S V T -------- 4ème année de l'enseignement secondaire ------------- Section Sciences Expérimentales

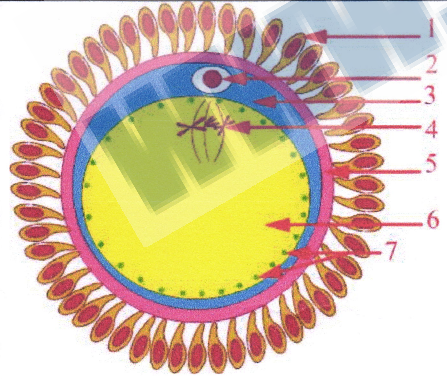
Prof. Mr Châabouni Sami	Résumé II La fonction reproductrice féminine	Année Scolaire : 2016/2017 Classe : 4ème expérimentale

- ❖ **La folliculogenèse** est l'évolution des follicules à partir d'un stade initial (follicule primordial) jusqu'à un follicule mûr ou de Graaf
- ❖ **L'ovulation** est l'éclatement d'un follicule mûr et expulsion du gamète femelle ovocyte II bloqué en M II vers le pavillon
- ❖ **L'origine du corps jaune** : Le corps jaune provient de follicule mûr éclaté : les cellules restantes de la granulosa et de la thèque interne se multiplient. Les cellules de la granulosa se chargent d'un pigment lipidique jaune appelés lutéines

Follicules	Gamète femelle	Zone pellucide	Cellules folliculaires	Cavité folliculaire	Thèque interne	Thèque externe
Follicule primordial	Ovocyte I	-	Quelques cellules folliculaires aplaties	-	-	-
Follicule primaire	Ovocyte I	-	Une seule couche	-	-	-
Follicule secondaire	Ovocyte I	+	Plusieurs couche appelée granulosa	-	Non différencié	Non différencié
Follicule tertiaire ou cavitaire	Ovocyte I	+	Plusieurs couche appelée granulosa	Quelques cavités dans le granulosa	Bien différencié	Bien différencié
Follicule mû ou de Graaf	Ovocyte I	+	Plusieurs couche appelée granulosa	Une seule cavité très grande appelée antrum	Bien différencié	Bien différencié
Follicule rompu	Ovocyte I ou II	+	Plusieurs couche appelée granulosa	-	**Bien différencié**	**Bien différencié**

Une thèque externe est formée de cellules aplaties et de fibres conjonctives (rôle protectrice).
Une thèque interne est formée de cellules glandulaires (rôle sécrétrices hormonales).

- ❖ **Gamète femelle = ovocyte II bloqué en métaphase II**



Le gamète femelle est de forme sphérique, immobile, volumineuse et de structure complexe (constituée de plusieurs types de cellules)

Le cytoplasme de l'ovocyte II est riche en substance nutritive appelée (vitellus).

Le cytoplasme de l'ovocyte II contient des granules corticaux intervenant au moment de la fécondation.

- ❖ **Comparaison avec gamète mâle**

		Gamète mâle	Gamète femelle
Points communs		Cellule sexuelle haploïde porte chacun la moitié de l'information génétique	
Points différents	**Forme**	Allongée	Sphérique
	Taille	Petite	Grande
	Réserve	Pauvre	Riche
	Mobilité	Mobile	Immobile
	Survie	3 à 5 jours	2 jours

	Nombre produit	$60\ 10^6$ par éjaculat	1 seul par cycle
	Cytoplasme	Pauvre	Riche
	Maturation	Mature	Immature
Particularité chromosomique		Un noyau haploïde à n = 23 chromosomes simples n = 22 + X ou n = 22 + Y	Un noyau haploïde à n = 23 chromosomes dupliqués n = 22 + X

❖ **L'ovogenèse** est la formation des gamètes femelles

L'ovogenèse commence avant la naissance, puis elle poursuive entre la puberté et la ménopause d'une façon cyclique (1gamète par cycle).

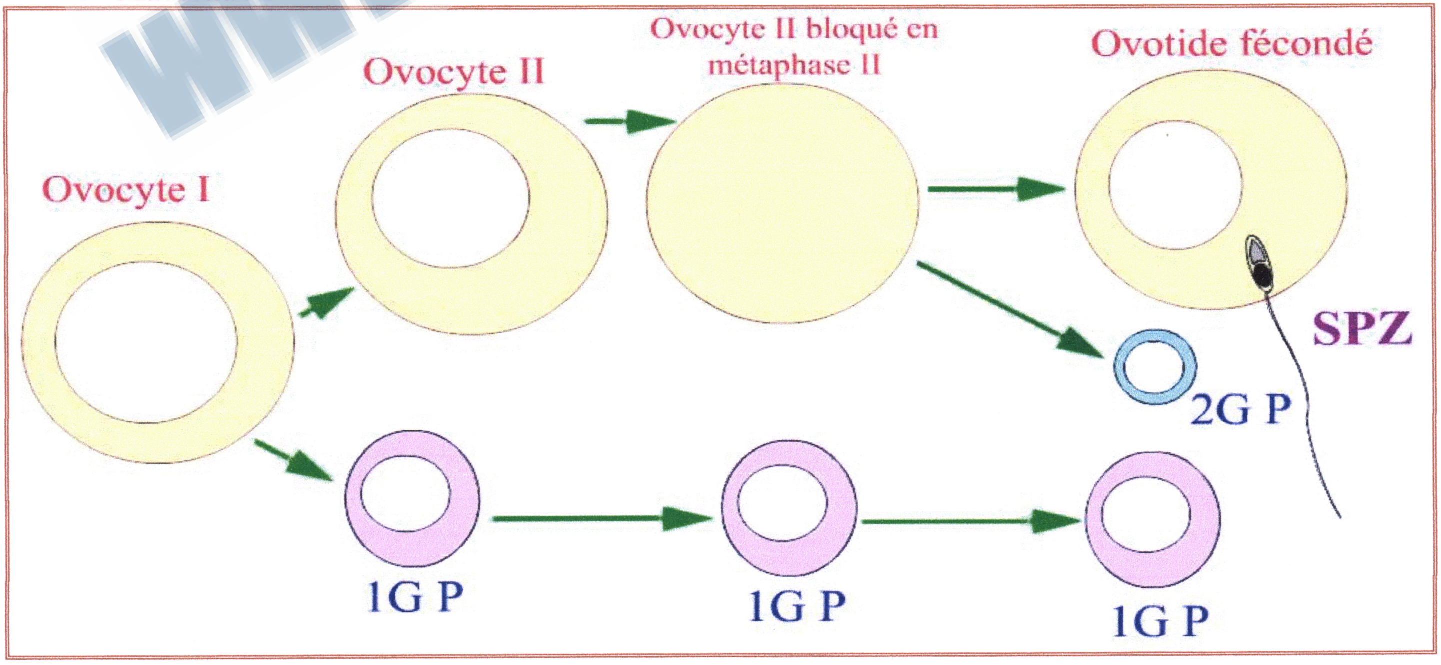
❖ **Comparaison avec la spermatogenèse**

	Ovogenèse	**Spermatogenèse**
Temps	• Avant la naissance • De la puberté à la ménopause • Après fécondation ⇨ phénomène dis contenu	• De la puberté à la mort ⇨ phénomène contenu
Lieu	Ovaire fœtal, ovaire adulte, trompe	Tube séminifère
Multiplication	Définitivement terminé avant la naissance	Très active à partir de la puberté
Accroissement	Accroissement très marqué (important)	Accroissement peu marqué (faible)
Maturation	Méiose dis contenue avec blocage 1^{er} blocage en prophase I $2^{ème}$ blocage en métaphase II La méiose ne donne qu'une cellule fonctionnelle (ovotide)	Méiose contenue sans blocage La méiose donne 4 cellules fonctionnelles (spermatides)
Différenciation	Pas de différenciation	Différenciation

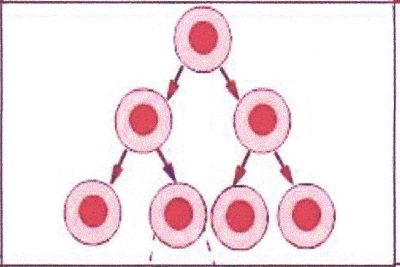
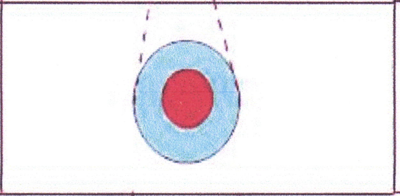
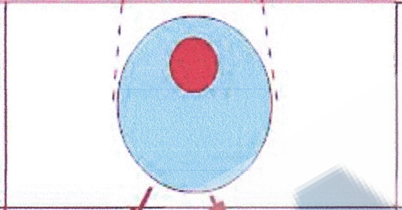
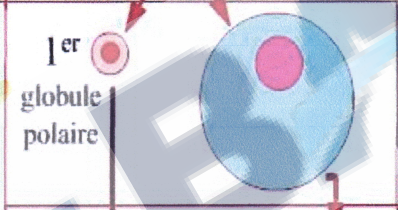
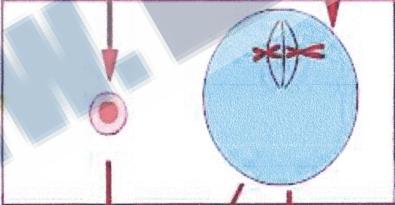
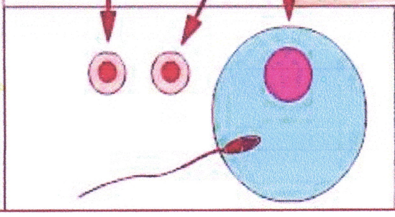
❖ **Relation entre structures et fonctions (rôles physiologiques)**

Structures	**Fonctions**
Cytoplasme abondant	Abondances substances de réserve (vitellus)
Vitellus abondant	Nutrition de l'embryon
Un noyau haploïde	Transfère la moitié de l'information génétique à l'origine de l'œuf
Granules corticaux	Assure la pénétration d'un seul spermatozoïde : monospermie (blocage de polyspermie)

❖ **Maturation**



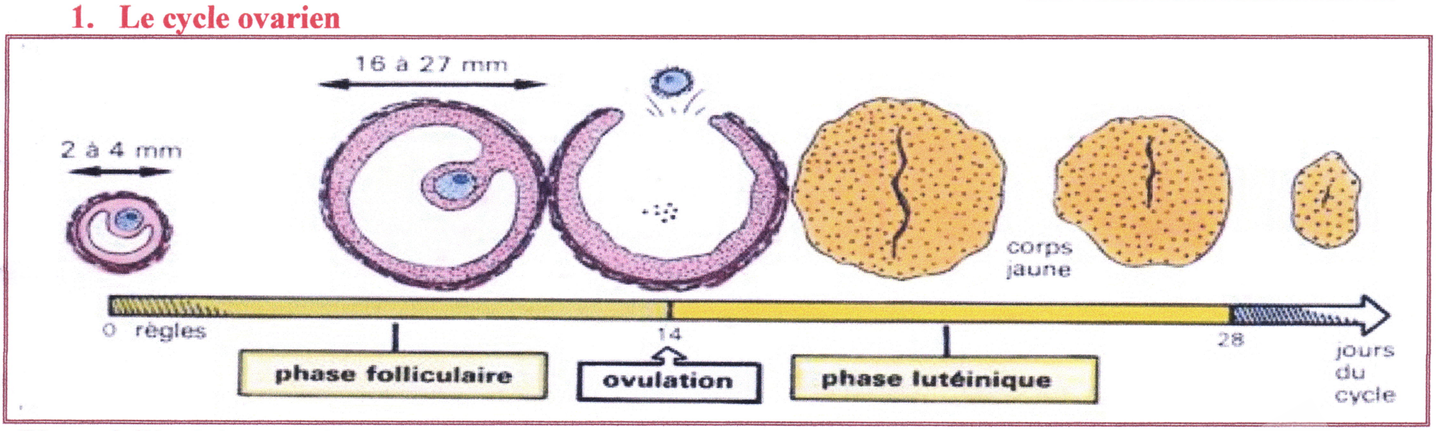
❖ **Déroulement de l'ovogenèse**

Vie foetale				
Etapes	Schémas	Cellules	Moment	Lieu
Multiplication		Ovogonie	Entre la 9ème et la 21ème semaine de grossesse	Ovaire foetal
Début d'accroissement et maturation		Ovocyte I bloqué en PI	Entre la 21ème semaine et la naissance	
Repos: entre la naissance et la puberté				
Vie adulte: entre puberté et ménopause de façon cyclique				
Reprise d'accroissement		Ovocyte I	3 à 4 mois avant chaque cycle	Ovaire adulte
Maturation (Reprise de la méiose) DR	 1er globule polaire	Ovocyte II	24 heures avant l'ovulation	
DE		Ovocyte II bloqué en MII	6 heures avant l'ovulation	
	En cas de fécondation			
DE		Ovotide ou ovule fécondé	24 heures aprés l'ovulation	Dans de la trompe

S V T -------- $4^{ème}$ année de l'enseignement secondaire ------------- Section Sciences Expérimentales

Prof. Mr Châabouni Sami	Résumé III Le cycle sexuel de la femme et sa régulation	Année Scolaire : 2016/2017 Classe : $4^{ème}$ expérimentale

1. Le cycle ovarien



Phase folliculaire ou phase pré ovulation

Une dizaine de jeunes follicules tertiaires, ayant commencé leur évolution, 3 à 4 mois avant le cycle, poursuivent leur croissance mais un seul devient un follicule mûr à la fin de cette phase. Les autres se dégénèrent : **c'est l'atrésie folliculaire**

Phase ovulatoire

Le follicule mûr éclate et expulse l'ovocyte II bloqué en métaphase II dans le pavillon.

Phase lutéale ou lutéinique ou post ovulatoire

Un corps jaune se forme à partir du follicule rompu, atteint le maximum de développement au milieu de cette phase (j_{21}).

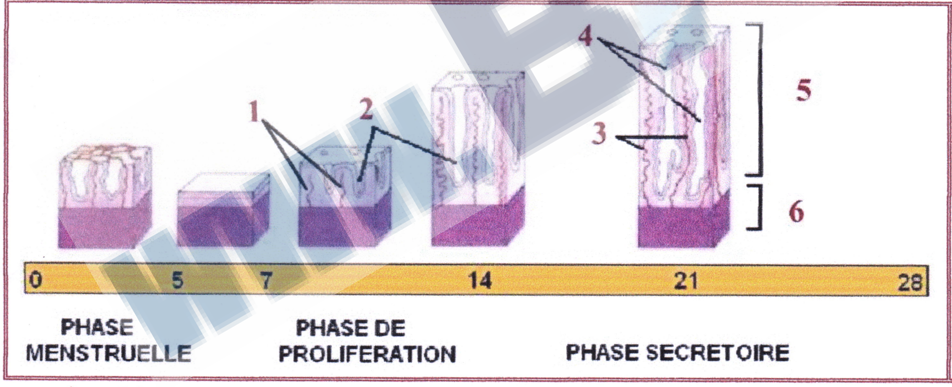
Si il n'y a pas fécondation le corps jaune régresse à la fin du cycle ; **c'est un corps jaune cyclique**

Si il y a fécondation le corps jaune persiste et se développe davantage pendant les 1^{er} mois de la grossesse ; **c'est un corps jaune gestatif**

Remarque : la phase lutéale est toujours constante est égale 14 jours

2. Le cycle utérin

a) cycle d'endomètre



1/ vaisseaux sanguins
2/ glandes en tube droit
3/ vaisseaux sanguins spiralés
4/ glandes en tube ramifiés
5/ endomètre ou muqueuse utérine (aspect dentelle on parle de dentelle utérine)
6/ myomètre ou muscle utérin

- **Phase menstruelle [j1→ j_5]**

Elle correspond à la **destruction partielle** de la partie supérieure de l'endomètre ($^4/_5$) et se manifeste par un écoulement sanguin.

- **La phase post menstruelle ou phase de prolifération] j5→ j_{14}]**

Elle est caractérisée par

- Accroissement de l'endomètre.
- Prolifération des vaisseaux sanguins
- Développement des glandes en tubes.

- **Phase pré menstruelle ou phase sécrétoire] j_{14} → j_{28} [**

Elle est caractérisé par :

- Accroissement maximum de l'endomètre (de 3 à 7mm).
- Spiralisation des vaisseaux sanguins
- Ramification des glandes en tubes qui deviennent plus sinueuses et secrétant de mucus riche en glycogène

Au 21ème jour du cycle, la muqueuse prend un aspect favorable à la nidation : c'est la dentelle utérine.

A partir 21ème jour du cycle, (en absence de fécondation) la muqueuse subit un tassement progressif à cause d'un ralentissement de son irrigation.

	Cycle non fécondant (pas de nidation)	**Cycle fécondant (il y a nidation)**
Evolution du corps jaune à la fin du cycle	Régression du corps jaune	Persistance du corps jaune
Evolution de l'endomètre à la fin du cycle	Régression de l'endomètre	Persistance de l'endomètre
Conséquence sur le cycle utérin	Nouveau cycle déclenché par la présence de la menstruation	Blocage du cycle remarqué par l'absence de la menstruation

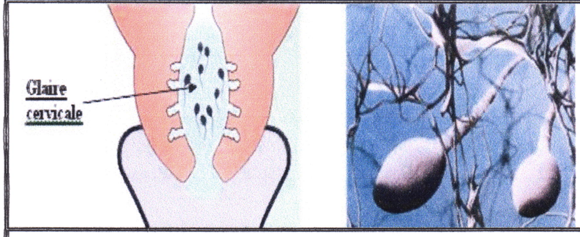
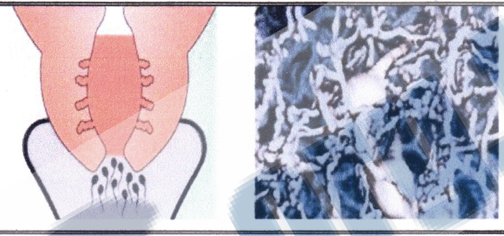
b) Cycle de myomètre

Le myomètre ne subit pas de modification structurale.

- Pendant [j1⟶ j_{14} [Le myomètre se contracte d'une façon rythmique
- Pendant [j14⟶ j_{28} [Le myomètre ne se contracte plus : on parle de silence utérin

c) Cycle de la glaire cervicale

La glaire cervicale est un mucus secrété par l'épithélium du col de l'utérus elle est formée de filaments disposés en réseau. Son abondance et ses propriétés sont variables suivant le moment du cycle sexuel

	
Pendant la phase ovulatoire La glaire cervicale est **claire**, **filante**, de maillage **lâche** et de PH **alcalin** ; elle est perméable aux SPZ	**Pendant la phase folliculaire et lutéale** La glaire cervicale est **dense**, **épais**, de maillage **serré** et de PH neutre ou acide faible ; elle est imperméable aux SPZ

3. Cycle thermique

Durant **la phase folliculaire** la température corporelle est inférieure à 37°C (entre 36.5 et 37)

Durant **la phase lutéinique** la température est supérieure à 37°C (entre 37 et 37.5)

- Le jour de l'évolution correspond à une augmentation de la température en passant de 36,5 à 37,5.

4. Déterminisme hormonal de la menstruation ou le rôle des hormones ovariennes dans la menstruation

À la fin du cycle, et en absence de fécondation, la régression du corps jaune entraîne la chute des taux des hormones ovariennes, ce qui déclenche la menstruation.

