de diamètre **d = 24 mm** encastré en A et repose sur un appui en C. Elle est soumise à une charge en B tel que : **II $\vec{F_b}$ II= 500 N** et **II $\vec{F_c}$ II= 200 N** . (voir figure 1).

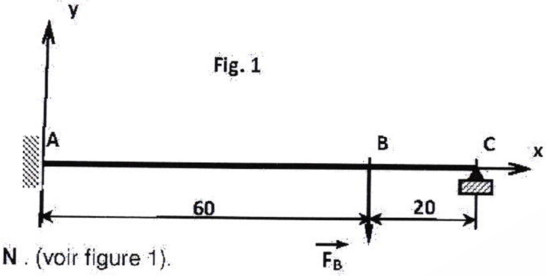
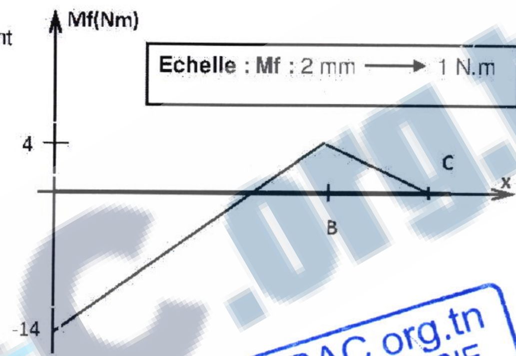


Fig. 1

2. Travail demandé

a- tracer le diagramme des moments fléchissant le long de la poutre AC :



Zone AB : $0 \le x \le 60$

$$M_f = -[-F_A x + 14000] = 300x - 14000$$

Si x=0 ➜ Mf = -14000N.m=-14Nm

Si x=60 ➜ Mf= 4000Nmm

Zone BC : $60 \le x \le 80$

$$M_f = -[-F_A x + 14000 + F_B(x-60)] = -200x + 16000$$

S x=80 ➜ Mf= 0

Préciser l'abscisse x_F du point F de la zone AB avec Mf_F=0.

$$M_f = -[-F_A x + 14000] = 300x - 14000 = 0 \Rightarrow x_f = \frac{14000}{300} = 46.6mm$$

b- Calculer la contrainte normale :

$$\sigma_{max\,i} = \frac{|Mf\ max\ i|}{\frac{Igz}{v}} = \frac{32|Mf\ max\ i|}{\pi . d^3} = \frac{32 \times 14000}{\pi . 24^3} = 10.31 N/mm^2$$

2.3- Vérifier la résistance de l'arbre (18) à la flexion sachant qu'il est en acier de limite élastique à l'extension Re = 120 MPa et que le coefficient de sécurité s = 4.

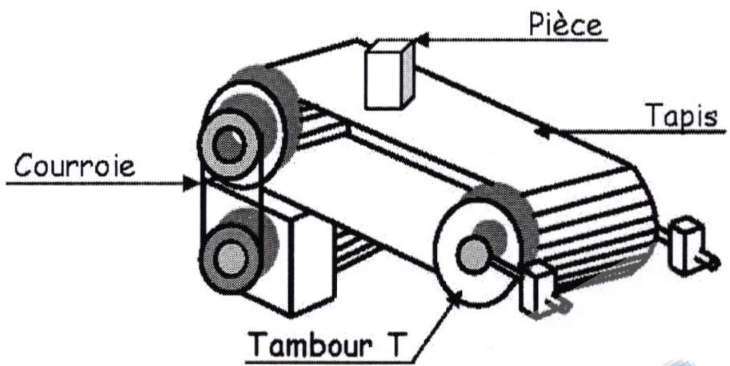
$$Rpg = \frac{Re}{s} = \frac{120}{4} = 30 N/mm^2$$

La relation $\sigma_{max\,i} \le Rpg$ est vraie (10.31< 30) donc l'arbre résiste a la flexion en toute sécurité