5. Déterminisme hormonal de l'ovulation ou le mécanisme de l'ovulation

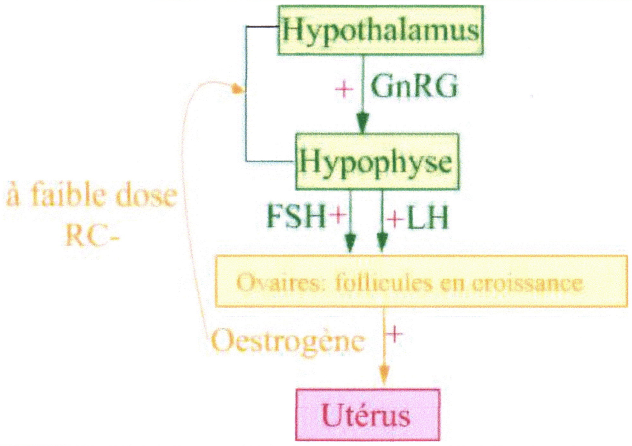
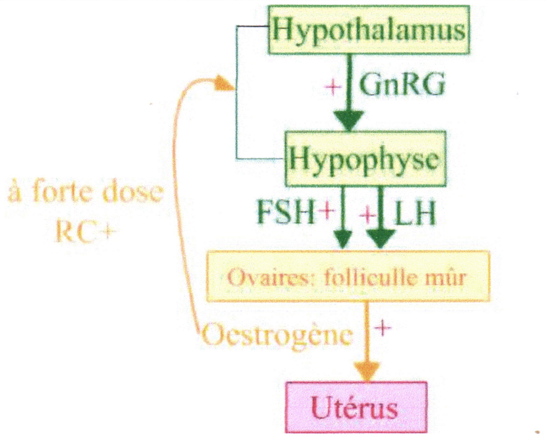
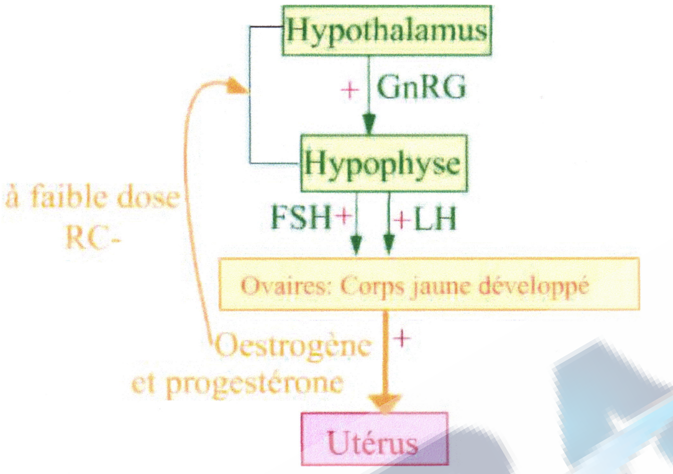
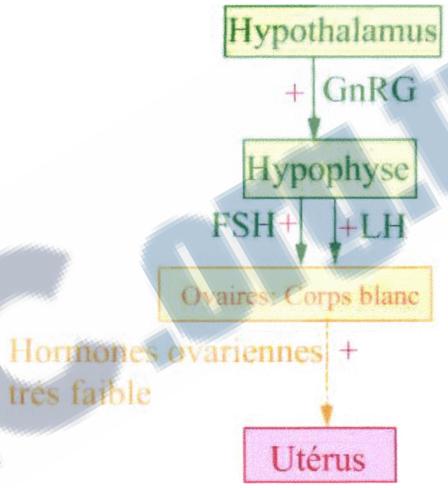
En 12ème jour du cycle (cycle de 28jours) ; le follicule mûr secrète une forte des oestrogènes, ces derniers exercent un RC (+) sur le complexe H-H en stimulant la sécrétion de FSH et surtout de LH (pic de FSH et un pic très important de LH). Ces pics déclenchent l'ovulation

Le jour pré de l'ovulation peut être déterminer sur l'écographie le diamètre de follicule passe de 1.6 à 2.7cm

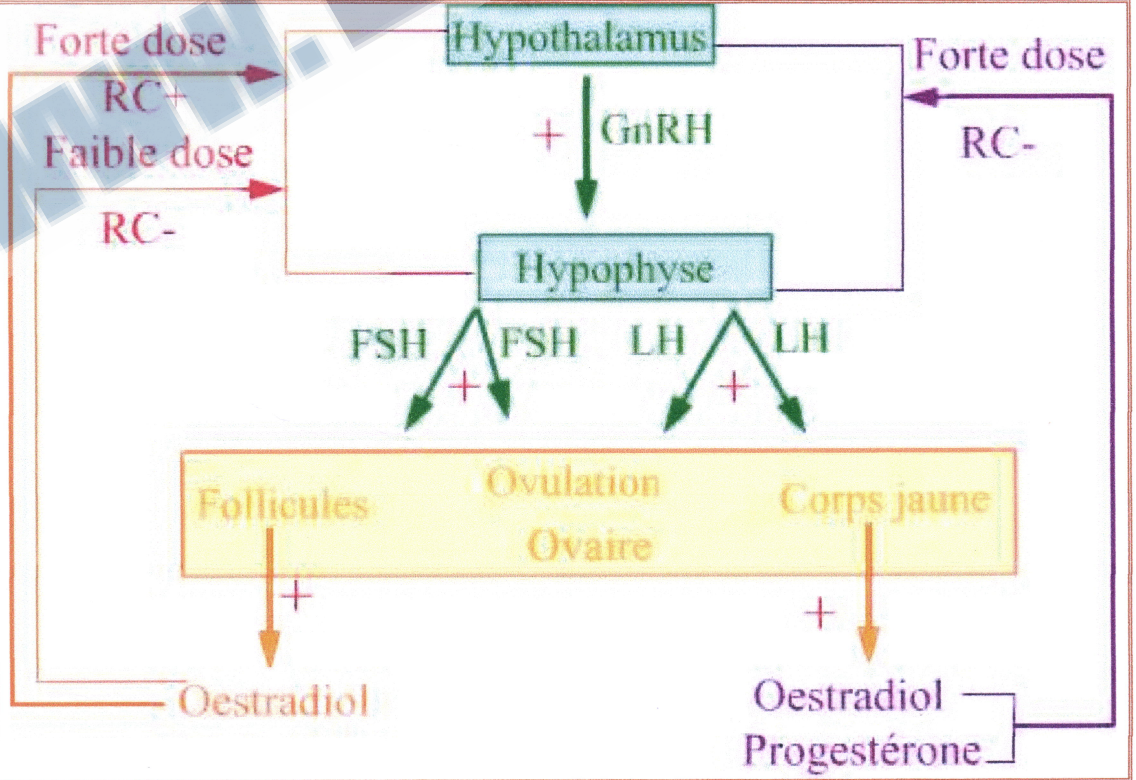
❖ **Rétrocontrôle ovarien**

Dates	**4ème j ➔ 10ème j**	**11ème j ➔ 14ème j**	**15ème j ➔ 26ème j**	**26ème j ➔ 4ème j**
Rétrocontrôle	**RC (-)**	**RC (+)**	**RC (-)**	**Levée de l'inhibition**
Justifications	Le taux des Oestrogènes est faible	Le taux des Oestrogènes est fort	Les taux des Oestrogènes et surtout de la progestérone sont forts	Très faible dose des hormones ovariennes
Conséquences sur le complexe H-H	Freine la sécrétion de GnRH, LH et FSH	Stimule la sécrétion de GnRH, LH et FSH (pics)	Freine la sécrétion de GnRH, LH et FSH	Levée de l'inhibition sur la la sécrétion de GnRH, LH et FSH
Conséquences sur le cycle ovarien	Atrésie folliculaire	Ovulation	Régression du corps jaune à la fin du cycle	Stimule le folliculogenèse

S V T -------- 4ème année de l'enseignement secondaire ------------- Section Sciences Expérimentales

4ème j ➔ 10ème j	11ème j ➔ 14ème j
	
Conséquence : atrésie folliculaire	Conséquence : ovulation
15ème j ➔ 26ème j	26ème j ➔ 4ème j
	
Régression du corps jaune à la fin du cycle	Levée de l'inhibition

Bilan général



Substances chimiques	Organe sécréteur	Organes ou cellules cibles	Action
GnRH (neurohormone)	Hypothalamus	Hypophyse	Stimule la sécrétion de gonadostimulines FSH et LH
LH (hormone) Pic très important juste avant l'ovulation (entre 13 et 14)	**Hypophyse**	1/ Ovocyte	**1/** Stimule la reprise de la méiose de l'ovocyte I en ovocyte II.
		2/ follicule mûr	**2/** En synergie avec la FSH déclenche l'ovulation (pic de LH)
		3/ follicule rompu	**3/** Permet la transformation du follicule rompu en corps jaune.
		4/ corps jaune	**4/** Stimule le développement **4'/** Stimule la sécrétion des œstrogènes et surtout la progestérone
FSH (hormone) Pic moins important juste avant l'ovulation	**Hypophyse**	1/ follicules en croissances	**1/** Assure le développement des follicules ovariens : **hormone de folliculogenèse.** **1'/** Stimule la sécrétion des œstrogènes
		2/ follicule mûr	**2/** En synergie avec la LH déclenche l'ovulation (pic de FSH)
Oestrogènes (hormone) Pic très important en $12^{ème}$ j et un pic moins important en $21^{ème}$ j (secrétés durant tout le cycle)	**1/ follicules et le thèque interne** (1^{er} j à $14^{ème}$j) **2/ corps jaune (cellule thécales)** ($14^{ème}$j à $28^{ème}$j) **3/ placenta** (Pendant la gestation)	1/ endomètre	1/ Stimulent l'accroissement de l'endomètre 1'/ Stimulent la formation des glandes en tube 1''/ Sensibilisent les cellules de l'endomètre à l'action de la progestérone.
		2/ myomètre	**2/** Stimulent les contractions
		3/ col de l'utérus	3/ Stimulent la sécrétion d'une glaire perméable aux spermatozoïdes
		4/ Cellules cibles de caractères sexuels	**4/** Assurent le développement et le maintien des caractères sexuels secondaires.
		5/ Complexe H-H	**5/** À faible dose RC(-) **5'/** À forte dose RC(+)
Progestérone (hormone) Nul pendant la phase folliculaire et un pic très important au milieu de la $2^{ème}$ phase	**1/ corps jaune (cellules lutéales)** ($14^{ème}$j à $28^{ème}$j) **2/ placenta** (Pendant la gestation)	1/ Endomètre ou muqueuse utérine	**1/** Assurent la formation de la dentelle utérine. **1'/** Stimule la sécrétion de mucus et de glycogène par les glandes en tube.
		2/ Myomètre ou muscle utérin	**2/** Inhibe les contractions ⇨Silence utérin
		3/ Col de l'utérus	**3/** Stimule la sécrétion d'une glaire imperméable aux spermatozoïdes
		4/ Complexe H- H	**4/** RC (-)

La progestérone est une hormone gestative, elle assure le bon déroulement de la grossesse ; c'est l'hormone de la mère

Les œstrogènes sont des hormones sexuelles féminisantes, elles sont responsables de l'apparition, développement et maintien des CSS ; ce sont des hormones de la femme

⇨ La neuro hormone GnRH, la FSH et la LH sont sécrétées d'une façon pulsatiles

⇨Il existe une relation de causalité

Exemple : la GnRH stimule la sécrétion de LH qui stimule la sécrétion des oestrogènes et la progestérone par le corps jaune

La Procréation

Fb : Saber Gù

Taw mech na9raw 7aja mochtarka bin l'homme w el femme w hiya ''la procréation'' w eli hiya par déf '' ensemble des méthodes permettant d'engendrer un nouvel être par la reproduction sexué : l'union d'un gamète femelle avec un gamète mâle''.

Nebdew bel fécondation ma tsiir w ma tet7a9e9 ken ma yetwaffrou 3andna les conditions hedhom :

a/ un sperme normal et fécondant :

- volume de sperme entre 3 et 4 ml / éjaculation
- pH alcalin =7.3
- viscosité facilitant la mobilité des spzs
- numération >60 millions / ml
- taux > 40% de spzs de forme typique normale ya3ni

b/ des spzs capacités

c/ rapport sexuel pendant la période de la fécondité ya3ni ma bin 9ème au 16ème jour de cycle sexuel

w na3rfouha b'hal 7ajet :

* la date d'ovulation 14 jours avant la menstruation

* wa9t el 7ayet mta3 les gamètes : 2 j pour l'ovII w 5 j pour le spz

* la perméabilité de la glaire cervicale à maille lâche

d/ des voies génitales féminines labes 3lihom w ykounou perméables

e/ des sécrétions vaginales mahomch acide bech la yo9tlouch les spzs

Ba3d ma kamelna les conditions net3adew lel les étapes de la fécondation :

Hal fécondation tsir fel 1/3 supérieur de la trompe w ysirou fiha hal les étapes :

1ère étape : Rencontre ovule-spz : l'ov tahbet par des contractions de la trompe ba3d 24 à 30h mel ovulation

Les spz t3adew stage el glaire cervicale :p w y3oumou fel les sécrétions de l'utérus w les trompes

W taw les spzs 7oslou fel les cellules de la corona radiata w phénomène nsamiwah 'piégeage'

2ème étape : Reconnaissance et pénétration d'un spz :

W fiha 3 petites étapes : reconnaissance mech tsir bel fixation de l'antigène eli 3and el spz sur les récepteurs eli mawjoudin 3al zone pellucide w awel spz yo7sel howa eli 3andou chance bech tsirlou fécondation c tt

réaction acrosomique hna l'acrosome eli 7kina 3lih fih des enzymes mech ysayebhom bech y3awen 3la zone el pellucide tet7all w twalli 9abla bech tsir la pénétration d'un spz w hna yod5el ken el noyau w el be9i kollou yo93ed el barra :p

3ème étape : Activation de l'ovocyte II Réveil physiologique : aussi mech ysirou 3 7ajet : la formation des 2 pronuclèi , caryogamie , formation de la cellule œuf .

Net3adew taw lel les étapes embryonnaires et la nidation : 1/ ovulation 2/ fécondation mel 1er jour → 3ème jour : fel 1er j : stade 2 cellules, 2ème j : stade 4 cellules w 3ème j : stade 32 cellules

3/ segmentation : stade morula 4ème j

5ème et 6ème j : blastocyste

4/ nidation : 7ème j : trophoblaste w bouton embryonnaire w ba3d futur placenta

Njiw l'rôle trèèèès important du placenta : 11ème semaine de grossesse : tkawnet l'placenta w eli hiya des liens ma bin l'corps maternel w l'embryon tsir binet'hom des échanges d'eau , oxygène… w protection

Béh el placenta 3and'ha 3 rôles : 1/ Rôle trophique : bien sur fama 7ajet lezemha tet3ta lel embryon kifma (eau ,nutriments, oxygène…) w fama 7ajet lezem tetna7a menou (urèe,CO2…) qui circulent dans le sens inverse

2/ Rôle protecteur : le placenta assure une immunité au cours des premiers mois de la grossesse et s'oppose au passage de certaines substances toxiques de microbes (sauf les virus)

3/ Rôle endocrinien : les cellules de trophoblaste sécrètent la HCG l'action mta3 l'hormone hedhi kifma LH w tet3ada fel damm mta3 mra w temna3 la régression du corps jaune qui continuent à produire des doses d'œstrogènes et progestèrone bech t5alli la grossesse tsir fi a7san 7alet'haa.

Béhy 3la fekra ennajmou net7akmou fel procréation kifech ??

3andna méthode nsamiwha contraception hormonale : la pilule combinée :

Chniya la contraception : hiya par déf '' l'infécondité volontaire et temporaire provoquée par l'utilisation de méthodes contraceptives visant à espacer ou à éviter les naissances''

Chnouma les pilules : houma des comprimés composés d'œstrogènes et progestatif de synthèse. Ces comprimés houma des plaquettes de 21 ou 22 pilules w te5edh'hom el mra fi awel nhar lel cycle mti3ha kol youm te5ou un comprimé w ba3d kif te9ef 3la chorb hal dwa b'6 wala 7 j mech tsirelha hémorragie de privation hormonale techbah lel menstruation.

Le composé œstro-progestatif freine la sécrétion hypophysaire des gonadostimulines par rétrocontrôle négatif w hnaa la croissance folliculaire est bloqué d'où blocage de l'ovulation.

Aywah hedha el composé agit sur l'endomètre w hnaa ywalli mouch 7adher lel nidation.

Famma 3bed ma yjibouch s8ar ma3rouf ama fama el FIVETTE presque 7allet mchekel barcha 3bed : w eli hiya par déf “ est l’ensemble des techniques qui permettent de réaliser <<in vitro>> qui se déroule normalement dans le trompe’’

Béhy nchoufou e5er 7ajaw eli hiya les étapes mta3 hal FIVETTE :

1/ Induction de l’ovulation : injection pour une patiente des substances analogues à la FSH bech net7asslou 3la nombre kbir de follicules murs w ba3d na3tiwha LH pour obtenir des ovII .

2/ Prélèvement des ovII

3/ Recueil et traitement du sperme

4/ Mise en contact des gamètes

5/ Mise en culture des œufs

6/ Sélection des embryons ayant atteints les stades 2 et 4 cellules

7/ Transfert de (ou des) l’embryon(s)

**** Remerciement Pour Notre Cher Amie ****

Oumaima Rekik **w Nchalah Rabi inaj7ek <3**

Génétiques des diploïdes

Génétiques des diploïdes

FB : Saber Gù

Bon el génétique des diploïdes : parmi les chapitres elli obligé 3la ay telmidh bac sciences bech yrivzou 5ater kol 3am tji wa7da mel les 2 génétiques qq soit hedhi diploïdes wala humaine w kol 3am w 9asmou :p .

Beh taw mech na7kiw 3al génétique des diploïdes w nchoufou les bases mti3ha : houma 7ajtin lezemna na3rfouhem : eli fama fel dihybridisme : 2 gènes indépendants ya3ni porté par deux paires de chromosomes (2n=4) w deux gènes liés.

Njiw lel cas mta3 2 gènes indépendants : une fois l9ina fel 2ème croisement (F2) les cas hedhom ya3ni automatiquement indépendants chnouma les cas :

****D-D :** hiya dominance absolue pour les deux caractères mech net7asslou 3la résultat : 9/16 ; 3/16 ; 3/16 ; 1/16

****D-C :** hiya dominance pour un caractère et codominance pour l'autre w nel9aw résultat : 1/16 ; 1/16 ; 2/16 ; 3/16 ; 3/16 ; 6/16

****C-C:** hiya codominance lel les deux caractères nel9aw résultat : 1/16 ; 1/16 ; 1/16 ; 1/16 ; 2/16 ; 2/16 ; 2/16 ; 2/16 ; 4/16

Rq s8ira : kif nel9aw caractère jdid dh'hor fel les résultats w ma 3tahoulnech fel les données automatiquement mech na7kiw 3al codominance [**exple :** croisement d'un fleur rouge avec un fleur blanc w 3tatna rose])

Njiw l'7ala o5ra fel génétique w tjina zeda mel (F2) w elli hiya le test cross w esmou zeda back-cross bech ken jetkom el kelma ma testa8rbouch menha : w fel cas mta3 gènes indépendants nel9aw 4 cas lel test cross w kol cas ta3tina résultat selon le croisement eli 3melneh :

+1er cas : ne5dhou un double hétérozygote A//a B//b w na3mloulou croisement m3a un double récessif a//a b//b w ta3tina résultat : ¼ ; ¼ ; ¼ ; ¼ .

+2ème cas : ne5dhou un simple hétérozygote A//a b//b w na3mloulou croisement m3a un double récessif a//a b//b w ta3tina résultat : ½ ; ½ .

+3ème cas : ne5dhou un simple hétérozygote pour un caractère A//a b//b w na3mloulou croisement m3a un simple hétérozygote pour un caractère a//a B//b w ta3tina résultat : ¼ ; ¼ ; ¼ ; ¼

+4ème cas : ne5dhou un double hétérozygote A//a B//b w na3mloulou croisement m3a un simple hétérozygote A//a b//b ta3tina résultat : 3/8 ; 3/8 ; 1/8 ; 1/8.

Kamelna mel cas mta3 deux gènes indépendants : njiw lel partie el théniya w eli hiya 2 gènes liés : aussi el cas hedhi nel9aw fiha deux cas :

- **1er cas :** linkage absolue : (pas de crossing-over) absence de recombinés chez seulement le male de drosophile ya3ni une fois 9allekchez un male de drosophile ya3ni lezmek t'thabbet elli enti fel cas mta3 gènes liés w linkage absolue ou nn .

Beh ba3d ma na3mlou un croisement mta3 double hétérozygote AB//ab * double hétérozygote AB//ab nel9aw résultat de ¾ ; ¼ .

W aussi hedha fih test cross : na3mlou croisement d'un double hétérozygote AB//ab * un double récessif ab//ab tjina résultat de ½ ; ½.

- **2ème cas : linkage partiel : (hna fama crossing-over) : kif kif fel F2 mech na3mlou croisement l'un double hétérozygote A B//ab * un double hétérozygote A B//ab hna mech nel9aw résultat 3-P/4 ; 3-P/4 ; P/4 P/4.**

W fel cas mta3 test cross kif kif na3mlou croisement hedha : un double hétérozygote AB //ab * double récessif ab//ab w hna nel9aw résultat 1-P/2 ; 1-P/2 hedhom nsamiwhom parentaux majoritaires w P/2 ; P/2 hedhom nsamwihom recombinés minoritaires

Rq : sa3at nel9aw résultat : ¼ ; ¼ ; ¼ ; ¼ fil cas mta3 2 gènes liés w hedhi résultat nel9awha men joret un croisement de 2 gènes liés Ab//ab * aB//ab

⇨ **Globalement hedha chlezem ta3ref fel génétique des diploïdes .** ***By : Oumaima Rekik***

Génétique Humaine

Génétique Humaine

SABER Gù

Bon bel tari9a hedhi wselt fahamt drous s3ab 7ata mel génétique des diploïdes w taw mech net3adew lel génétique humaine.

Chniya génétique humaine ??

hiya bech nchoufou kif ensen yel9a mardh w y9ollou el tbib hedha wirathi ychouf bouh wala jadou.

Behy 9bal ma nebdew na7kiw 3al génétique humaine nchoufou les problèmes rencontrés en génétique humaine : sont :

- **Faible fécondité, faible nombre de descendants par couple**
- **La durée longue d'une génération**
- **Impossibilité de diriger les croisements**
- **Complexité du caryotype humaine**

Beh na3rfou kol mochkla w lilha 7all w el 7al mta3 hal mchekel : l'établissement d'un arbre généalogique ou pédigrée

Net3adew taw kifech mech na9raw pédigrée :

- **A7na lezemna ntall3ou fi hal génétique : la relation de dominance w la localisation du chromosome .**

Nebdew taw bel dominance et récessivité :

1) Kif yebda 3andna maladie récessive : (N>m) : ya3ni deux parents labes 3lihom w 3tawna s8ar mordha : n9oulou les parents sont phénotypiquement sains or ils ont eu un descendant malade d'où au moins l'un des deux parents porte l'allèle de la maladie à l'état récessive.

2) Kif yebda 3andna maladie dominante : (M>n) : : ya3ni deux parents mordha w 3tawna s8ar labes 3lihom : n9oulou les parents sont phénotypiquement malades or ils ont eu un descendant malade d'où au moins l'un des deux parents porte l'allèle de la normal à l'état récessive.

Grand Merci Pour : OUMAIMA REKIK

Taw bech nchoufou la liaison :

Idhaa ken 3rafna el relation de dominance w l9ina (N>m) ou (M>n) nektafiw bech n7allelou 3 hypothèses :

- **Hyp 1 :** allèle de la maladie lié à y
- **Hyp2 :** allèle de la maladie lié à x
- **Hyp3 :** allèle de la maladie lié à un autosome

W ken ma na3rfouch la relation lezemna ne5dmou 3la 5 hypothèses :

- **Hyp1 :** allèle de la maladie lié à y
- **Hyp2 :** allèle de la maladie dominant lié à X^N>
- **Hyp3 :** allèle de la maladie récessif lié à X^N>
- **Hyp4 :** allèle de la maladie dominant autosomal N>
- **Hyp5 :** allèle de la maladie récessif autosomal N>

Net3adew l'kifech mech na3mlou rejet lel hypothèse bel wa7da bel wa7da : il suffit d'un contre exemple pour rejecter l'hypothèse

Nebdew bel **Hyp1 :** allèle de la maladie lié à y : fama deux cas : un fois l9ina tofla mridha fel pédigrée donc hypothèse à rejeter
(dans ce cas la maladie ne touche que les garçons or la fille est malade)

W idha l9ina tfol mridh fel pédigrée w bouh labes 3lih n9oulou hypothèse à rejeter

(le père est normal or son fils est malade d'où l'allèle de la maladie n'est pas lié à y)

Pratiquement la liaison à y dimaa hyp à rejeter

Net3adew lel rejet de la liaison à X :

Ken fel état récessive : (N>m) : avec N : normal , m : malade

Rq : hna mech na3mlou raisonnemet w na3tiw le génotype :

1* Dans ce cas la mère aura pour génotype $X^m//X^m$ elle donne X^m à tous ses fils qui seront $X^m//y$ donc malades or son fils est normal donc => hyp à rejeter

2* Dans ce cas le père aura pour génotype $X^N//y$ elle donne X^N à tous ses filles qui seront toutes normales or sa fille est malade donc => hyp à rejeter

Grand Merci Pour : OUMAIMA REKIK

W ken fel état dominant : (M>n) : avec M : malade , n : normal

1* Dans ce cas la mère aura pour génotype $X^n//X^n$ elle donne X^n à tous ses fils qui seront $X^n//y$ donc malades or son fils est normal donc => hyp à rejeter

2* Dans ce cas le père aura pour génotype $X^M//y$ elle donne X^M à tous ses filles qui seront toutes normales or sa fille est malade donc => hyp à rejeter

Rq w barcha ma ya3rfouhech hal remarque : **ma 3andna 7atta pédigrée ya3mel rejet lel cas du maladie lié à un autosome ya3ni dima à retenir w une fois 3taak un information kifma l'électrophorèse heka el wa9t ta3mel raisonnement mti3ek w testa7fedh bel hypothèse eli 7ajtek biha**

9bal ma nensa fama technique ysamiwha le diagnostic prénétal ta7fdhouhaa mel cours kemla w fama les cas aussi de la trisomie 21 ta7fdhouha mel cours aussi w lezem ta3rfou tersmou la méiose anormal et normal en 2 cas de la trisomie 21

Nchallah najjemt nfahamkom el génétique humaine et bien sur pratiquéz-vous par les exercices 5ater dima fihom des trucs enti tet3allem menhom <3 =D

106

LYCÉE PILOTE DE SFAX
Mme GUERMAZI – Mr FEKI

DEVOIR DE SYNTHESE N° 1
S. V. T.

Décembre 2012
Durée : 3 heures

Le devoir comporte 5 pages

PREMIERE PARTIE : RESTITUTION DES CONNAISSANCES (8points)

Vous répondez aux questions A et B et C sur la page 5 ci-jointe

A// QCM : (3 points)

Pour chacun des items suivants, il y a une ou deux affirmation (s) exacte (s). Relevez sur votre copie le numéro de la question et la (ou les) lettre(s) qui correspond (ent) à la (ou les) affirmation (s) exacte (s).

Toute erreur annule la note attribuée à l'item correspondant

1) **<u>Le document ci-contre est un extrait de calendrier sur lequel une femme a repéré les jours de ses règles. Chez cette femme à cycle régulier (durée constante):</u>**

- **a.** une ovulation s'est produite le 17 septembre.
- **b.** une ovulation s'est produite entre le 18 et le19 septembre.
- **c.** la prochaine menstruation surviendra le 1^{er} Novembre.
- **d.** la prochaine menstruation surviendra le 3 Novembre.

	Septembre					octobre					
L		▨	11	18	25		2	9	16	23	30
M		▨	12	19	26		3	10	17	24	31
Mc		▨	13	20	27		▨	11	18	25	
J		▨	14	21	28		▨	12	19	26	
V	1	8	15	22	29		▨	13	20	27	
S	2	9	16	23	30		▨	14	21	28	
D	3	10	17	24		1	8	15	22	29	

2) **<u>La tératospermie correspond à :</u>**

- **a.** une absence de spermatozoïdes dans le sperme.
- **b.** une numération très inférieure à 60.10^6 spermatozoïdes par millilitre de sperme.
- **c.** un pourcentage de spermatozoïdes anormaux supérieur à 40%.
- **d.** un pourcentage trop faible de spermatozoïdes mobiles.

3) **<u>Lors de la fécondation, la réaction acrosomique et la réaction corticale ont en commun :</u>**

- **a.** l'intervention d'hormones.
- **b.** l'intervention d'enzymes.
- **c.** l'action sur la zone pellucide.
- **d.** l'action sur les granules corticaux.

4) **<u>Le trophoblaste :</u>**

- **a.** est un constituant de la morula.
- **b.** comporte des cellules maternelles.
- **c.** secrète des enzymes et des hormones.
- **d.** secrète uniquement des hormones.

5) **<u>Le SAF:</u>**

- **a.** est une affection congénitale.
- **b.** est favorisé par le tabagisme.
- **c.** est favorisé par l'alcoolisme.
- **d.** peut être prévenu par la vaccination.

6) **<u>La fréquence de recombinaison :</u>**

- **a.** est de plus en plus faible que la distance entre les gènes liés est grande.
- **b.** est égale à ½ pour les gènes indépendants.
- **c.** est égale à zéro pour les gènes indépendants.
- **d.** est toujours constante pour 2 gènes donnés.

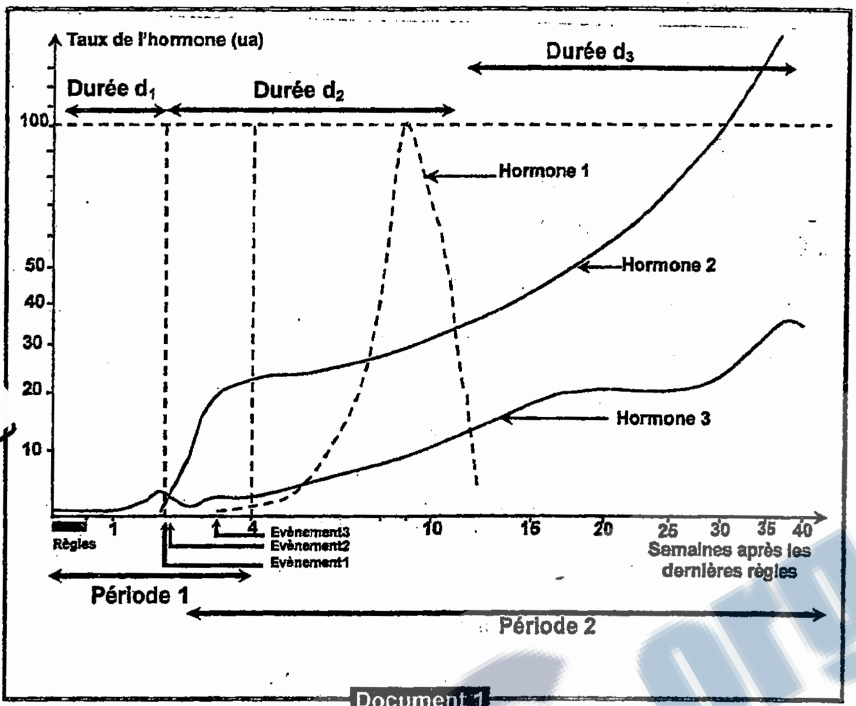
J1

⑪

B// Procréation : (3.5 points)

Le document 1 représente, chez une femme, l'évolution du taux de trois hormones intervenant dans la procréation, durant 40 semaines environ.

Les figures①, ② et ③ du document 2 représentent schématiquement, dans le désordre, les évènements successifs 1, 2 et 3 indiqués dans le document 1.



Document 1

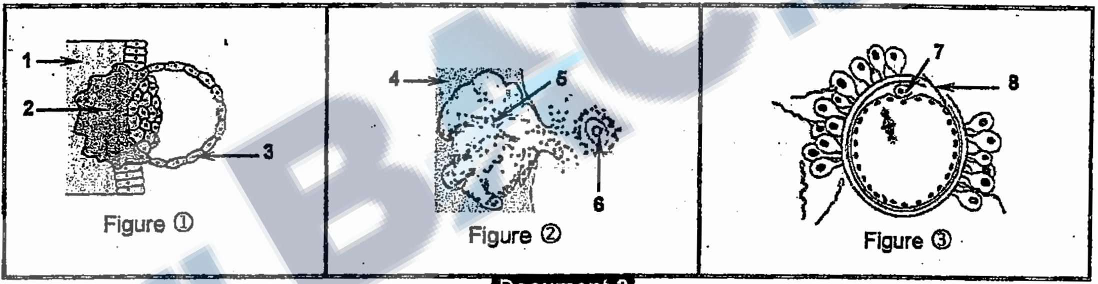


Figure ①

Figure ②

Figure ③

Document 2

Sur la page à rendre,

1) complétez le tableau 1 pour identifier les hormones, les événements et les périodes du document 1.
2) complétez le tableau 2 pour identifier les événements représentés par les figures ① ,② et③ du document 2 et les éléments fléchés de ce document.
3) complétez le tableau 3, se rapportant aux hormones du document 1.

C// Brassage de l'information génétique : (1.5 points)

Complétez le tableau 4 (page 5) relatif aux brassages génétiques lors de la méiose.

J2

12

DEUXIEME PARTIE : MOBILISATION DES CONNAISSANCES (12 points)

Exercice 1 : procréation (6 points)

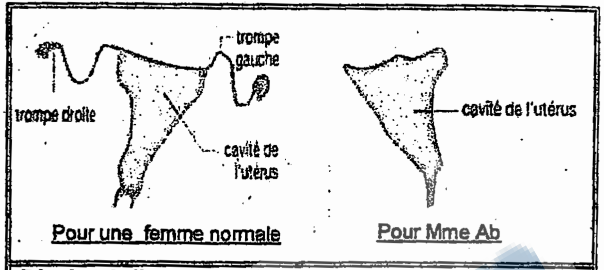
On se propose d'étudier quelques aspects de la Procréation Médicalement Assistée.

A// Mr. et Mme Ab., mariés depuis un an, n'arrivent pas à procréer. Ils ont alors consulté un gynécologue.

Celui-ci a prescrit un spermogramme à Mr Ab. et un examen radiologique à Mme Ab., après introduction d'un liquide opaque dans l'utérus permettant d'avoir une vue des voies génitales.

Le document 3 rassemble les résultats obtenus :

Résultats des analyses		
Pour Mr Ab	Dossier N.°:1	
Examen pratiqué le:11/11/2011 A la demande du Dr: …………………		
Volume	3,5 ml	MORPHOLOGIE Formes normales : 62% Formes anomales: 38%
pH	7,3	
Numération/ml	$83. 10^6$	
Extrait du spermogramme de Mr Ab		



Résultat de l'examen radiologique des voies génitales

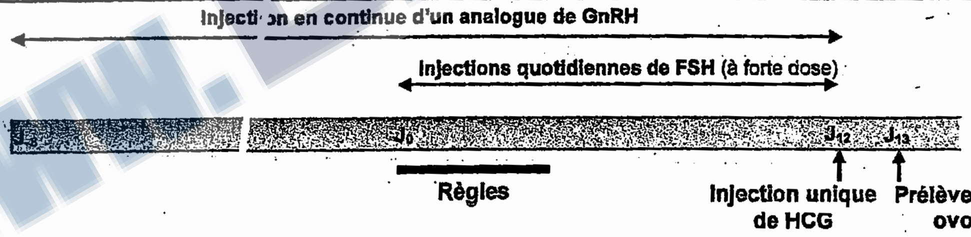
Document 3

1) En examinant le spermogramme de Mr Ab., le gynécologue le juge normal. Justifiez ce jugement en vous limitant à l'analyse de l'extrait du spermogramme présenté et en utilisant vos connaissances.
2) Quelle anomalie pouvez-vous dégager à partir de l'analyse des résultats de l'examen radiologique de Mme Ab. ?

B// Au vu des résultats, le médecin propose au couple Ab. la **"fécondation in vitro".**

Cette technique nécessite un traitement hormonal de Mme Ab. qui permet à l'équipe médicale de prendre en main le contrôle hormonal de son cycle sexuel.

Le traitement hormonal dure à peu près une vingtaine de jours, commençant huit jours avant la fin d'un cycle et se poursuivant jusqu'au prélèvement des ovocytes au milieu du cycle suivant ; il fait intervenir trois hormones dont la chronologie de l'utilisation figure dans **le document 4**:



Document 4

1) **L'injection d'un analogue de GnRH** (ayant une configuration très proche de celle de la GnRH) a pour objectif le blocage du cycle ovarien naturel et d'établir un cycle ovarien artificiel commandé par les autres hormones injectées.
Proposez une explication du mode d'action de l'analogue de GnRH.

⑬

2) Pendant la phase d'injection de FSH, l'équipe médicale réalise un comptage de follicules et une mesure de leur diamètre (par échographie) ainsi qu'un dosage du taux sanguin de l'œstradiol. Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau suivant: **(document 5)**

Jour de traitement	J_0	J_6	J_9	J_{11}
Diamètre moyen des follicules	11 follicules de 1 mm	11 follicules de 10 mm	11 follicules de 12 mm	11 follicules de 15 mm
Dosage sanguin de l'œstradiol (en pg.mL-1)	12	468	1441	1944

Document 5

NB: on considère qu'à 15 mm de diamètre, le follicule a atteint sa maturité.

- **a.** En vous limitant à l'analyse des résultats qui concernent le nombre et la taille des follicules, dégagez l'intérêt de cette phase du traitement hormonal.
- **b.** Expliquez pourquoi un tel résultat n'est-il pas obtenu dans un cycle ovarien naturel ?

3) **L'injection d'une dose unique de HCG simule** (remplace) un évènement hormonal qui se produit au milieu d'un cycle naturel.

- **a.** Précisez, à partir de vos connaissances, cet évènement hormonal et l'effet de la HCG injectée.
- **b.** Dites pourquoi cet évènement hormonal ne se produit pas chez cette femme traitée, malgré l'évolution du taux d'œstradiol consignée dans le tableau du document 5.

4) Après leur prélèvement, les ovocytes sont mis en contact avec des spermatozoïdes traités de Mr Ab., en vu de fécondations in vitro.

- **a.** A quoi consiste le traitement subi par les spermatozoïdes de Mr Ab. ?
- **b.** Faites un schéma qui illustre l'activation d'un ovocyte suite à la pénétration d'un spermatozoïde.

Exercice 2 : génétique des diploïdes (6 points)

A//

- On croise 2 races de criquet différant par 2 caractères.
  - Un caractère C_1 contrôlé par un gène G_1 ayant 2 formes alléliques (A_1, A_2).
  - Un caractère C_2 contrôlé par un gène G_2 ayant aussi 2 formes alléliques (B_1, B_2).

Ce premier croisement donne des descendants (F_1) tous de phénotype [A_1 B_1].

- Le croisement des individus F_1 avec des individus [A_2, B_2] donne :

294 criquets [A_1 B_2] ; 306 criquets [A_2 B_1] ; 195 criquets [A_1 B_1] ; 205 criquets [A_2 B_2].

1. a) Quelles déductions peut-on dégager à partir de l'analyse du résultat du 1^{er} croisement ?
   b) Quels peuvent être les phénotypes des parents dans ce croisement ?
2. a) Analysez les résultats du $2^{ème}$ croisement afin de :
   - déduire la relation entre les 2 gènes G_1 et G_2 (indépendance ou liaison).
   - établir la carte factorielle en cas de linkage.
   - faire une interprétation génétique de ce croisement.

   b) Schématisez un spermatocyte I en prophase I d'un criquet de la génération F_1. (Vous localiserez les allèles sur les chromosomes en vous limitant à la (ou les) paire(s) de chromosomes portant les 2 gènes étudiés.).

B// On dispose de 3 criquets : cr_1, cr_2 et cr_3 de même phénotype **[A_1B_1]** et de génotype inconnu. Le criquet cr_1 est un mâle, alors que les criquets cr_2 et cr_3 sont des femelles.

Pour préciser les génotypes de ces 3 criquets, on réalise les croisements suivants :

Croisements	**cr_1 x cr_3**	**cr_2 x cr_1**
Résultats **(Seul le pourcentage du phénotype [A_2 B_2] a été précisé)**	**6% de criquets [A_2 B_2]**	**9% de criquets [A_2 B_2]**

1. A partir d'une exploitation des résultats précédents et en justifiant votre réponse, déterminez les génotypes de ces 3 trois criquets.
2. Prévoyez le résultat du croisement de cr_2 avec un criquet mâle de même génotype que cr_3. **(Seul le pourcentage du phénotype [A_2 B_2] sera précisé).**

CORRIGÉ DU DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1 4Sc. Exp. Décembre 2012

PREMIÈRE PARTIE

BAREME

14

A// QCM

Numéro de l'item	1	2	3	4	5	6
Lettre(s)	bd	c	bc	c	ac	bd

3

B// Procréation

hormon1	hormone 2	hormone3	Evènement1	évènement2	évènement 3	période I	période II
HCG	progestérone	œstradiol	ovulation	fécondation	nidation	cycle fécond	grossesse

Tableau 1

1

2)

figure①	figure②	Figure ③
évènement : nidation 1 : endomètre 2 : trophoblaste 3 : blastocyste	évènement : ovulation 4 :ovaire 5 : follicule rompu 6 : gamète ♀	évènement : fécondation 7 : 1er globule polaire 8 : spermatozoïde fécondant

Tableau 2

1

3)

	hormone(s) sécrétée(s)	structure(s) sécrétrice(s)	cible(s)
Durée d₁	œstradiol	Follicule tertiaire et mur	- organes exprimant les caractères sexuels secondaires ♀ -utérus (endomètre myomètre et col) - complexe hypothalamo-hypophysaire
Durée d₂	Œstradiol Progestérone HCG	Corps jaune Corps jaune trophoblaste	-utérus (endomètre myomètre et col) - complexe hypothalamo-hypophysaire -corps jaune (ovaire)
Durée d₃	Œstradiol Progestérone	Placenta	- utérus (endomètre myomètre et col utérin) - complexe hypothalamo-hypophysaire

Tableau 3

1.5

C//Brassage de l'information génétique

	Le brassage Interchromosomique	Le brassage intrachromosomique
Signification	formation de différentes combinaisons (mélanges) entre chromosomes maternels et chromosomes paternels	formation de différentes combinaisons alléliques à l'intérieur des chromosomes.
Moment du déroulement	Anaphase I	Prophase I
Mécanisme	séparation aléatoire et indépendante des chromosomes homologues de chaque bivalent	crossing-over
Conséquences	Diversité génétique des gamètes (gamètes différents par leurs combinaisons chromosomiques et alléliques)	

Tableau 4

1.5

DEUXIEME PARTIE

Exercice 1

A/ 1. Le spermogramme de Mr Ab. est jugé normal car il montre :

- un volume du sperme (=3.5ml) ; ce qui est normal puisqu'il est compris entre 3 et 4ml.
- Un Ph du sperme =7.3 ; ce qui est normal puisqu'il est alcalin et compris entre 7 et 8.
- Une numération = 80 10^6 spz/ml jugé normale car elle est supérieure à 60 10^6/ml.
- Un pourcentage de spermatozoïdes de forme normal = 62% jugé normal car il est supérieur à 60%.

1

2. La radio. de Mme Ab. montre l'utérus mais pas les trompes et les pavillons contrairement à celle de la femme normale. Cela traduit une obstruction des trompes chez Mme Ab.

0.5

B//1. L'analogue de la GnRH se fixe sur les cellules hypophysaires (au niveau des récepteurs spécifiques de la GnRH) empêchant la GnRH de s'y fixer et de stimuler la sécrétion des gonadostimulines d'où le blocage du cycle ovarien.