LYCEE ALI BOURGUIBA MAHRES	Devoir de Contrôle N° 2	Classe : 4 Sc.Tech
A.S : 2013/2014		Durée : 2heures

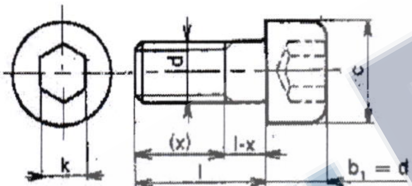
Système d'amener les pièces

Fonction: Permettre d'amené des pièces à travers des bandes transporteuses (Tapis) commandé par un moteur réducteur avec embrayage frein accouplé à l'axe de transmission par un **lien flexible**.
Le tambour tapis est fixé sur le banc de la machine.

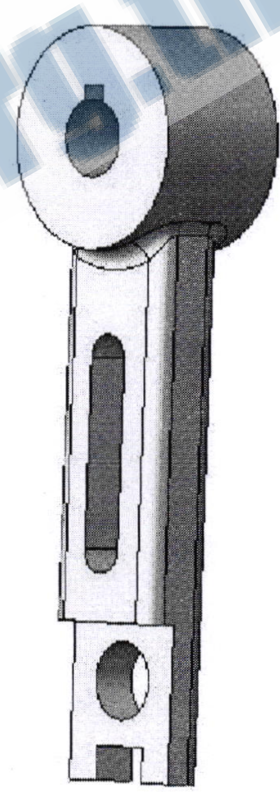


Eléments standards :