0.5

2 a) Pendant la période des injections de FSH, le document 5 montre qu'il ya croissance progressive de 11 follicules qui ont atteint tous le stade mûr. On en déduit que l'intérêt d'un tel traitement est l'obtention de plusieurs follicules mur afin d'obtenir plusieurs ovocytes II.

0.5

b) Au cours d'un cycle normal, le taux sanguin de FSH est probablement plus faible de plus il y a un RC- sur le complexe HH par les œstrogènes sécrétés à faible doses au milieu de la phase folliculaire ce qui réduit la sécrétion de FSH et active en conséquence l'atrésie folliculaire d'où la formation d'un seul follicule mur.

0.75

3. a) Il s'agit du pic de LH. Ainsi la HCG injectée a pour rôle de préparer l'ovulation : elle provoque le détachement des ovocytes I des granulosa des follicules murs et la reprise de la méiose de ces cellules devenant ovocytes II bloqués en métaphase II (fécondables)

0.75

b) Cet événement ne se produit pas, malgré la forte dose d'œstradiol sécrétée par les follicules mûrs (montrée par le document 5) et qui normalement provoque le pic de LH par RC+ sur le CHH, à cause de l'analogue de GnRH qui va empêcher ce RC+. 0.75

4.a) traitement : sélection et capacitation des spermatozoïdes

b) Schéma d'un ovocyte II activés : réaction corticale + reprise de la DE. 1.25

15

Exercice 2

A//1.)a) 0.75

Analyse	Déductions
- on étudie la transmission de 2 caractères…. - les parents, différents pour les 2 caractères, engendrent une descendance F_1 homogène de phénotype $[A_1B_1]$ - Les individus F1 présentent un phénotype existant chez les parents pour chaque caractère	- cas de dihybridisme - D'après la 1ère loi de Mendel, les parents sont purs et la descendance est formée d'hybrides - les 2 caractères se transmettent par dominance absolue : ➔caractère C_1 contrôlé par (A_1, A_2) / $A_1 > A_2$ ➔caractère C_1 contrôlé par (B_1, B_2) / $B_1 > B_2$

b) Deux cas sont possibles : $[A_1B_1] \times [A_2B_2]$ ou $[A_1B_2] \times [A_2B_1]$ 0.25

c) 2ème croisement :

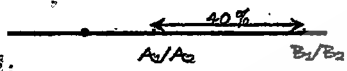
Analyse :

- c'est un test cross de dihybridisme : hybride de $F_1[A_1B_1]$ X birecessif $[A_2B_2]$
- la descendance est hétérogène comportant 4 phénotypes :
  - 2 phénotypes majoritaires $[A_1B_2]$ et $[A_2B_1]$ aux pourcentages voisins respectifs 29,4% et 30,6%
  - 2 phénotypes minoritaires $[A_1B_1]$ et $[A_2B_2]$ aux pourcentages voisins respectifs 19,4% et 20,5%

Déductions :

- Les 2 gènes étudiés ne sont pas indépendants puisque les proportions phénotypiques de la descendance du test cross sont différentes de (1/4, 1/4, 1/4, 1/4) ; ils sont alors liés (portés sur la même paire de chromosomes).
- Le linkage est partiel puisqu'il y a des phénotypes recombinés (qui doivent être les phénotypes minoritaires $[A_1B_1]$ et $[A_2B_2]$ 2.5
- La distance entre les 2 gènes est de 40 CM puisque d(gène- gène)=px100 = pourcentage de recombinaison qui correspond dans ce cas au pourcentage de phénotypes recombinés qui est de : (195+205/294+306+195+205)X100=40% (ou 19,4% +20,5%)

Carte factorielle :



Interprétation génétique :

le génotype de l'individu F_1 est $A_1B_2//A_2B_1$ puisque les phénotypes $[A_1B_2]$ et $[A_2B_1]$ sont majoritaires et donc parentaux.

Phénotypes Hybride $[A_1B_1]$ X birecessif $[A_2B_2]$

Génotypes $\frac{A_1B_2}{A_2B_1}$ $\frac{A_2B_2}{A_2B_2}$

Méiose

Gamètes

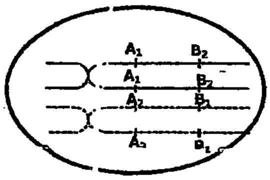
A_1B_2	A_2B_1	A_1B_1	A_2B_2
30%	30%	20%	20%
1-p/2	1-p/2	p/2	p/2

A_2B_2
100%

Fécondation

	30% (A_1B_2) 1-p/2	30% (A_2B_1) 1-p/2	20% (A_1B_1) p/2	20% (A_2B_2) p/2
100% (A_2B_2)	1-p/2 $\frac{A_1B_2}{A_2B_2}$ 30 % $[A_1B_2]$	1-p/2 $\frac{A_2B_1}{A_2B_2}$ 30% $[A_2B_1]$	p/2 $\frac{A_1B_1}{A_2B_2}$ 20% $[A_1B_1]$	p/2 $\frac{A_2B_2}{A_2B_2}$ 20% $[A_2B_2]$

d) Spermatocyte I en prophase I
(de l'individu à tester) 0.5



B// 1. L'obtention du phénotype $[A_2B_2]$ dans la descendance du croisement cr1 x cr2 montre que ces derniers sont double hétérozygotes. Etant donné que p = 0.4 ; 1-p= 0.6 et la fréquence de ce phénotype correspond à 0.09 ce qui correspond à (1-p/2) x (1-p/2) donc les gamètes (A2B2) produits par cr1 et cr2 sont parentaux donc le génotype de ces deux criquets est $\frac{A_1B_1}{A_2B_2}$ 1.5

- L'obtention du phénotype $[A_2B_2]$ dans la descendance du croisement cr1 x cr3 montre que ces derniers sont double hétérozygotes. Etant donné que la fréquence de ce phénotype correspond à 0.06 ce qui correspond à (1- p/2) x (p/2) donc les gamètes (A2B2) produits par cr3 sont recombinés donc le génotype du criquet cr3 est $\frac{A_1B_2}{A_2B_1}$

2. $\frac{A_1B_1}{A_2B_2}$ X $\frac{A_1B_2}{A_2B_1}$

Gamètes : 0.3 (ou 3%) (A2B2) ; 0.2 (ou 2%) (A2B2)

0.06 (ou 6%) $\frac{A_2B_2}{A_2B_2}[A_2B_2]$ 0.5

16

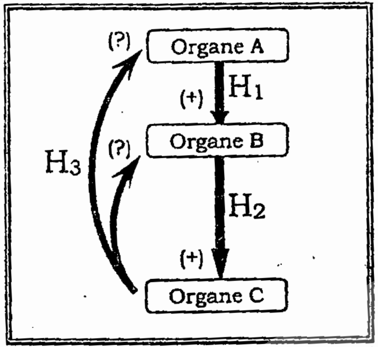
71/8

Lycée pilote de Sfax	Devoir de Synthèse n° 1	
Mr Kharrat & Mr et Mme Abdelmoula	Sciences de la Vie et de la Terre	
4ème Sciences Expérimentales : 2, 3 & 4	5 Décembre 2015	Durée : 3 heures

Partie 1 : Restitution des connaissances (8 points)

A) Contrôle des fonctions testiculaires et ovariennes : 3,5 points

Le document suivant montre des interactions hormonales existantes entre 3 organes A, B et C intervenant dans la fonction reproductrice humaine.

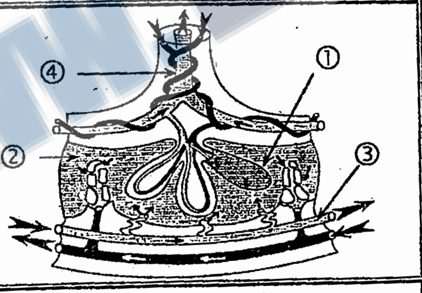


1. En considérant le cas de l'homme, reproduisez ce schéma en indiquant les noms des organes, des hormones et le type de l'interaction. (une légende est exigible) **(1 point)**
2. En considérant le cas de la femme (cycles de 28 jours), et afin de préciser les effets possibles de l'organe C sur les organes A et B, reproduisez et complétez le tableau suivant. **(2,5 points)**

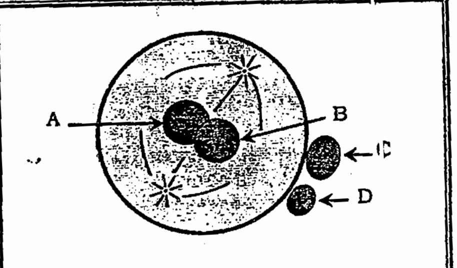
Nom possible de H_3 et sa dose	Moment de l'interaction	Structure responsable de la sécrétion de H_3	Type de l'interaction	Conséquences sur :		
				A = ...	B = ...	C = ...

B) Procréation : 4,5 points

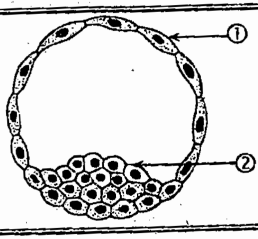
On considère les quatre structures S_1, S_2, S_3 et S_4 intervenant au cours de la procréation.



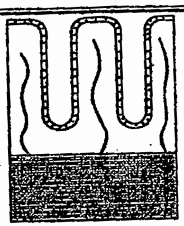
Structure S_1



Structure S_2



Structure S_3



Structure S_4

1) Nommez ces structures. **(1 point)**

13

2) Pour chacune des structures précédentes, il y a une ou deux affirmations exactes.
Relevez sur votre copie, pour chacune de ces structures, la (ou les) lettre(s) qui correspond (ent) à la (ou les) affirmation (s) exacte (s). **(2 points)**

Structure S₁	**Structure S₂**
[✓ a)] l'élément ① est une villosité placentaire. b) en②, il y a mélange entre le sang maternel et le sang fœtal. [✓ c)] l'élément ③ est une artère maternelle. d) l'élément ④ est une artère ombilicale	[✓ a)] l'élément B renferme autant d'ADN que l'élément D. b) l'élément A renferme autant d'ADN que l'élément C. c) l'élément D renferme le double de la quantité d'ADN que l'élément B. [✓ d)] les éléments A et D ont la même quantité d'ADN
Structure S₃	**Structure S₄**
a) l'élément ② sécrète la HCG. [✓ b)] l'élément ① secrète la HCG. [✓ c)] l'élément ① secrète des enzymes. d) l'élément ② secrète des enzymes.	a) l'aspect de la structure correspond à la phase proliférative. b) l'aspect de la structure correspond à la phase sécrétoire. c) cette structure est favorable à la nidation. [✓ d)] cette structure est défavorable à la nidation.

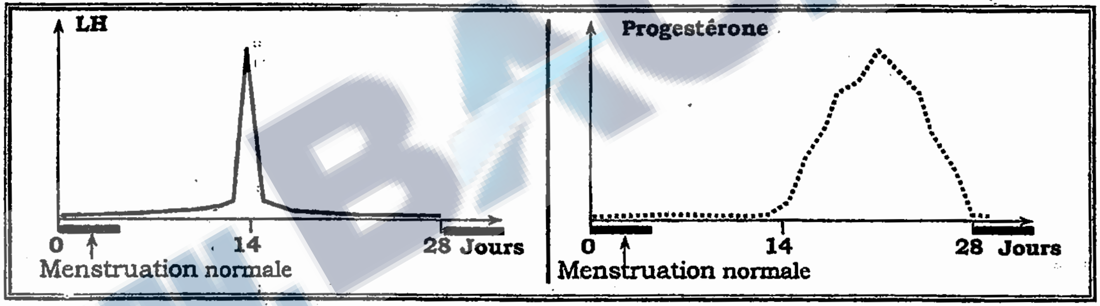
3) Trois, parmi ces 4 structures, dérivent l'une de l'autre. Décrivez ce passage. **(1,5 points)**

Partie 2 : Mobilisation des connaissances (12 points)

A) PROCRÉATION : 5 points

On se propose d'étudier certains aspects de la reproduction humaine.
Mr et Mme R consultent un médecin afin de trouver une solution concernant leur infertilité. Celui-ci collecte des donnees permettant de diagnostiquer des anomalies chez l'un ou l'autre des deux partenaires.

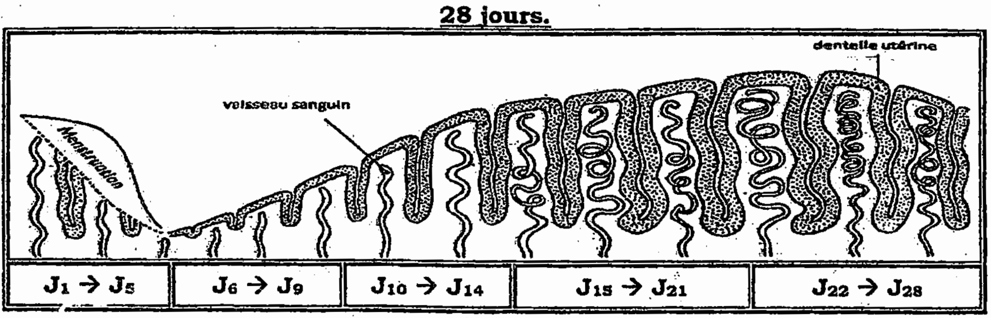
Donnée 1 : dosage de deux hormones sexuelles chez Mme R durant 28 jours.



1) Comment, le médecin a – t – il pu conclure, à partir de cette donnée, que Mme R ne présente pas une stérilité à cause hormonale. **(0,5 point)**

2) Le médecin soupçonne (doute) des anomalies soit au niveau des voies génitales de Mme R soit au niveau de ses gamètes.
Envisagez 3 hypothèses proposées par le médecin quant à la stérilité possible de Mme R. **(0,75 point)**

Donnée 2 : Représentation schématique de l'aspect de l'utérus de Mme R au cours d'un cycle de 28 jours.

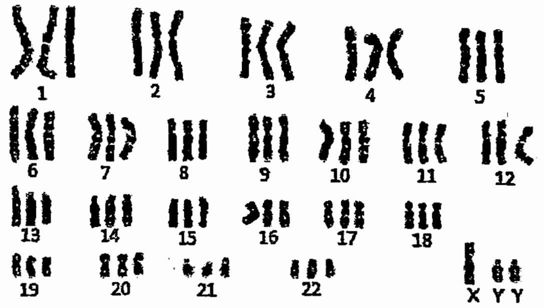


Donnée 3 : Mme R a annoncé qu'elle a subi des avortements spontanés.

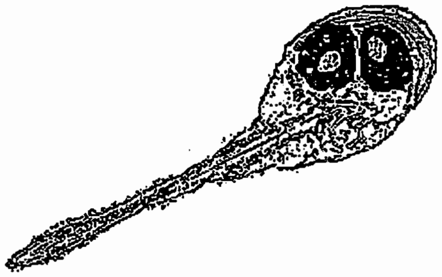
3) Montrez, à partir des données 2 et 3, que Mme R n'est pas stérile. **(0,75 point)**

73

Donnée 4 : Caryotype établi à partir d'une cellule d'embryon expulsé lors d'un avortement spontané de Mme R.



Donnée 5 : Examen microscopique d'un gamète de Mr R (son spermogramme montre 76% de gamètes atypiques)



Grossissement x7500

4) a) Quelle anomalie présente le caryotype de la cellule embryonnaire de la donnée 4 ? **(0,5 point)**

b) En observant ce caryotype, quelqu'un affirma que : « le gamète femelle a été fécondé par deux gamètes mâles ».

Montrez que cette affirmation pourrait expliquer le caryotype étudié, mais ne serait pas en accord avec vos connaissances relatives à la fécondation. **(1,25 points)**

5) En quoi l'observation d'un tel spermatozoïde de la donnée 5 permet – elle d'expliquer le caryotype de la cellule embryonnaire de la donnée 4 ? **(0,75 point)**

6) Déduisez ainsi la cause de l'infertilité du couple ? **(0,5 point)**

B) Dihybridisme : 4 points

On étudie la transmission de deux couples d'allèles (a_1 , a_2) et (b_1 , b_2) chez une espèce végétale en effectuant les deux croisements suivants.

1^er^ croisement	
Parents	Variété pure [a_1 b_1] **X** Variété pure [a_2 b_2]
F_1	100% des plantes de phénotype [a_1a_2 b_1b_2]

1) Précisez la relation de dominance entre les allèles de chaque gène. **(0,5 point)**

2) Ecrivez les génotypes possibles des parents et des plantes de la F_1. **(0,75 point)**

2ème croisement			
Parents	**Plante A [? ?] X Plante B [? ?]**		
Descendance	**19 [a_1 b_1]**	**39 [a_1 b_1b_2]**	**22 [a_1a_2 b_1]**
	21 [a_1 b_2]	**41 [a_1a_2 b_1b_2]**	**18 [a_1a_2 b_2]**

Les plantes A et B sont d'origine inconnue.

3) Exploitez les résultats du 2ème croisement afin de préciser si les 2 gènes sont indépendants ou liés. **(1,75 points)**

4) Ecrivez les phénotypes et les génotypes (possibles) des plantes A et B et expliquez les résultats du 2ème croisement. **(1 point)**

SUITE ☞ → page 4

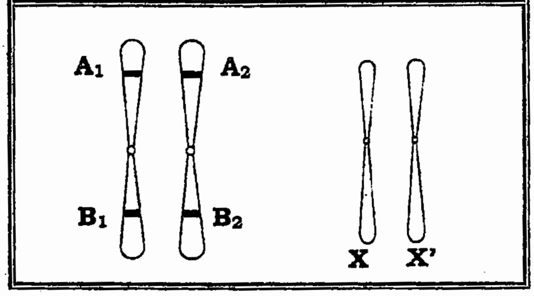
74

C) Brassage méiotique : 3 points

On se propose d'étudier le brassage chromosomique au cours de l'ovogenèse.

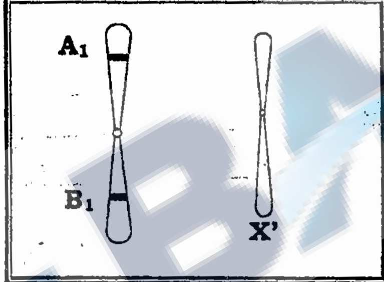
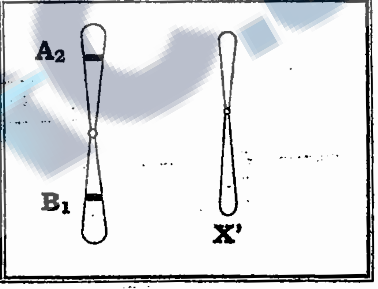
❖ Le document 1 suivant représente l'équipement chromosomique et allélique d'une ovogonie en réduisant le nombre de chromosomes à 2n = 4 chromosomes dont deux autosomes et 2 chromosomes sexuels. A_1, A_2, B_1 et B_2 sont des allèles portés par les deux autosomes.

Document 1



❖ Le document 2 suivant représente deux équipements chromosomiques et alléliques possibles du deuxième globule polaire issu de la maturation de l'ovocyte I.

Document 2

Équipement 1	Équipement 2
	

NB : pour tous vos schémas de chromosomes, utilisez deux couleurs différentes.

En se basant sur le document 1 et :

1) en considérant l'équipement 1 du document 2, schématisez, dans un rectangle, la garniture chromosomique et allélique de :
- L'ovocyte II.
- Premier globule polaire. **(1 point)**

2) en considérant l'équipement 2 du document 2, **expliquez, schémas à l'appui,** les phénomènes méiotiques aboutissant à l'équipement 2 du 2ème globule polaire. **(2 points)**

12

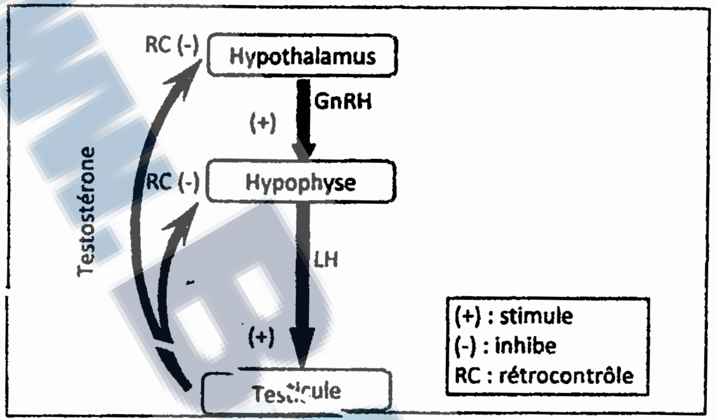
CORRIGE DU DS1 DECEMBRE 2015 4 SC. EXP

BARÈME

1ère partie : Restitution des connaissances : 8 points

A) Contrôle des fonctions testiculaires et ovariennes

1)



1

2)

Nom possible de H_3 et sa dose	Moment de l'interaction	Structure responsable de la sécrétion de H_3	Type de l'interaction	Conséquences sur :		
				A = hypothalamus	B = hypophyse	C = ovaire
Œstrogène (Faible dose)	5j →11j	follicules tertiaires (Thèque interne et granulosa)	Rétrocontrôle négatif	Baisse de GnRH	Baisse de FSH	Atrésie folliculaire
Œstrogène (forte dose)	12→14j	follicule mûr (Thèque interne et granulosa)	RC (+)	Pic GnRH	Pic de LH et de FSH	ovulation
Progestérone	15→21j	Corps jaune	RC(-)	Baisse de GnRH	Baisse de FSH et de LH	Régression du Corps Jaune

2,5

B) Procréation

		S_1	S_2	S_3	S_4
1)	Nom	Placenta	Cellule œuf	Blastocyste	Utérus en phase postmenstruelle
2)	QCM	a, c	b	b, c	a, d

1
2

3) Après caryogamie, la structure S_2 se transforme en cellule œuf qui subit une segmentation grâce des mitoses successives aboutissant au bout de 4 jours au stade de morula (64 cellules) qui se différencie en blastocyste (S_3) Les cellules périphériques de S_3 sécrètent des enzymes creusant la muqueuse (7 j) permettant la nidation une surface d'échange appelée placenta (S_2) se forme permettant les échanges entre le sang maternel et le sang fœtal

1,5

76

2ème partie : Mobilisation des connaissances 12 points	
A) Procréation : 5 points 1) La sécrétion de progestérone est normale : quasi nulle pendant la phase folliculaire et abondante pendant la phase lutéale montrant un pic au 21ème jour ; ceci traduit l'existence d'un corps jaune formé à partir du follicule rompu après l'ovulation déclenchée par le pic de LH observé la veille du 14ème jour. Ce pic de LH traduit une sécrétion normale d'œstrogènes et de FSH au début du cycle. **Conclusion** : Mme R ne souffre pas d'une stérilité à cause hormonale.	0,5
2) **Hypothèse 1 :** obstruction bilatérale des deux trompes. **Hypothèse 2 :** anomalie au niveau de l'utérus défavorable à la nidation. **Hypothèse 3 :** ovocyte II non fécondable par absence de récepteurs des spermatozoïdes sur la zone pellucide.	0,75
3) • **Donnée 2 :** le cycle utérin de Mme R se déroule de façon normale au cours du cycle sexuel : menstruation au début du cycle → prolifération de l'endomètre entre J_5 et J_{14} → formation de dentelle entre J_{15} et J_{21} d'où l'hypothèse 2 est rejetée. • **Donnée 3 :** Mme R a subi des avortements spontanés : ceci prouve qu'il y a eu fécondation et début de grossesse d'où ses trompes sont perméables et son ovocyte II est fécondable et par la suite les hypothèses 1 et 3 sont rejetées. • **Conclusion** : Mme R n'est pas stérile.	0,75
4) **a)** Le caryotype de la cellule embryonnaire est anormal, il est triploïde montrant 3n chrs = 69 dont 3 chromosomes sexuels XYY	0,5
b) Si le gamète femelle a été fécondé par 2 spermatozoïdes et sachant que chaque spermatozoïde possède dans les conditions normales n = 23 chrs et que l'ovocyte II possède lui aussi n = 23 chrs, on devrait trouver dans la cellule œuf 3 x (n = 23 chrs) donc 3n = 69 chrs ce qui est le cas ici. Or, l'ovocyte II ne peut être fécondé que par un seul spermatozoïde car juste après la pénétration d'un spz, l'ovocyte II est activé en effectuant la réaction corticale : les enzymes libérées à partir des granules corticaux agissent sur la zone pellucide en la rendant imperméable aux spermatozoïdes par la destruction de leurs récepteurs spécifiques. Donc ce caryotype ne peut pas exister de cette façon.	1,5
5) Le spermatozoïde renferme, au niveau de sa tête 2 noyaux chacun à n chromosomes simples ainsi la fusion entre ce spz anormal à 2 noyaux et le gamète femelle permet la formation de cellule œuf à 3 n chromosomes.	0,5
6) La cause de l'infertilité du couple : (tératospermie) 76% >à 40% de spzs atypiques de telle façon que le blastocyste issu de la cellule œuf anormale formée ne peut pas nider durant toute la période de grossesse d'où les avortements spontanés de Mme R.	0,5

14

B) Génétique : 4 points

1) Les variétés d'espèce végétale different par deux caractères : il s'agit du dihybridisme.

<u>Relation de dominance</u> $[a_1b_1]$ X $[a_2b_2]$ → F_1 :100% $[a_1a_2\ \ b_1\ b_2]$

- F_1 : homogène la 1ère loi de Mendel est vérifiée.
- A la F_1 il y a apparition de nouveaux phénotypes intermédiaires : c'est un cas de codominance des 2 caractères.

Soit le couple d'allèles (a_1, a_2) avec $a_1 = a_2$ Soit le couple d'allèles (b_1, b_2) avec $b_1 = b_2$

0,5

2)

Phénotypes	P_1	P_2	F_1
Si gènes indépendants	$\frac{a_1}{a_1}\ \frac{b_1}{b_1}$	$\frac{a_2}{a_2}\ \frac{b_2}{b_2}$	$\frac{a_1}{a_1}\ \frac{a_2}{a_2}$
Si gènes liés	$\frac{a_1\ b_1}{a_1\ b_1}$	$\frac{a_2\ b_2}{a_2\ b_2}$	$\frac{a_1\ b_1}{a_2\ b_2}$

0,75

3) <u>Analyse :</u> le croisement des plantes A et B fournit une descendance hétérogène constituée de 4 phénotypes différents.

<u>Hypothèse :</u> les deux gènes sont indépendants :

<u>Dissociant les caractères, on trouve :</u>

1er caractère contrôle par le couple d'allèles (a_1, a_2)	
$[a_1]$ = (19 +39+21) / 160 = 0,49 = ½	c'est le résultat d'un croisement entre un hybride et un homozygote.
$[a_1a_2]$ = (22+41+18) /160 = ½	
2ème caractère contrôle par le couple d'allèles (b_1, b_2)	
$[b_1]$ = (19 +22) / 160 = ¼	c'est le résultat de la F_2 du monohybridisme avec codominance
$[b_2]$ = (21 +18) / 160 = ¼	
$[b_1b_2]$ = (39 + 41) / 160 = ½	

On sait que le dihybridisme de gènes indépendants est le produit de deux monohybridismes

En combinant les 2 caractères on trouve :

	¼ $[b_1]$	½ $[b_1b_2]$	¼ $[b_2]$
½ $[a_1]$	1/8 $[a_1b_1]$	2/8 $[a_1\ b_1b_2]$	1/8$[a_1\ b_2]$
½ [a1a2]	1/8 $[a_1a_2\ b_1]$	2/8 $[a_1a_2\ \ b_1b_2]$	1/8 $[a_1a_2\ b_2]$

Vérification des résultats	$[a_1\ b_1]$	$[a_1\ \ b_1b_2]$	$[a_1\ b_2]$	$[a_1a_2\ \ b_1]$	$[a_1a_2\ \ b_1b_2]$	$[a_1a_2\ \ b_2]$
Résultats théoriques	1/8 x160=20	2/8 x160 = 40	1/8 x160 = 20	1/8x160=20	2/8 x160=40	1/8x60 =20
Résultats pratiques	19	39	21	22	41	18

Les résultats théoriques sont conformes aux résultats pratiques, d'où l'hypothèse est vérifiée : les 2 gènes sont indépendants.

1,75

78

4)

A $[a_1\ b_1b_2]$ × **B** $[a_1a_2\ b_1b_2]$

$$\frac{a_1\ \ b_1}{a_1\ \ b_2} \qquad\qquad \frac{a_1\ \ b_1}{a_2\ \ b_2}$$

↓ ↓

½ a_1b_1 et ½ a_1b_2 ¼ a_1b_1 ¼ a_1b_2 ¼ a_2b_1 et ¼ a_2b_2

ECHIQUIER DE CROISEMENT

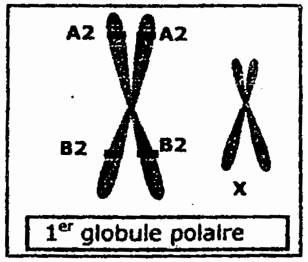
	¼ a_1b_1	¼ a_1b_2	¼ a_2b_1	¼ a_2b_2
½ a_1b_1	1/8 $[a_1b_1]$	1/8 $[a_1b_1b_2]$	1/8 $[a_1a_2\ b_1]$	1/8 $[a_1a_2\ b_1b_2]$
½ a_1b_2	1/8 $[a_1b_1b_2]$	1/8 $[a_1b_2]$	1/8 $[a_1a_2\ b_1b_2]$	1/8 $[a_1a_2\ b_2]$

1/8 $[a_1\ b_1]$; 2/8 $[a_1\ b_1b_2]$; 1/8 $[a_1a_2\ b_1]$; 2/8 $[a_1a_2\ b_1b_2]$; 1/8 $[a_1b_2]$; 1/8 $[a_1a_2\ b_2]$

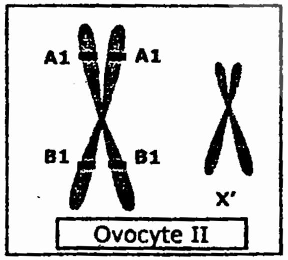
1

C) Brassage chromosomique : 3 points

1)

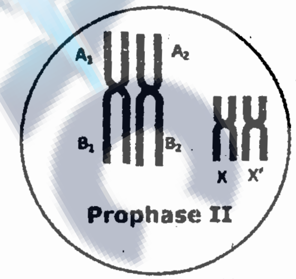


1er globule polaire



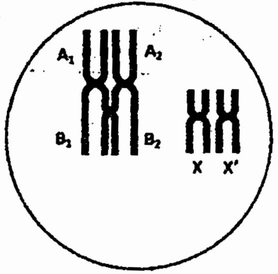
Ovocyte II

2)

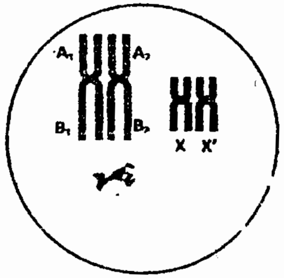


Prophase II

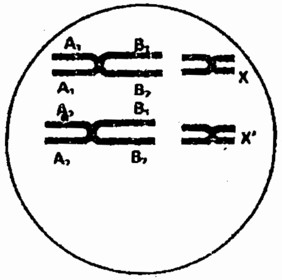
Brassage intrachromosomique



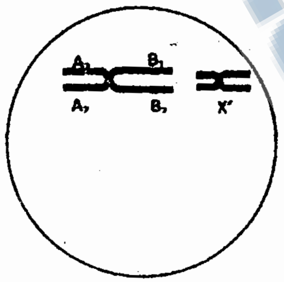
1



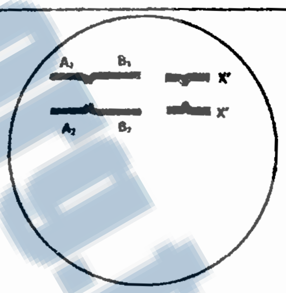
Fin prophase I



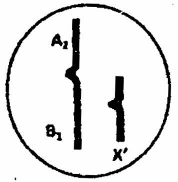
Anaphase I



Ovocyte II



Anaphase II



2ème GP

2

15

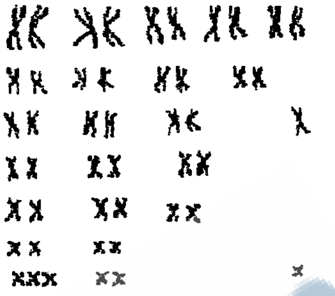
Lycée Mongi Slim Sakiet Ezzit Sfax	Sciences de la Vie et de la Terre	$4^{ème}$sciences expérimentales(1,2,3)
	Devoir de contrôle n°2 Durée : 2h	Le 23-1-2015

Première partie (12 points)

Exercice N°1 : (3 points)

Pour chacun des items suivants, écrivez sur votre copie le numéro de la question et la(ou les2) lettre (s) qui correspond (ou ent) à la (ou aux 2) affirmation (s) exacte (s) :

1) Voici le caryotype d'un enfant touché par une maladie et dont les parents sont sains . Peut -on affirmer sans doute que:



a- la maladie est récessive autosomale ?

b- la maladie est récessive portée par X?

c- la maladie est récessive portée par Y ?

d- l'enfant présente une anomalie au niveau du chromosome N°21?

2) Les différences en acides aminés des protéines homologues appartenant à 2 espèces actuelles :

a- sont les conséquences des mutations géniques ayant affecté le gène ancestral

b- constituent une preuve anatomique de l'évolution

c- sont d'autant plus nombreuses que l'ancêtre commun des 2 espèces est éloigné dans le temps

d- sont les conséquences d'une amplification génique .

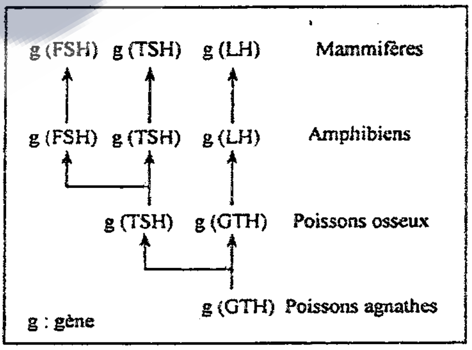
3) Le document présente l'histoire évolutive des gènes codants pour des hormones hypophysaires chez les vertébrés. Ce document montre que le gène ancestral GTH a subi :

a- 2 duplications et 3 mutations.

b- 2 duplications et 2 mutations.

c- 3 duplications et 2 mutations.

d- une amplification génique



4) L'espèce drosophila pseudobscura 2n=10 est apparue suite à une:

a- mutation chromosomique

b- mutation génique

c- fusion des chromosomes

d- amplification des chromosomes

5) La substance grise :

a- est externe dans le cerveau.

b- est formée uniquement de fibres nerveuses centrales

c - comporte des cellules gliales

d- comporte des cellules de sertoli

6) La substance blanche de la moelle épinière contient des :

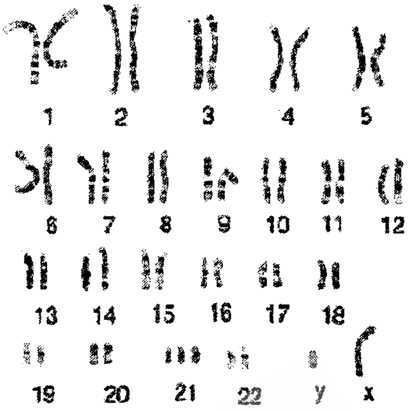
a- fibres nerveuses centrales.

b- fibres nerveuses périphériques

c- axones

d- cellules de Schwann

Exercice N°2 : (2.5 points)



Au cours d'un diagnostic prénatal , un médecin a réalisé le caryotype d'un fœtus (voir document) .

1) a) Citez les techniques de prélèvement qui ont permis de réaliser ce caryotype .

b) Quelle(s) information (s) peut-on tirer de ce document

2) Sachant que l'anomalie observée est le résultat d'une erreur au cours de la spermatogenèse , schématisez la phase montrant l'erreur pendant :

* la première division .

* la deuxième division .

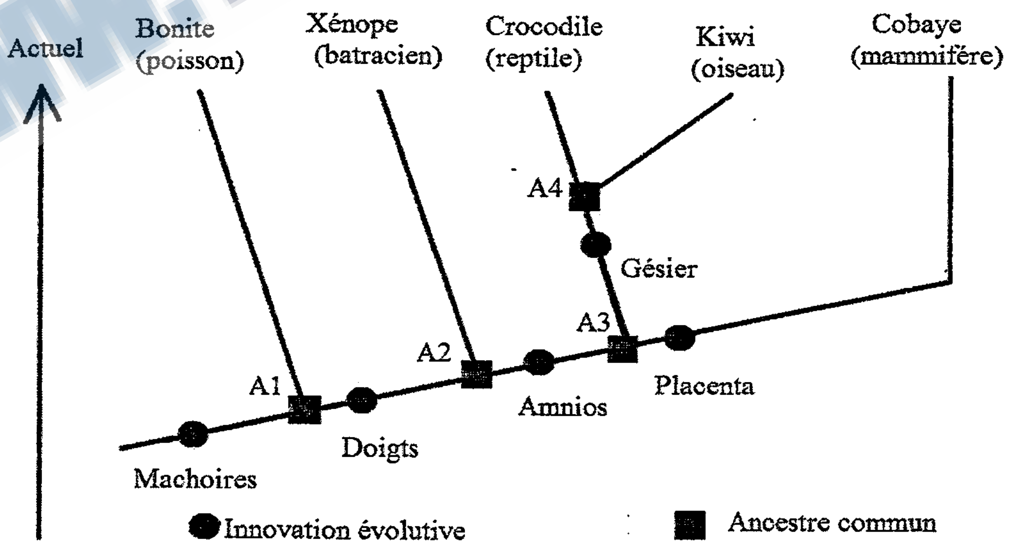
(on considère uniquement les chromosomes concernés et les chromosomes sexuels)

Exercice N°3 : (3 +3.5 points))

A// L'escargot Cepoea nemoralis , très fréquent (abondant) dans les bois et les jardins, présente une coquille très variable par sa couleur et par le nombre de bandes brunes ou vertes qui la marquent. Il existe une relation étroite entre certaines formes de la coquille et les habitats occupés. En effet, les escargots jaunes sans bandes sont abondants dans les terrains à herbe sèche, alors que les escargots à coquilles rayées en bandes brunes et vertes sont très fréquents dans les terrains à végétation dense

A partir de l'analyse de ce texte, et vos connaissances expliquez le lien entre le phénotype des coquilles et le milieu occupé en précisant le mécanisme évoqué et son importance.

B// Le document suivant représente l'arbre phylogénétique de cinq espèces actuelles ainsi que les différentes innovations évolutives ayant accompagné leurs évolutions



Gésier : une poche au niveau de l'estomac
Innovation : caractère apparu

1) Enoncez la théorie de l'évolution .
2) Que représente A_1 et A_4 .
3) En considérant les innovations du document , reproduisez puis complétez le tableau suivant par les numéros (1) si le caractère est présent et (0) s'il est absent

Quelques caractères chez les cinq espèces de vertébrés

Caractère	**Bonite**	**Xénope**	**Crocodile**	**Kiwi**	**Cobaye**
Mâchoires			**1**		
Doigts		**1**	**1**		
Placenta			**0**		
Gésier					
Amnios		**0**			

4) Pourquoi dit-on que << mâchoire >> est le caractère ancestral ?
5) Le caractère << placenta >> est-t-il un caractère permettant de précisez des relations de parenté entre ces espèces ? Justifiez

6) A votre avis quelles sont les deux espèces les plus apparentées ? Argumentez

Deuxième partie (8 points)

Exercice N°1 : (3 points)

Chaque affirmation de la première colonne correspond une ou plusieurs propositions de la deuxième colonne

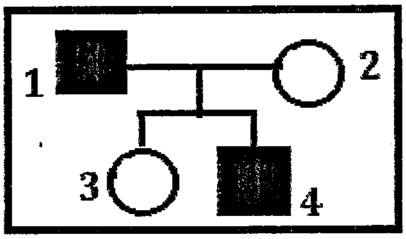
1re colonne	**2ème colonne**
A-deux parents sains donnent naissance à une fille atteinte d'une anomalie génétique **B**- un garçon de phénotype atteint est issue d'une mère hétérozygote et phénotype de sain **C**- deux parents de phénotype atteint d'une tare génétique donne naissance à un garçon de phénotype sain **D**- une mère homozygote de phénotype atteint d'une tare héréditaire donne naissance à un garçon de phénotype sain	1) La tare peut être récessive autosomale 2) La tare peut être récessive liée à X 3) La tare peut être dominante liée à X 4) La tare peut être dominante autosomale

Complétez le tableau en le reportant sur votre copie

A	B	C	D

Exercice N°2 : (5 points)

Le document 1 représente l'arbre généalogique de la famille F_1 . Les individus 1 et 4 sont atteints par une maladie héréditaire .