- Vis à tête cylindrique à 6 pans creux :CHc

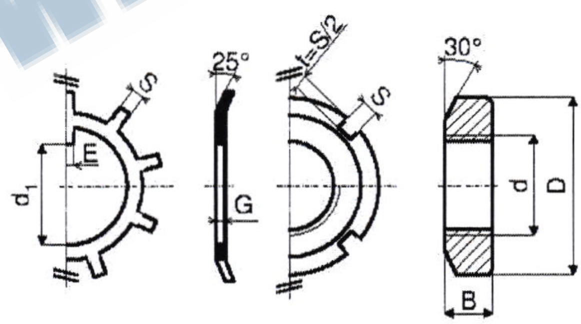


d	5	6	8
c	8,5	10	13
k	4	5	6

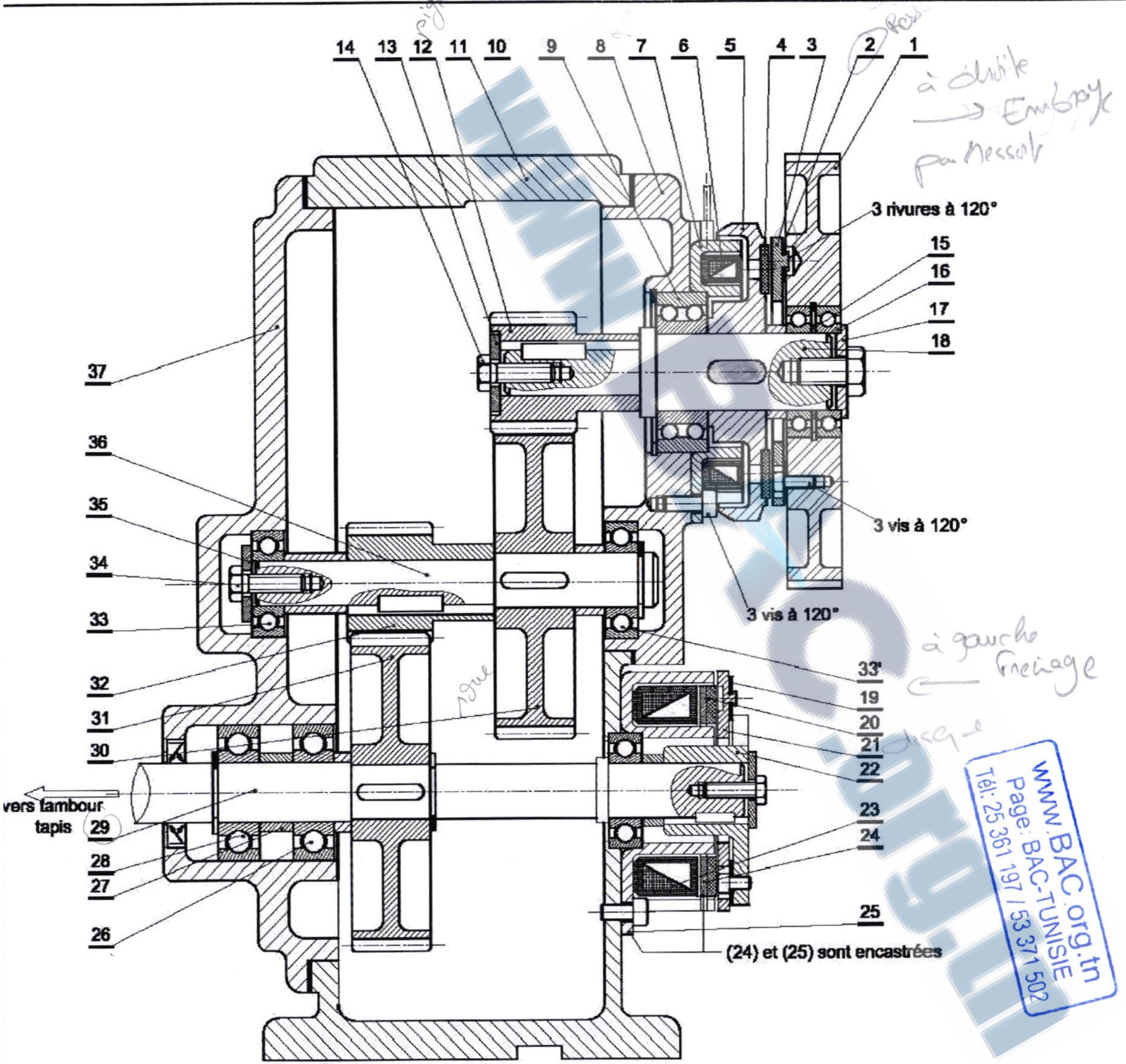


Pièce (38) en 3D

- Ecrou a encoche et rondelle frein :



N°	d x pas	D	B	S	d_1	E	G
3	17 x 1	28	5	4	15.5	4	1
4	20 x 1	32	6	4	18.5	4	1
5	25 x 1.5	38	7	5	23	5	1.25



Dossier technique page 3/3

Rep	Nb	Désignation
37	1	Flasque
36	1	Arbre intermédiaire
35	1	Rondelle
34	1	Vis H
33'	1	Roulement BC
33	1	Roulement BC
32	1	Pignon
31	1	Roue dentée
30	1	Roue dentée
29	1	Arbre de sortie
28	1	Roulement BC
27	1	Bague
26	1	Roulement
25	1	Porte bobine
24	1	Support de garniture
23	1	Bobine
22	1	Plateau
21	1	Disque de frein
20	1	garniture de friction
19	1	Membrane élastique (joue le rôle d'un ressort)
18	1	Arbre d'entrée
17	1	Rondelle spéciale
16	2	Roulement BC
15	1	Bague
14	1	Vis H
13	1	rondelle
12	1	Pignon
11	1	Bâti
10	1	
9	1	Roulement
8	1	Flasque
7	1	porte bobine
6	1	bobine
5	1	Rotor
4	1	Garniture de friction
3	1	disque d'embrayage
2	1	membrane élastique (joue le rôle d'un ressort)
1	1	Poulie réceptrice

CONDITIONNEUSE DE POTS DE YAOURT

REDUCTEUR - EMBRAYAGE - FREIN

Echelle 1:1

Nom ; .... Prénom : ....Classe : $4^{ème}$ ScT N°........