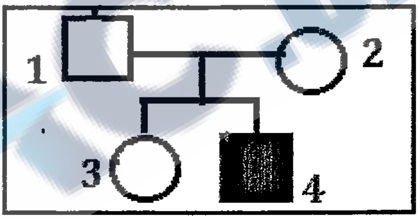


Document 1

1) En exploitant les données du document 1 discutez chacune des hypothèses suivantes :

- **Hypothèse 1 :** allèle de la maladie dominant autosomal
- **Hypothèse 2 :** allèle de la maladie récessif autosomal
- **Hypothèse 3 :** allèle de la maladie dominant porté par X
- **Hypothèse 4 :** allèle de la maladie récessif porté par X

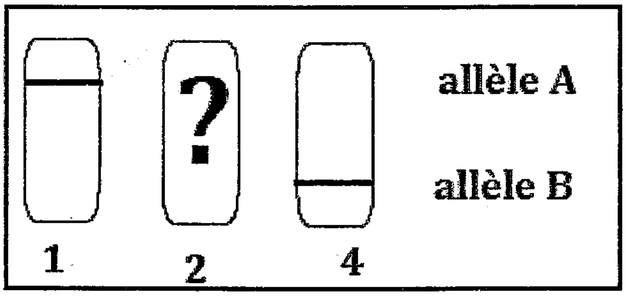
L'arbre généalogique du document 2 se rapporte à une autre famille F_2 dont certains membres sont atteints par la même maladie héréditaire



Document 2

2) Quelles hypothèses restent encore valables ? justifiez

Suite à une demande médicale , les individus 1, 2 et 4 de la famille F_2 ont réalisé l'analyse de leurs ADN . Le résultat de la femme 2 a été perdu .On a récupéré les résultats des individus 1 et 4



Document 3

3) a) Décrivez la technique qui a permis d'avoir le document 3 .
   b) Identifiez l'allèle malade en justifiant
   c) Ecrivez les génotypes des individus des deux familles
   d) Schématisez le résultat de l'analyse de l'ADN de la femme 2 de la famille F_2 et justifiez

Correction du devoir de contrôle n°2 janvier 2015

QCM :

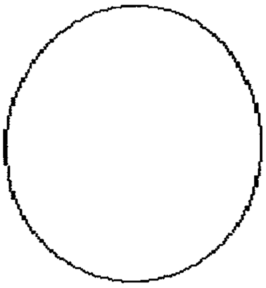
1	2	3	4	5	6
d	a-c	a-d	a-c	a-c	a-c

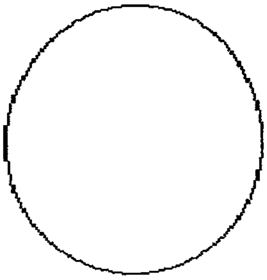
6x0.5=3

Exercice 2

a) Les techniques sont : - amniocentèse – prélèvement des villosités choriales – prélèvement du sang fœtal . 0.75

b) caryotype d'un garçon – trisomie 21 0.5


Anaphase I


Anaphase II

1.25

Exercice 3

A//Analyse : Il existe une diversité phénotypique de couleur et de l'aspect de la coquille chez l'escargot. Ces escargots occupent des habitats différents selon l'aspect et la couleur. Les escargots à coquilles jaunes occupent les terrains à herbes sèches et les escargots à coquilles rayées occupent les terrains à végétation dense. 1

Le lien: *dans les terrains à herbe sèche les escargots à coquilles rayées sont facilement repérés puis éliminés par leurs prédateurs. les escargots à coquilles jaunes sont mieux camouflés (cachés) et échappent ainsi aux prédateurs 1

*dans le milieu à végétation dense les escargots à coquilles rayées sont mieux camouflés et prolifèrent. Les escargots à coquilles jaunes sont éliminés car ils sont facilement repérés par les prédateurs de ce milieu. Le mécanisme mis en jeu est la sélection naturelle. 1

Importance : La nature sélectionne les phénotypes les plus adaptés capables d'échapper aux prédateurs. Elle favorise leurs multiplications et leur vie et élimine les non adaptés. la sélection naturelle est orienté ; elle fait un choix. Le milieu opère donc un choix et oriente l'évolution vers les formes les mieux adaptés.

B// 1)Toutes les espèces dérivent d'une seule espèce originelle appelé ancêtre commun caractères 0.5

2) A1= ancêtre commun de touts les espèces - A4= ancêtre commun du kiwi et crocodile 0.5

Caractère	Bonite	Xénope	Crocodile	Kiwi	Cobaye
Mâchoires	1	1	1	1	1
Doigts	0	1	1	1	1
Placenta	0	0	0	0	1
Gésier	0	0	1	1	0
Amnios	0	0	1	1	1

1

4) car c'est le plus ancien 0.5

5) non car il est absent chez les autres espèces 0.5

6) kiwi et crocodile car leur ancêtre commun est le plus proche dans le temps 0.5

Exercice 1

A	B	C	D
1	1-2	3-4	1

0.5
1-1-.0.5

Exercice 3

1) H1 : soit (A, a) avec A= allèle dominant malade a= allèle sain
L'individu 3 de génotype a// a , hérite un allèle a de son père malade de génotype A//a (possible) et un allèle a de sa mère saine de génotype a//a **Donc H1à retenir**

4x0.5

H2 : soit (A, a) avec A= allèle dominant sain a= allèle malade
L'individu 4 de génotype a// a , hérite un allèle a de son père malade de génotype a//a et un allèle a de sa mère saine de génotype A //a (possible **Donc H2à retenir**

H3 : soit (A, a) avec A= allèle dominant malade a= allèle sain
L'individu 3 de génotype Xa//Xa , hérite un allèle Xa de son père de génotype Xa//Y sain ce n'est pas le cas **Donc H3à rejeter**

H4 : soit (A, a) avec A= allèle dominant sain a= allèle malade
L'individu 4 de génotype Xa//Y , hérite un allèle Y de son père et un allèle Xa de sa mère saine de génotype XA//Xa (possible) **Donc H4à retenir**

2) D'après le document 2 ; deux parents sains ont donné un enfant malade donc l'allèle de la maladie est récessif alors l'hypothèse H1 est à rejeter et les l'hypothèses H2 et H4 sont à retenir

0.5

3) a) analyse biochimique de l'ADN (voir cours)

0.75

b) l'individu 1 de la famille 2 est sain et possède seulement l'allèle A donc l'allèle A est sain et l'allèle B est l'allèle malade

0.5

c) famille 2 : le père 1 possède l'allèle A qui est absent chez son fils donc la maladie ne peut pas être autosomale alors l'hypothèse H2 à rejeter et H4 à retenir
Conclusion :l'allèle de la maladie récessif porté par X
A= allèle sain B= allèle malade

1

famille A :

1	2	3	4
XB//Y	XA//XB	XA//XB	XB//Y

famille B :

1	2	3	4
XA//Y	XA//XB	XA//XB	XB//Y

d) la femme 2 de la famille F2 possède les deux allèles A et B

0.5

Loi de modération

Les facteurs d'equilibres sont les variables pouvant perturber un systeme en équilibre dynamique

- La temperature
- La pression
- La concentration de l'un des constituants

1°) Influence de la pression.

- si une perturbation tend à temperature constante, à augmenter la pression d'un systeme fermé initialement en équilibre dynamique, ce systeme subit la reaction qui tend à diminuer la pression càd la réaction qui diminue le nombre de moles des corps gazeux.

exemple

soit $aA(g)+bB(g) \overset{1}{\rightleftharpoons} cC(g)+dD(g)$

variation du n(g)	si P ↗	si P ↘
• (c+d)<(a+b)	le systeme évolue dans le sens(1)	le systeme évolue sens
• (a+b)=(c+d)	La pression n'a pas d'effet sur le systéme car $n_T(g)$ ne varie pas	
• (c+d)>(a+b)	sens inverse	sens direct

Enoncé de la loi:

dans un systeme en équilibre chimique une perturbation fait varier la pression à T constante pour un systeme fermé, le systeme subit en réponse à cette perturbation la reaction qui tend à moderer la variation de la pression.

2°) Influence de la concentration

à T et P = cte, à l'equilibre la variation de la concentration de l'un des constituants déplace le systeme dans le sens qui tend à moderer cette variation.

3°) Influence de la temperature

* si une perturbation tend, sous P=cte, à élever la temperature d'un systeme fermé initialement en équilibre dynamique, ce systeme subit la transformation endothermique
* si une perturbation tend, sous pression constante, à abaisser la temperature d'un systeme fermé initialement en équilibre dynamique, ce systeme subit la transformation exothermique

Remarques:

* La temperature n'est pas un facteur d'equilibre pour toute reaction athermique (estérification - hydrolyse)
* Pour toute reaction exothermique ou endothermique la constante d'equilibre K change lorsque la temperature varie
  - sens (1) ↗ x_f ⇒ ↗ K
  - sens (2) ↘ x_f ⇒ ↘ K
* $A+B \underset{\text{endothermique}}{\overset{\text{exothermique}}{\rightleftharpoons}} C+d+\text{chaleur}$

Fin

Equilibre acide _ base

I - Définitions

* Un acide est une entité chimique, électriquement chargée ou non, capable de libérer un proton H^+ au cours d'une réaction chimique

$$\underset{\text{acide}}{AH} \rightleftharpoons \underset{\text{base conjugué}}{A^- + H^+}$$

AH/A^- : couple acide _ base

* Une base est une entité chimique électriquement chargée ou non, capable de capter un proton H^+ au cours d'une réaction chimique

$$\underset{\text{base}}{B} + H^+ \rightleftharpoons \underset{\text{acide conjugué}}{BH^+}$$

II / Loi d'action de masse

$$\text{Acide 1} + \text{base 2} \rightleftharpoons \text{base 1} + \text{acide 2}$$

$$K = \frac{[\text{base 1}]_{éq} \cdot [\text{Acide 2}]_{éq}}{[\text{Acide 1}]_{éq} \cdot [\text{base 2}]_{éq}}$$

- si $K > 1$: les entités situées à gauche sont les plus forts
  ⇒ L'acide 1 est plus fort que l'acide 2
  la base 2 est plus forte que la base 1
- si $K < 1$: les entités situées à droite sont les plus forts
  ⇒ L'acide 2 est plus fort que l'acide 1
  la base 1 est plus forte que la base 2
- si $K = 1$: L'acide 1 et l'acide 2 sont de même force, il en est de même pour la base 1 et base 2

⇒ donc L'acide le plus fort est conjugué à la base la plus faible

1°) Rt d'ionisation d'un AH dans l'eau :

$$AH + H_2O \rightleftharpoons A^- + H_3O^+$$

$$K_a = \frac{[H_3O^+][A^-]}{[AH]}$$ constante d'acidité du couple AH/A^-

par définition $pK_a = -\log K_a$

$\Leftrightarrow K_a = 10^{-pK_a}$

exemple $K_a(H_3O^+/H_2O) = 55,35$

$pK_a(H_3O^+/H_2O) = -1,74$

2°) Rt d'ionisation d'une base dans l'eau :

$$B + H_2O \rightleftharpoons BH^+ + OH^-$$

$$K_b = \frac{[OH^-][BH^+]}{[B]}$$ constante de basicité du couple BH^+/B

$pK_b = -\log K_b \Leftrightarrow K_b = 10^{-pK_b}$

exemple $K_b(H_2O/OH^-) = 55,35$

$pK_b(H_2O/OH^-) = -1,74$

3°) Relation entre Ka et Kb d'un couple AH/A⁻

pour le couple AH/A^- on a :

$$K_a = \frac{[H_3O^+][A^-]}{[AH]} \quad ; \quad K_b = \frac{[OH^-][AH]}{[A^-]}$$

$$K_a \cdot K_b = [H_3O^+] \cdot [OH^-]$$

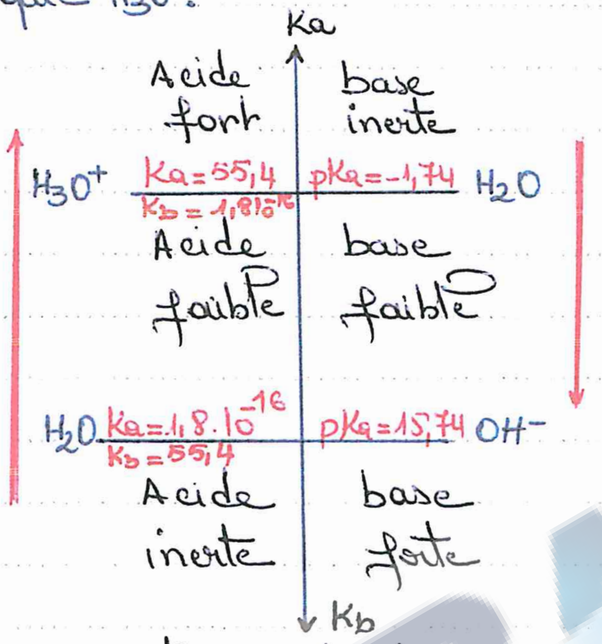
$\Rightarrow K_a \cdot K_b = K_e = 10^{-14}$ à 25°C

$\Rightarrow pK_a + pK_b = pK_e = 14$ à 25°C

4°) force des acides et des bases

- plus Ka est élevé, plus pKa est faible, plus l'acide est plus fort.
- plus Kb est élevé plus pKb est faible, plus la base est plus forte
- plus un acide est fort, plus sa base conjuguée est faible et inversement

- Un acide est dit fort est un acide plus fort que H_3O^+ ⇒ $pKa < -1,74$
- Un acide inerte est un acide nettement moins fort que H_2O ⇒ $pKa > 15,74$
- Un acide faible est un acide plus fort que H_2O, mais moins fort que H_3O^+.



III / Reáction acide_base

A_1H / A_1^- Ka_1 ; Kb_1

A_2H / A_2^- Ka_2 ; Kb_2

$$A_1H + A_2^- \rightleftharpoons A_2H + A_1^-$$

$$K = \frac{[A_2H]\cdot[A_1^-]}{[A_1H]\cdot[A_2^-]}$$

$$= \frac{[H_3O^+]\cdot[A_1^-]}{[A_1H]} \cdot \frac{[A_2H]}{[H_3O^+]\cdot[A_2^-]}$$

$$K = Ka_1 \cdot \frac{1}{Ka_2} = \frac{10^{-pKa_1}}{10^{-pKa_2}} = 10^{pKa_2 - pKa_1}$$

de même

$$K = \frac{Kb_2}{Kb_1} = \frac{10^{-pKb_2}}{10^{-pKb_1}}$$

$$K = 10^{pKb_1 - pKb_2}$$

Remarque

* si $K > 10^4$ la réaction est pratiquement totale dans le sens direct.

pH d'une solution aqueuse

Nature de la solution :

- solution acide

$[H_3O^+] > [OH^-] \Rightarrow pH < \frac{pKe}{2}$

- solution basique

$[OH^-] > [H_3O^+] \Rightarrow pH > \frac{pKe}{2}$

- solution neutre

$[OH^-] = [H_3O^+] \Rightarrow pH = \frac{pKe}{2}$

Définition

Le pH d'une solution est une grandeur strictement positive liée à la concentration de $[H_3O^+]$ par la relation

$$pH = -\log[H_3O^+] \Rightarrow [H_3O^+] = 10^{-pH}$$

I/ pH d'une solution aqueuse d'acide fort :

$$2H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + OH^-$$

$$AH + H_2O \longrightarrow H_3O^+ + A^-$$

à t=0	C	excès	$10^{-\frac{pKe}{2}}$	0	$mol\,L^{-1}$
à t_f	$C-y_f$	excès	10^{-pH}	y_f	$mol\,L^{-1}$

$* [H_3O^+] = [H_3O^+]_{eau} + [H_3O^+]_{Acide}$

$= [OH^-] + [A^-]$

$= [OH^-] + y_f$

le milieu est acide et $pH < 6 \Rightarrow$

$[OH^-] \ll [H_3O^+]$

$\Rightarrow [H_3O^+] = y_f$

$* \tau_f = \frac{y_f}{C} = \frac{[H_3O^+]}{C} = \frac{10^{-pH}}{C}$

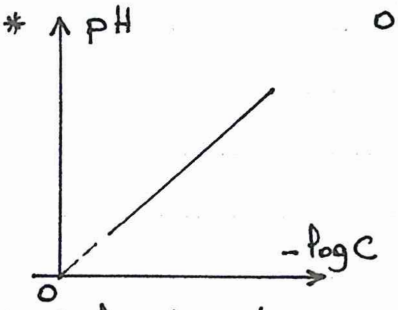
$*$ L'acide est fort : $\tau_f = 1$

$\Rightarrow \frac{10^{-pH}}{C} = 1 \Rightarrow 10^{-pH} = C$

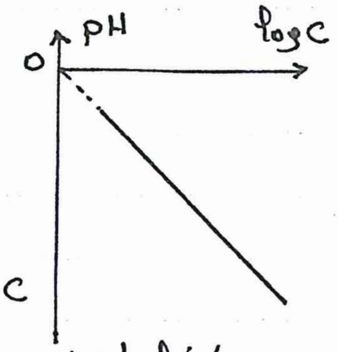
$pH = -\log C$

Acide fort : $pH = -\log C$

Remarque



droite linéaire de coeff directeur 1



droite linéaire de coeff directeur -1

$*$ La dilution

A_1H (S_1) $\begin{cases} C_1 \\ V_1 \end{cases}$ dilution 10 fois $\Rightarrow (S_2) \begin{cases} C_2 = \frac{C_1}{10} \\ V_2 = 10\,V_1 \end{cases}$

- avant dilution $pH_1 = -\log C_1$
- après dilution $pH_2 = -\log \frac{C_1}{10}$

$= -\log C_1 + \log 10$

$$pH_2 = pH_1 + 1$$

variation de pH : $\Delta pH = pH_2 - pH_1 =$

En générale après dilution n fois

$$pH_2 = pH_1 + \log n.$$

$\Rightarrow$ acide + dilution $\Rightarrow pH \nearrow (<7)$

II/ pH d'une solution d'acide faible faiblement ionisé

Acide faiblement ionisé $\Rightarrow$

$\tau_f < 5\% \Rightarrow 1 - \tau_f \simeq 1$

$$AH + H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + A^-$$

à t=0	C	excès	$10^{-\frac{pKe}{2}}$	0
à t_f	$C-y_f$	excès	10^{-pH}	y_f

$\cdot [H_3O^+] = [H_3O^+]_{eau} + [H_3O^+]_{acide}$

$= [OH^-] + [A^-]$

$= [OH^-] + y_f$

$\Rightarrow$ Le milieu est acide et $pH < 6$

$[OH^-] \ll [H_3O^+]$.

- $\tau_f = \frac{y_f}{y_m} = \frac{[H_3O^+]}{C_A} = \frac{10^{-pH}}{C_A}$

pour $\tau_f < 0{,}05 \Rightarrow$ L'acide est faiblement ionisé.

- $K_a = \frac{[H_3O^+][A^-]}{[AH]} = \frac{y_f^2}{C_A - y_f} = \frac{(C_A.\tau_f)^2}{C_A - C_A\tau_f}$

$K_a = \frac{C_A^2 \cdot \tau_f^2}{C_A(1-\tau_f)} = \frac{C_A.\tau_f^2}{1-\tau_f}$

pour un acide faiblement ionisé

$1-\tau_f \simeq 1$

$\Rightarrow K_a = C_A.\tau_f^2 = \frac{10^{-2pH}.C_A}{C_A^2}$

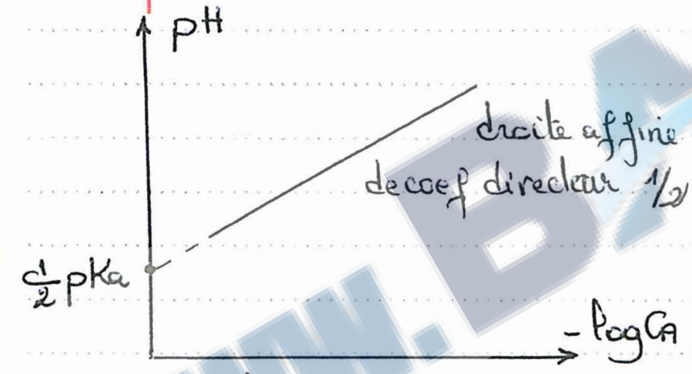
$\log K_a = -2pH - \log C_A$

$2pH = -\log K_a - \log C_A$

$\boxed{pH = \frac{1}{2}(pK_a - \log C_A)}$

pour un acide faiblement ionisé

Remarque



$pH = -\frac{1}{2}\log C_A + \frac{1}{2}pK_a$

$pH = a(-\log C_A) + b$

* La dilution

$(A_1H)\ (S_1) \begin{cases} C_1 \\ V_1 \end{cases} \xrightarrow{\text{dilution 10 fois}} \begin{cases} C_2 = \frac{C_1}{10} \\ V_2 = 10V_1 \end{cases}$

avant dilution $pH = \frac{1}{2}(pK_a - \log C_1)$

après dilution $pH' = \frac{1}{2}(pK_a - \log C_2)$

$pH' = \frac{1}{2}(pK_a - \log C_1 + \log 10)$

$pH' = \frac{1}{2}(pK_a - \log C_1) + \frac{1}{2}\log 10$

$pH' = pH + 0{,}5$

En générale après dilution n fois

$pH_2 = pH_1 + \frac{1}{2}\log n.$

$\Rightarrow$ La dilution d'un acide fort ou faible augmente son pH tout en restant inférieur à 7.

* Préparation (Protocole)

$(S_1) \begin{cases} C_1 = 0{,}1\ mol\,L^{-1} \\ AH \end{cases} \longrightarrow (S_2) \begin{cases} C_2 = 0{,}01\ mol\,L^{-1} \end{cases}$

Materiel en disposition

fioles jaugées de 20mℓ ; 50mℓ ; 100ml ; 250ml

pipettes jaugées de 1mℓ , ml , 5mℓ ; 20mℓ.

$\Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{0{,}1}{0{,}01} = 10$ fois

la solution (S_2) est 10 fois diluée

$\Rightarrow$ Materiel choisi

pipette de 5mℓ et fiole jaugée de 50mℓ

- à l'aide d'une pipette jaugée de 5mℓ, on prélève 5mℓ de la solution (S_1), que l'on introduit dans une fiole jaugée de 50mℓ, puis on ajoute de l'eau distillée jusqu'au trait de jauge tout en agitant.

III / pH d'une solution aqueuse de base forte

$$2H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^-$$

	$NaOH \longrightarrow$	Na^+	$+ OH^-$	
état t=0	C_B	0	$10^{-\frac{pKe}{2}}$	$mol.L^{-1}$
état f	$C_B - y_f$	y_f	10^{pH-pKe}	" "

$[OH^-] = \frac{Ke}{[H_3O^+]}$

$= \frac{10^{-pKe}}{10^{-pH}}$

$= 10^{pH-pKe}$

- $[OH^-] = [OH^-]_{eau} + [OH^-]_{base}$

$= [H_3O^+] + [Na^+]$

$[OH^-] = [H_3O^+] + y_f$

le milieu est basique et pour pH > 8 on a $[H_3O^+] \ll [OH^-]$

$\Rightarrow [OH^-] = y_f$ ①

- la base est forte : $C_B - y_f = 0 \Rightarrow C_B = y_f$ ②

① et ② $C_B = [OH^-]$

$C_B = 10^{pH-pKe} \Rightarrow \log C_B = pH - pKe$

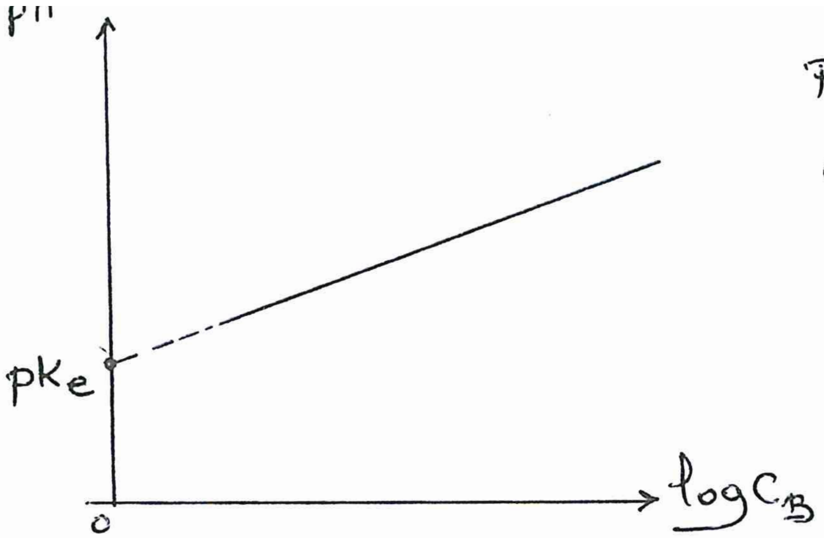
$$\boxed{pH = pKe + \log C_B}$$

Rq $B_1 \begin{cases} C_1 \\ V_{pr} \end{cases}$ pH_1 $\xrightarrow[\text{diluée n fois}]{V_{eau}}$ $B_2 \begin{cases} V_2 = n . V_{pr} \\ C_2 = \frac{C_1}{n} \end{cases}$ pH_2

- avant dilution $pH_1 = pKe + \log C_1$
- après dilution $pH_2 = pKe + \log C_2 = pKe + \log \frac{C_1}{n}$

$= \underbrace{pKe + \log C_1}\ - \log n$

$\| pH_2 = pH_1 - \log n$



$pH = f(\log C_B)$ est une droite affine de coeff directeur 1.

IV pH d'une solution aqueuse de base faible

$$2H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + OH^-$$

$$B + H_2O \rightleftharpoons BH^+ + OH^-$$

Et=0	C_B	exc	0	$10^{-\frac{pKe}{2}}$	mol.L⁻¹
Etf	$C_B - y_f$	exc	y_f	10^{pH-pKe}	" "

$$\bullet\ [OH^-] = [OH^-]_{eau} + [OH^-]_{base}$$
$$= [H_3O^+] + [BH^+]$$
$$= [H_3O^+] + y_f$$

le milieu est basique et pour pH > 8 on a $[H_3O^+] \ll [OH^-]$

$$[OH^-] = y_f$$

$$\bullet\ \tau_f = \frac{y_f}{y_m} = \frac{[OH^-]}{C_B} = \frac{10^{pH-pKe}}{C_B} \Rightarrow y_f = C_B \cdot \tau_f$$

si $\tau_f < 0{,}05$ (5%) ⇒ la base est faiblement ionisé

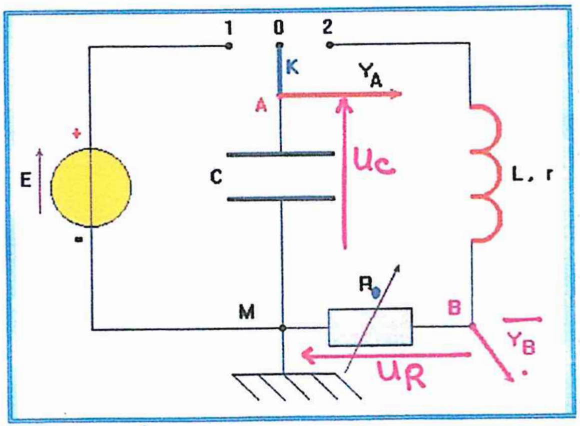
$$\bullet\ Ka = \frac{[H_3O^+][B]}{[BH^+]} = \frac{[H_3O^+]\cdot(C_B - y_f)}{y_f} = \frac{[H_3O^+]\cdot(C_B - C_B\cdot\tau_f)}{C_B\cdot\tau_f}$$

$$Ka = \frac{[H_3O^+](1-\tau_f)}{\tau_f}$$

2ᵉ approximation : la base est faiblement ionisé $\Rightarrow 1 - \tau_f \simeq 1$

Les oscillations électriques libres amorties

1) Production d'oscillations libres amorties (décharge)



- K en (1) le condensateur se charge
- K en (2) le condensateur se décharge

à $t=0$ $\begin{cases} u_C = E \\ Q_0 = C.E \\ i = 0 \end{cases}$

- la tension $u_C = \frac{q}{C}$ oscille d'où $q(t)$ oscille aussi
- la tension $u_R(t) = i(t).R$ oscille d'où $i(t)$ oscille aussi
- Au cours du temps l'amplitude des oscillations diminue : les oscillations sont dites amorties.

* libres : absence de générateur dans le circuit de décharge (oscillations qui s'effectuent d'elles mêmes sans apport d'énergie de l'extérieur).

* Les oscillations libres amorties sont pseudo-périodique de pseudo période T

* selon les valeurs de $R = R_0 + r$ on a plus R augmente plus
- le nombre d'oscillations diminue
- l'amplitude des oscillations diminue

Remarque

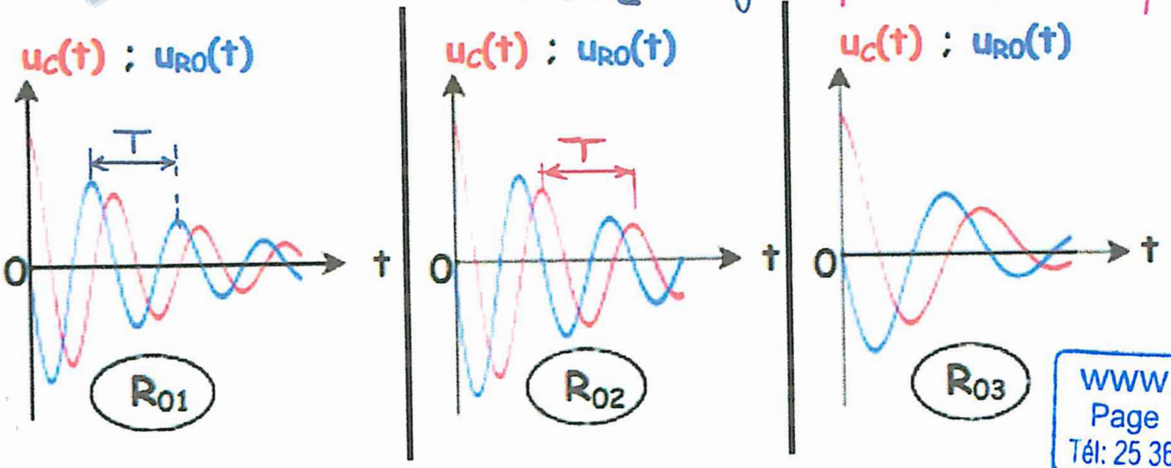
* si R_T est faible alors $T \simeq T_0$ période propre $T \simeq 2\pi\sqrt{LC}$

si L↓ ou C↓ alors T↓

* R_C : résistance critique

c'est la plus petite valeur élevée de R qui correspond à un régime apériodique

$R < R_C$: régime pseudopériodique



$R_{03} > R_{02} > R_{01}$

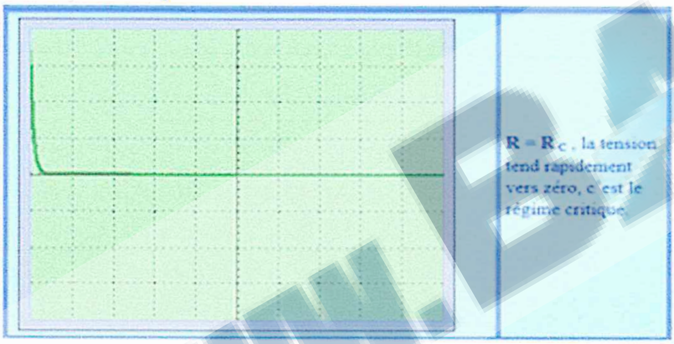
* La diminution de l'amplitude des oscillations est due à la diminution de l'énergie qui est perdue par effet joule dans le résistor.

Définition

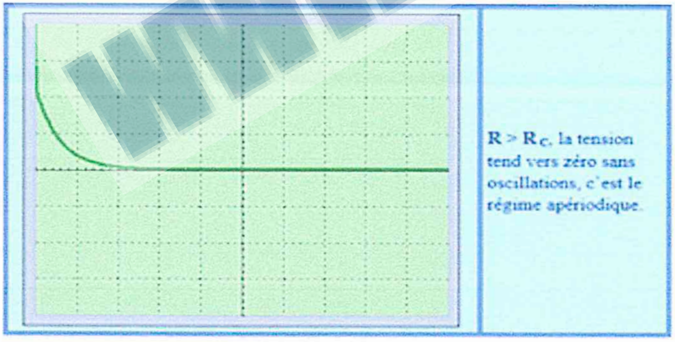
On appelle oscillations amorties les oscillations dont l'amplitude n'est pas constante, elle diminue au cours du temps.

* Pour des grandes valeurs de R c'est pour $R \geqslant R_C$

le régime devient apériodique, il n'y a plus d oscillations



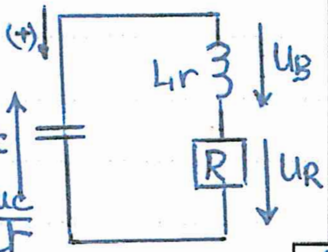
R = R$_C$, la tension tend rapidement vers zéro, c'est le régime critique.



R > R$_C$, la tension tend vers zéro sans oscillations, c'est le régime apériodique.

2°) Equation différentielle

Loi des mailles



$u_C + u_R + u_B = 0$

avec

$u_R = Ri = R\frac{dq}{dt} = RC\frac{du_C}{dt}$

* variable q(t)

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} + (R+r)\,i = 0$$

or

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

d'où $L\frac{d^2q}{dt^2} + (R+r)\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{(R+r)}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$$

* variable $u_C(t)$

$$u_C + L\frac{di}{dt} + (R+r)i = 0$$

avec

$$i = C\frac{du_C}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = C\frac{d^2u_C}{dt^2}$$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + (R+r)C\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \left(\frac{R+r}{L}\right)\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = 0$$

* variable i(t)

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} + (R+r)\,i = 0$$

en dérive par rapport au temps

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + (R+r)\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{R+r}{L}\right)\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}\,i = 0$$

* variable $u_R(t)$

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} + (R+r)i = 0$$

on dérive par rapport au temps

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + (R+r)\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = 0$$

or $i = \frac{u_R}{R} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{R}\frac{du_R}{dt}$

$$\frac{d^2i}{dt^2} = \frac{1}{R}\frac{d^2u_R}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{R}\frac{d^2u_R}{dt^2} + \left(\frac{R+r}{R}\right)\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC}u_R = 0$$

$$\frac{d^2u_R}{dt^2} + \left(\frac{R+r}{L}\right)\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{LC}u_R = 0$$

3°) Energie Totale de L'oscillateur

. Energie emmagasinée par la bobine

$$E_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\frac{L}{R^2}u_R^2$$

. Energie emmagasinée par le condensateur

$$E_c = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}C.u_C^2$$

. Energie électromagnétique

$* \; E = E_C + E_L$

$$E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$$

$$* \; E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}L\left(\frac{dq}{dt}\right)^2$$

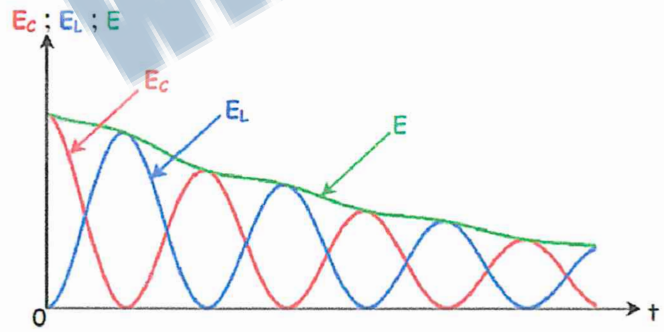
avec

$\frac{dq}{dt}$: représente le coefficient directeur de la tg à la courbe $q = f(t)$ à l'instant t choisi

$$* \; E = \frac{1}{2}C u_C^2 + \frac{1}{2}LC^2\left(\frac{du_C}{dt}\right)^2$$

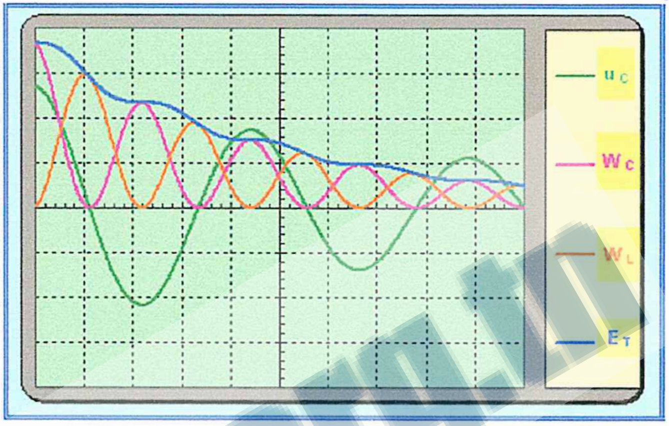
avec

$\frac{du_C}{dt}$: représente le coefficient directeur de la tg à la courbe $u_C = f(t)$ à L'instant t choisi



. L'energie totale décroit en fonction du temps, elle se dissipe par effet joule dans le resistor. En regime pseudopériodique ; la décharge est oscillante, il y a transfert d'énergie du condensateur vers la bobine et réciproquement de façon alternative.

En regime apériodique, il y a seulement transfert du condensateur vers la bobine lors de la décharge.



4°) La non conservation de L'energie totale du circuit RLC

$$\cdot \; \frac{d}{dt}(q^2) = 2q\frac{dq}{dt}$$

$$\cdot \; \frac{d}{dt}(i^2) = 2i\frac{di}{dt}$$

$$E = \frac{1}{2C}q^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2C}2q\frac{dq}{dt} + \frac{1}{2}L\,2i\frac{di}{dt}$$

$$= i\left(\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt}\right)$$

d'après L'eq diff :

$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = -(R+r)\,i$$

donc $\frac{dE}{dt} = -(R+r)i^2 \neq 0$

. L'energie de L'oscillateur n'est pas constante

. $\frac{dE}{dt} < 0$: L'energie de L'oscillateur

diminue au cours du temps.
(le système est non conservatif)

Remarques

* $E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}L i^2$

- si $|i|$ est max alors $|u_R|$ est max
  $\Rightarrow q = 0$ et $u_C = 0$
  $E = \frac{1}{2}L i^2 = E_L$

L'energie de L'oscillateur est purement magnétique

- si $|q|$ est max alors $|u_C|$ est max
  $\Rightarrow i = 0$ et $u_R = 0$
  $\Rightarrow E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = E_C$

L'énergie de L'oscillateur est purement électrique

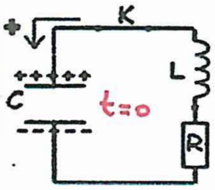
*. $\left|\frac{dE}{dt}\right| = (R+r)i^2$ puissance instantanée dissipée par effet joule dans la résistance totale du circuit

. $\frac{|\Delta E|}{\Delta t} = P_{moy}$ dissipée par effet joule dans le circuit

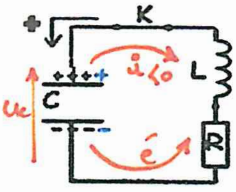
Remarque

Pour expliquer les oscillations, associer les circuits suivants aux instants ou aux intervalles de temps correspondants

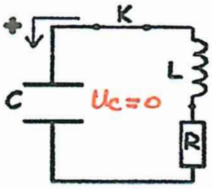
t = 0 ; t∈] 0,T/4 [; t = T/4 ; t∈] T/4, T/2 [; t = T/2



Circuit 1

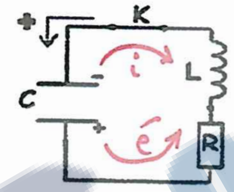


Circuit 2

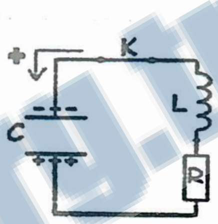


Circuit 3

$t = 0$	$t \in]0, \frac{T}{4}[$	$t = \frac{T}{4}$
. $U_{C\,max}$	$u_C > 0$ mais ↓	$u_C = 0$
. $i = 0$	$i = C\frac{du_C}{dt} < 0$ car $\frac{du_C}{dt}$ diminue	$i = -I_{max}$



Circuit 4



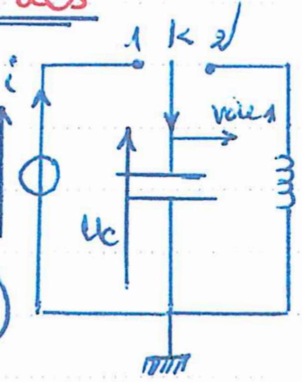
Circuit 5

$t \in]\frac{T}{4}; \frac{T}{2}[$	$t = \frac{T}{2}$
$u_C < 0$ mais $|u_C|$ ↑	$u_C = -U_{C\,max}$
$i = C\frac{du_C}{dt} < 0$	$i = 0$

Fin

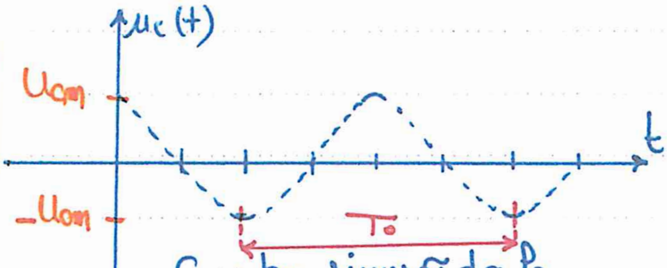
Les oscillations libres non amorties

* **K en 1** : Le Condensateur se charge instantanement (car Δt = 5τ = 5RC → 0)



* **K en 2** :

à t = 0 $\begin{cases} u_C = E \\ i = 0 \Rightarrow u_R = 0 \end{cases}$



Courbe sinusoïdale

1°) Equation differentielle

* Loi des mailles

$u_C + u_L = 0$ or $u_C = \frac{q}{C}$

$u_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$

$\Rightarrow \frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0 \quad (I)$$

Eq diff d'un circuit LC en regime sinusoïdal

* $u_C + L\frac{di}{dt} = 0$ or $i = C\frac{du_C}{dt}$

$\frac{di}{dt} = C.\frac{d^2u_C}{dt^2}$

$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{u_C}{LC} = 0$$

* $\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$ or $i = \frac{dq}{dt}$

en dérive par rapport au temps

$L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = 0$

$L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C}i = 0$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{LC} = 0$$

*

$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{u_C}{LC} = 0.$

or $u_C = -u_L$

d'ou $\frac{d^2}{dt^2}(-u_L) - \frac{u_L}{LC} = 0$

$$\frac{d^2u_L}{dt^2} + \frac{u_L}{LC} = 0$$

* pulsation propre : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (rad s⁻¹)

* période propre : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ (s)

* fréquence propre :

$N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L.C}}$ (Hz)

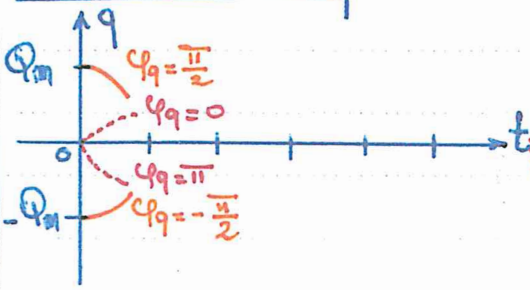
$\omega_0 = 2\pi N_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$

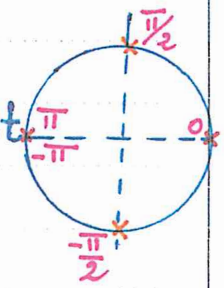
* L'equation diff (I) a pour solution :

$q(t) = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_q)$

avec
- Q_m : amplitude des oscillations
- φ_q : phase initiale
- $-Q_m \leqslant q(t) \leqslant Q_m$
- $-\pi < \varphi \leq \pi$

Determination de φ_q





* Expression de i(t).