A- ANALYSE FONCTPONNELLE : (2 pts)

En se référant au dossier technique pages : **1/2** et **2/2** ; compléter ci-dessous le **F.A.S.T.** partiel décrivant la fonction : **"Entrainer le tapis en rotation"** par la fonction ou le processeur qui convient.

FP | **Entrainer en rotation le plateau tournant**

transformer l'Energie électrique en énergie mécanique de rotation	Moteur électrique
Transmettre le mouvement de rotation de l'arbre moteur à la poulie (**1**)	Système poulie courroies (1)
Guider en rotation (**1**) par rapport à (**18**)	deux roulements BC (16)
transmettre ou volonté le mvt de rotation de la poulie (1) à l'arbre (18) — lier à volonté en (1) et (5) (18)	Embrayage
guider en rotation l'arbre (18) par rapport à (8)	Roulement à deux rangées de billes à contact oblique
Transmettre le mouvement de rotation de (**18**) à (**29**)	Système Engrenage (18-36) et (36-29) — (18-30) et (32-31)
~~Arrêter le mvt de rotation de l'arbre (18)~~ — Freiner l'arbre de sortie (29)	Frein
Transmettre le mouvement de rotation de (**29**) au tambour tournant	~~Accouplement~~ système poulie courroie

B- ÉTUDE TECHNOLOGIQUE : (2, 5 pts)

B1- Étude de l'embrayage :

- Donner les repères de composants qui constituent l'embrayage : 5 - 4 - 3 - 2 - 1 - ~~16~~ - 18 -
- Donner le type de commande de cet 'embrayage : Embrayage ~~mécanique~~ Electromagnétique
- Déterminer la source de l'effort presseur : le Ressort ~~qui~~ crée l'effort presseur membrane Elastique (2). Electro-aimant (6)
- Déterminer le couple transmissible par cet embrayage. (pour les données manquantes, se référer au dessin d'ensemble page 2/2). On rappelle que :

$$Ct = \frac{2}{3}.n.N.f.\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$$

Avec : - **Ct** : couple transmissible (**Nmm**) | - **f = 0.4** ; **N = 150N**

- **n = 1** | - **R =** 22 **mm** ; **r =** 12 **mm**.

$$C_t = \frac{2}{3}\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2} \times n \times f \times \|\vec{F}\| = \frac{2}{3} \times \frac{22^3-12^3}{22^2-12^2} \times 150 \times 0{,}4 \times 1 = 1049{,}41\ N.mm = 1{,}049\ N.m$$

B2- Étude du frein : (0 ,75 pts)

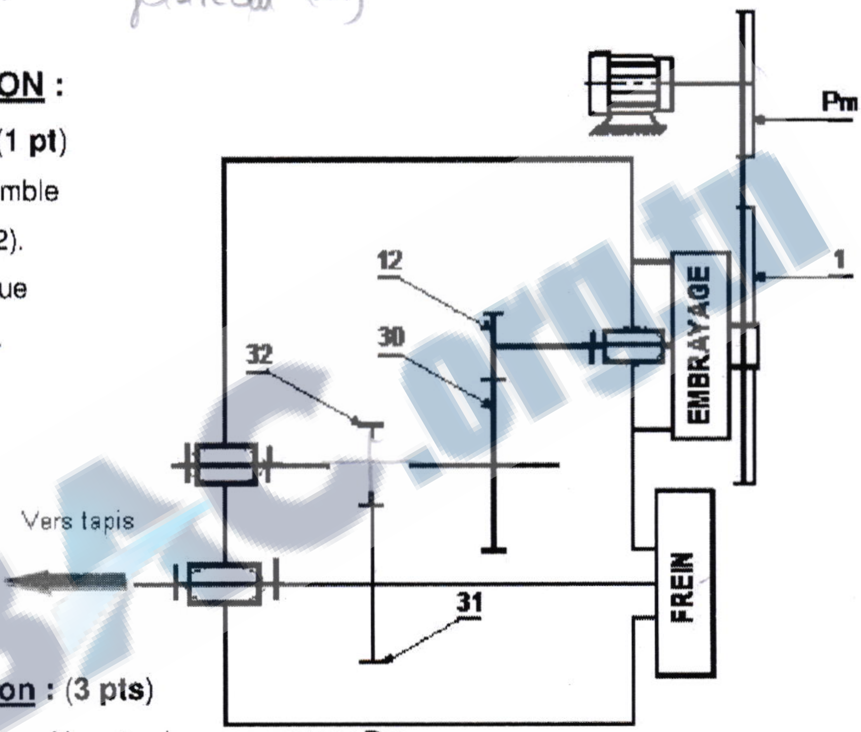
Le positionnement des pièces sous les différents postes avec précision impose le freinage instantané du tapis tournant. Pour cela, un frein est installé pour arrêter l'arbre de sortie (29).

- Donner le type du frein: Frein à disque ✓
- Donner le type de commande de ce frein : freinage Electromagnétique ✓
- Donner le rôle de la pièce (**19**) : pousser le disque (21) pour atteint le plateau (22) arrière

C- ÉTUDE DE LA TRANSMISSION :

C1- Schéma cinématique : (1 pt)

En se référant au dessin d'ensemble (Voir dossier technique page 2/2). Compléter le schéma cinématique ci- contre en position embrayée.



2- Calcul de prédétermination : (3 pts)

But : Déterminer la vitesse moteur Nm et puissance moteur Pm.

Données : ~~N_m = 1500 trs/min~~ ; Z_{12} = 17 dents ; Z_{30} =51 dents ; Z_{32} = 15 dents ;

Z_{31} = 60 dents ;d_1 = 200 mm ;diamètre poulie motrice d_m = 40 mm.

La vitesse de translation d'une charge sur le tapis V_t = 0,3m/s

Le diamètre tambour de tapis D_t = 120 mm

En se référant au dessin d'ensemble (voir dossier technique page 6/6) et au schéma ci- dessus.

a- Calculer le rapport global de transmission entre l'arbre moteur et l'arbre (29) r_g.

$$r_g = r_1 \times r_{12-30} \times r_{32-31} = \frac{d_m}{d_1} \times \frac{Z_{12}}{Z_{30}} \times \frac{Z_{32}}{Z_{31}} = \frac{40}{200} \times \frac{17}{51} \times \frac{15}{60} = 0,016$$ ✓

b- Déterminer la vitesse de rotation de l'arbre de sortie lié au tapis N_{29}.

$$V = r.\omega = \frac{d}{2} \times \frac{\pi N_{29}}{30} \Rightarrow N_{29} = \frac{V \times 60}{d \times \pi} = \frac{0,3 \times 60}{0,12 \times \pi} = 47,746 \text{ tr/min}$$ ✓

c- Déduire la vitesse motrice N_m.

$$r_g = \frac{N_{29}}{N_m} \Rightarrow N_m = \frac{N_{29}}{r_g} = \frac{47,746}{0,016} = 2984,125 \text{ tr/min}$$ ✓

d- Calculer la puissance motrice P_m **sachant** que P_{29} = 1,7Kw et le rendement global η_g = 0,85

$\eta = \frac{P_{29}}{P_m} \Rightarrow P_m = \frac{P_{29}}{\eta} = \frac{1,7\times10^3}{0,85} = 2000\ W$

D- COMPORTEMENT D'UN SOLIDE DÉFORMABLE (Flexion) : (5,25 pts)

Objectif de l'étude : Vérifier la résistance de l'arbre (**18**) à la flexion.

1. Modélisation

L'arbre (**18**), supposé sollicité à la flexion uniquement, est assimilé à une poutre cylindrique pleine de diamètre **d = 24 mm** encastré en A et repose sur un appui en C. Elle est soumise à une charge en B tel que : **$\|\vec{F_b}\|$= 500 N** et **$\|\vec{F_c}\|$= 200 N** . (voir figure 1).

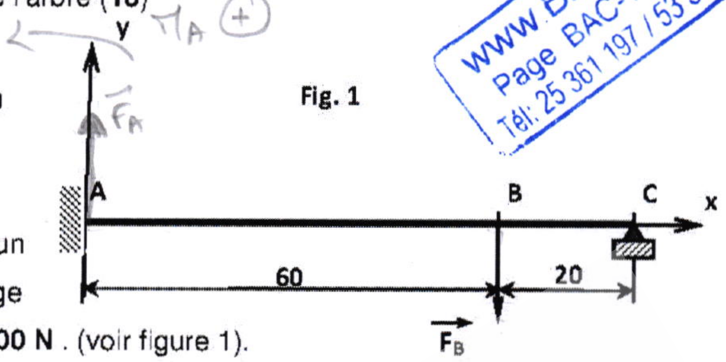
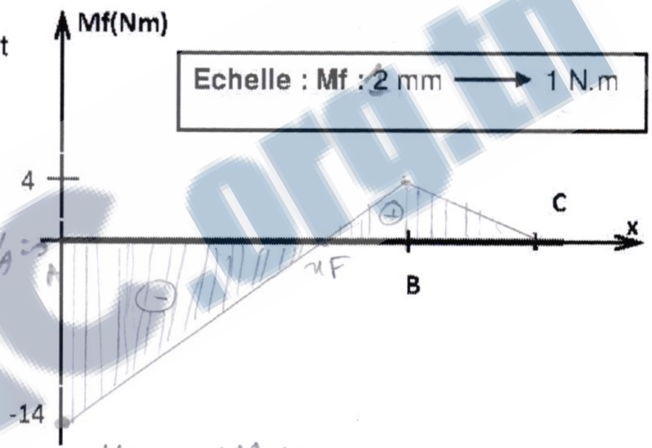


Fig. 1

2. Travail demandé

a- tracer le diagramme des moments fléchissant le long de la poutre AC :



$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow F_A - F_B + F_C = 0$

$F_A = F_B - F_C = 500 - 200 = 300\ N$

$\sum \vec{M}_{F_{ext}} = \vec{0} \Rightarrow M_{A/A} + M_{F_A/A} + M_{F_B/A} + M_{F_C/A} = 0$

$M_A + 0 - F_B \times AB + F_C \times AC = 0$

$M_A = 500\times60 - 200\times80 = 14000\ N.mm = 14\ N.m$

Zone AB : $0 < x < 60$: $Mf_3(x) = -(-F_A\cdot x + M_A) = F_A\cdot x - M_A$; $Mf_3(0) = -14\ N.m$

$Mf_3(60) = 4\ N.m$ et Zone BC : $60 < x < 80$; $Mf_3(x) = -(-F_A\cdot x + M_A + F_B(x-60))$ $= F_A\cdot x - M_A - F_B(x-60)$; $Mf_3(60) = 4\ N.m$ et $Mf_3(80) = 0$

Préciser l'abscisse x_F du point F de la zone AB avec Mf_F=0.

$x_F = 35\ mm$

b- Calculer la contrainte normale : $\|\sigma_{maxi}\| = \frac{Mf_{3\,maxi}}{\frac{I_{Gz}}{v}} = \frac{Mf_{3\,maxi}}{\frac{\pi d^4/64}{d/2}} = \frac{Mf_3 \times 32}{\pi d^3}$

$\sigma_{maxi} = \frac{14000\times32}{\pi\times24^3} = 10,315\ N/mm^2$

2.3- Vérifier la résistance de l'arbre (18) à la flexion sachant qu'il est en acier de limite élastique à l'extension Re = 120 MPa et que le coefficient de sécurité s = 4.

$\|\sigma_{maxi}\| < \frac{Re}{s} = \frac{120}{4} = 30$ et on a $\sigma_{maxi} = 10,31 < \frac{Re}{s} = 30$

D'où, l'arbre (18) résiste à la flexion en toute sécurité