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$= \omega_0 . Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_q)$$

$$= \omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_q + \frac{\pi}{2})$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi_i)$$

$$\begin{cases} I_m = \omega_0 Q_m \\ \varphi_i = \varphi_q + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

i(t) est en quadrature avance de phase par rapport à q(t).

* Expression de uc(t)

$$u_c(t) = \frac{q(t)}{C}$$

$$= \frac{Q_m}{C} \sin(\omega_0 t + \varphi_q)$$

$$u_c(t) = U_{cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{uc})$$

$$\begin{cases} U_{cm} = \frac{Q_m}{C} \\ \varphi_{uc} = \varphi_q \end{cases}$$

uc(t) et q(t) sont en phase.

* Expression de Ub(t)

$$U_b(t) = L\frac{di}{dt} = -u_c(t).$$

$$= -U_{cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{uc})$$

$$= U_{cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{uc} + \pi)$$

$$U_b(t) = U_{bm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{ub})$$

$$\begin{cases} U_{cm} = U_{bm} \\ \varphi_{ub} = \varphi_{uc} + \pi \end{cases}$$

uc(t) et ub(t) sont en opposition de phase

* Energie électromagnétique (Total)

$$E = E_C + E_L$$

$$= \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2$$

* energie électrostatique :

$$E_C = \frac{1}{2C} Q_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_q)$$

$$E_C = \frac{Q_m^2}{2C}\left(\frac{1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_q)}{2}\right)$$

⇒ Ec est une fonction periodique non sinusoïdale de periode T ?

$$\omega_{E_C} = 2\omega_0$$

$$\frac{2\pi}{T} = 2 . \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T = \frac{T_0}{2}$$

* energie magnétique :

$$E_L = \frac{1}{2} L i^2$$

$$= \frac{1}{2} L \omega_0^2 Q_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_q)$$

$$= \frac{1}{2} L \omega_0^2 Q_m^2 \left(\frac{1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_q)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} L \omega_0^2 Q_m^2 \left(1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_q)\right)$$

⇒ EL est une fonction periodique non sinusoïdale de periode $T = \frac{T_0}{2}$

* energie électromagnétique :

$$E = \frac{1}{2C} Q_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_q) + \frac{1}{2} L \omega_0^2 Q_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_q)$$

or $L\omega_0^2 = \frac{1}{C}$

$$\text{d'où } E = \frac{1}{2C} Q_m^2 \left(\underbrace{\sin^2(\omega_0 t + \varphi_q) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_q)}_{1}\right)$$

$$E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C} = \frac{1}{2} C U_{cm}^2 = \frac{1}{2} L I_m^2 .$$

$$= \text{constante}$$

2e Methode pour Montrer que E = cte

$$E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2C} 2q \frac{dq}{dt} + \frac{1}{2} L \, 2i \frac{di}{dt}$$

$$= i\underbrace{\left(\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt}\right)}_{0 \text{ Eq diff}} = 0$$

d'où E = cte

$$E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C} = \frac{1}{2} C U_{cm}^2 = \frac{1}{2} L I_m^2$$

* Relation indépendante du temps entre i(t) et q(t).

1ère méthode

- $q(t) = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_q)$
- $i(t) = \frac{dq}{dt}$

$= \omega_0 Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_q)$

$\Rightarrow \sin(\omega_0 t + \varphi_q) = \frac{q(t)}{Q_m}$

$\cos(\omega_0 t + \varphi_q) = \frac{i}{\omega_0 . Q_m}$

$$\underbrace{\sin^2(\omega_0 t+\varphi_q) + \cos^2(\omega_0 t+\varphi_q)}_{1} = \frac{q^2}{Q_m^2} + \frac{i^2}{\omega_0^2 . Q_m^2}$$

$$\frac{q^2}{Q_m^2} + \frac{i^2}{\omega_0^2 . Q_m^2} = 1$$

$$q^2 = -\frac{1}{\omega_0^2} i^2 + Q_m^2$$

de la forme $q^2 = a.i^2 + b$

$I_m^2 = Q_m^2 . \omega_0^2$

2ème méthode

$$E = E_C + E_L = \text{cte}$$

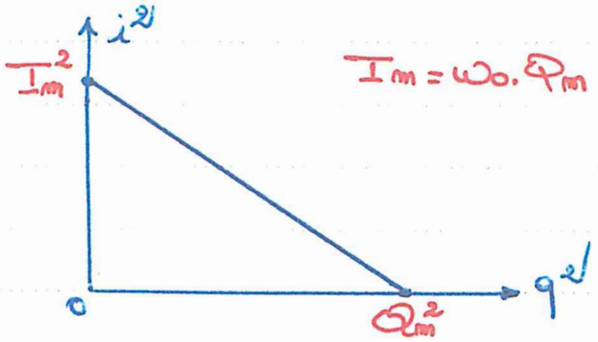
$$\cancel{\frac{1}{2}} \frac{Q_m^2}{C} = \cancel{\frac{1}{2}} \frac{q^2}{C} + \cancel{\frac{1}{2}} L i^2$$

$$i^2 = \frac{Q_m^2}{LC} - \frac{q^2}{LC}$$

or $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ d'où

$$i^2 = -\omega_0^2 q^2 + \omega_0^2 Q_m^2$$

de la forme $i^2 = a q^2 + b$



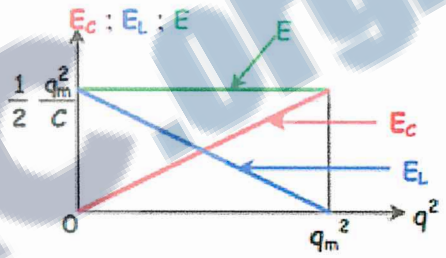
$I_m = \omega_0 . Q_m$

* Courbe $E = f(q^2)$; $E_C = f(q^2)$; $E_L = f(q^2)$

- $E_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$; $E_C = f(q^2)$ est une droite linéaire de coef directeur $\frac{1}{2C}$

q	0	$\pm Q_m$
E_C	0	$\frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C}$

- $E_L = E - E_C = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C} - \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$ droite affine de coef directeur $-\frac{1}{2C}$

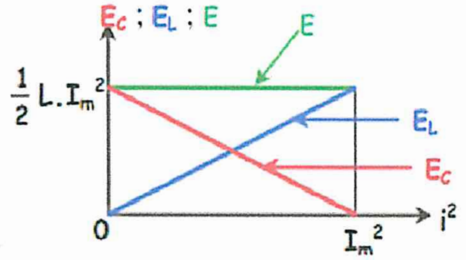


* Courbe $E = f(i^2)$; $E_C = f(i^2)$; $E_L = f(i^2)$

$E_L = \frac{1}{2} L i^2$

$E_C = E - E_L = \frac{1}{2} L I_m^2 - \frac{1}{2} L i^2$

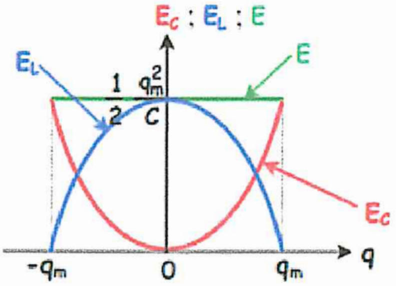
$E = \text{cte} = \frac{1}{2} L I_m^2$



* Courbe $E_C = f(q)$; $E_L = f(q)$; $E = f(q)$

- $E_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$: $E_C = f(q)$ parabole de concavité dirigée vers le haut de sommet S(0,0)
- $E_L = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C} - \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$; $E_L = f(q)$ parabole

de concavité dirigée vers le bas et de sommet $(0, E)$

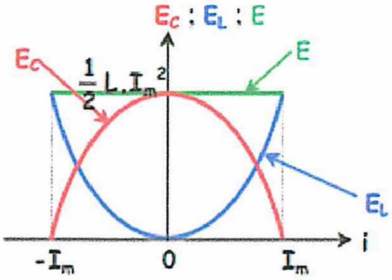


* Courbe $E_c = f(i)$; $E_L = f(i)$; $E = f(i)$

$E_c = E - \frac{1}{2}Li^2$

$E_L = \frac{1}{2}Li^2$

$E = \frac{1}{2}LI_m^2 = cte$

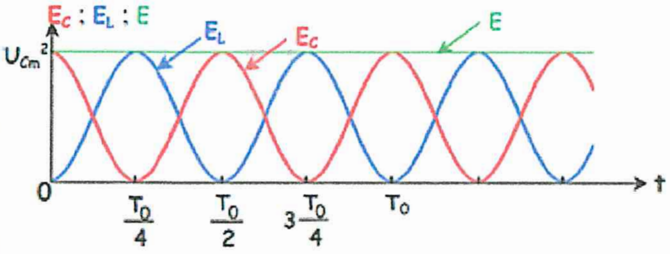


* Courbe $E_c = f(t)$; $E_L = f(t)$ et $E = f(t)$

$E_c = \frac{1}{2C}Q_m^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi_q\right)$; $\varphi_q = \frac{\pi}{2}$

$E_L = \frac{1}{2}L\omega_0^2 Q_m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi_q\right)$

$E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C} = \frac{1}{2}LI_m^2 = cte$



Remarque

1°/ Si $E = cte$ alors on peut determiner l'equation differentielle par methode energetique :

$E = E_C + E_L = \frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}LC^2\left(\frac{du_c}{dt}\right)^2$

$\frac{dE}{dt} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}C2u_c\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{2}LC^2 2.\frac{du_c}{dt}.\frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$

$C\frac{du_c}{dt}\left(u_c + LC\frac{d^2u_c}{dt^2}\right) = 0$

d'où $LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + u_c = 0$

$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{u_c}{LC} = 0$

2°/ * $i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \varphi_i = \varphi_q + \frac{\pi}{2}$

i est en quadrature avance de phase par rapport à $q(t)$

* $i = C\frac{du_c}{dt} \Rightarrow \varphi_i = \varphi_{u_c} + \frac{\pi}{2}$

u_c est en quadrature retard de phase par rapport à $i(t)$

* $u_c = \frac{q}{C} \Rightarrow \varphi_{u_c} = \varphi_q$

$u_c(t)$ et $q(t)$ sont en phase

* $u_L = -u_c \Rightarrow \varphi_{u_L} = \varphi_{u_c} + \pi$

u_L et u_c sont en opposition de phase.

$\Rightarrow$ Derivé on ajoute $+\frac{\pi}{2}$

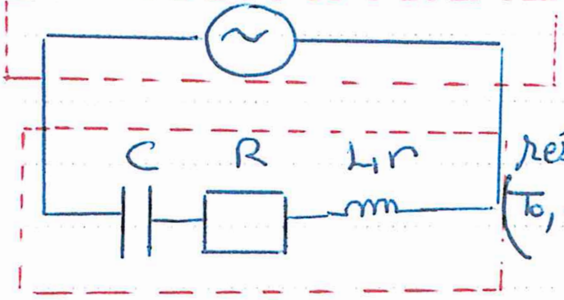
$\Rightarrow$ primitive on retranche $-\frac{\pi}{2}$

Fin

Les oscillations électriques forcées

*

GBF : excitateur (T, N, ω)



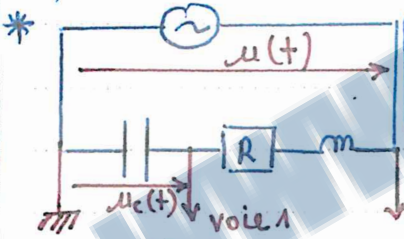
résonateur (T_0, N_0, ω_0)

$$\text{excitateur} \xrightarrow[\text{Energie}]{\text{energie}} \text{résonateur}$$

* oscillations forcées ?

Le résonateur $(u_R(t))$ oscille avec la fréquence imposée par le GBF $(u(t))$ $(N \neq N_0)$ donc les oscillations sont forcées.

*



$\forall N$, $u(t)$ est toujours en avance de phase par rapport à $u_C(t)$.

Démonstration

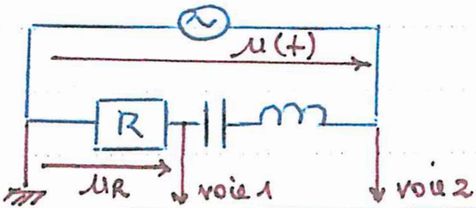
$-\frac{\pi}{2} < \varphi_u - \varphi_i < \frac{\pi}{2}$ or $\varphi_i = \varphi_{u_C} + \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} < \varphi_u - \varphi_{u_C} - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$

$0 < \varphi_u - \varphi_{u_C} < \pi$ d'où $\varphi_u - \varphi_{u_C} > 0$

$\Rightarrow \varphi_u > \varphi_{u_C}$

*



3 cas se présente :

- si $N < N_0$: $u_R(t)$ est en avance de phase par rapport à $u(t)$.
  or $u_R(t)$ et $i(t)$ sont en phase
  d'où $i(t)$ est en avance de phase par rapport à $u(t)$
- si $N = N_0$
  $i(t)$ et $u(t)$ sont en phase
- si $N > N_0$
  $u(t)$ est en avance de phase par rapport à $i(t)$.

$\Rightarrow \forall N$ $U_m > U_{Rm}$

Démonstration

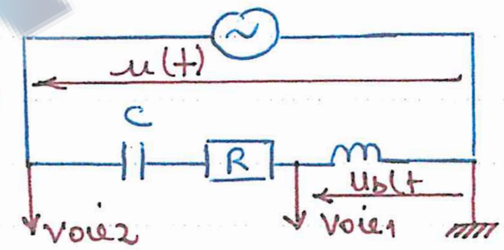
on a $Z = \sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} > R$

$Z \cdot I_{max} > R \cdot I_{max}$

$U_{max} > U_{R\,max}$.

la courbe dont l'amplitude la plus élevée $u(t)$.

*



$\forall N$; $u_b(t)$ et $u_L(t)$ sont toujours en avance de phase par rapport à $u(t)$.

Démonstration

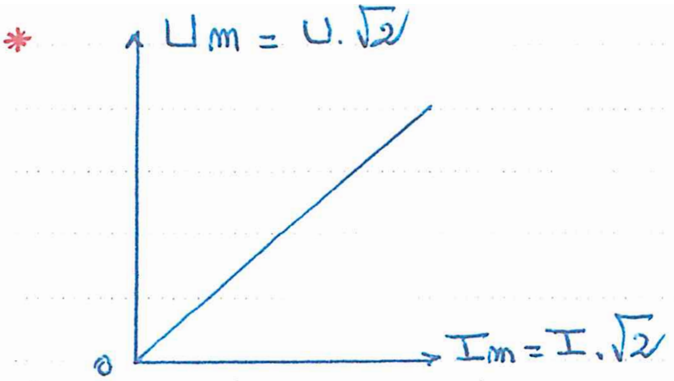
$-\frac{\pi}{2} < \varphi_u - \varphi_i < \frac{\pi}{2}$ or $\varphi_{u_L} = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} < \varphi_u - (\varphi_{u_L} - \frac{\pi}{2}) < \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} < \varphi_u - \varphi_{u_L} + \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$

$-\pi < \varphi_u - \varphi_{u_L} < 0$

d'où $\varphi_{u_L} > \varphi_u$.

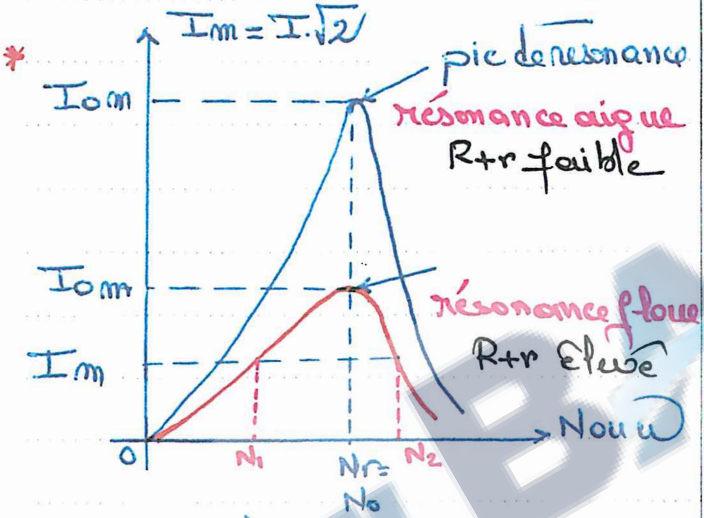


La courbe a pour équation

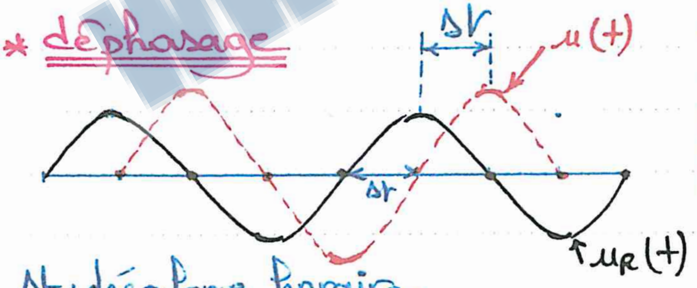
$U_m = Z.I_m$ avec Z: impédance du circuit RLC
(V) (Ω) (A)

U: tension efficace mesurée par —Ⓥ—

I: intensité efficace mesurée par —Ⓐ—



pour toute valeur de $I_m \neq I_{0m}$ on a : $N_1 . N_2 = N_0^2$



Δt : décalage horaire

déphasage: $|\Delta\varphi| = \omega . \Delta t$

- $u_R(t)$ est en avance de phase par rapport à u(t).

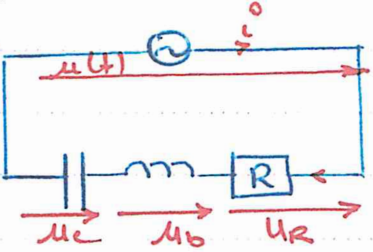
$\Rightarrow \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\omega.\Delta t = -\frac{2\pi}{T}.\frac{T}{4}$

$\Rightarrow \Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_u = \omega.\Delta t = \frac{2\pi}{T}.\frac{T}{4}$

Equation différentielle

Loi des mailles

$u_b + u_R + u_c - u = 0$



$L\frac{di}{dt} + (r+R)i + \frac{q}{C} = u(t)$ or $i = \frac{dq}{dt}$

$q = \int i dt$

$L\frac{di}{dt} + (r+R)i + \frac{1}{C}\int i dt = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$

$\Rightarrow$ L'équation différentielle a pour solution

$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$

cherchons I_m ? et φ_i ?

* vecteurs de Fresnel:

- $(R+r)i = (R+r)I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$

$\longrightarrow \vec{V_1} \begin{cases} (R+r)I_m \\ \varphi_i \end{cases}$

- $L\frac{di}{dt} = L\omega I_m \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2})$

$\longrightarrow \vec{V_2} \begin{cases} L\omega I_m \\ \varphi_i + \frac{\pi}{2} \end{cases}$

- $\frac{1}{C}\int i dt = \frac{1}{C\omega} I_m \sin(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2})$

$\longrightarrow \vec{V_3} \begin{cases} \frac{I_m}{C\omega} \\ \varphi_i - \frac{\pi}{2} \end{cases}$

- $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$

$\longrightarrow \vec{V} \begin{cases} U_m \\ \varphi_u \end{cases}$ telle que $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3}$

$\vec{V_1} \perp \vec{V_2}$ et $\underbrace{\vec{V_2} \parallel \vec{V_3}}_{\text{3 cas se présente}}$

$\vec{V_1} \perp \vec{V_3}$

* construction de Fresnel

Comparons $L\omega$ et $\frac{1}{C\omega}$

ou ω et ω_0

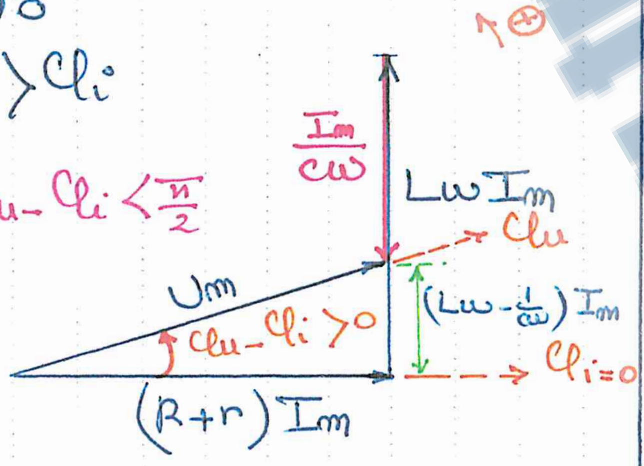
ou N et N_0 ou φ_u et φ_i

1er Cas . si $L\omega > \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \omega > \omega_0$

$N > N_0$

. $\varphi_u > \varphi_i$

$0 < \varphi_u - \varphi_i < \frac{\pi}{2}$



Le circuit est inductif

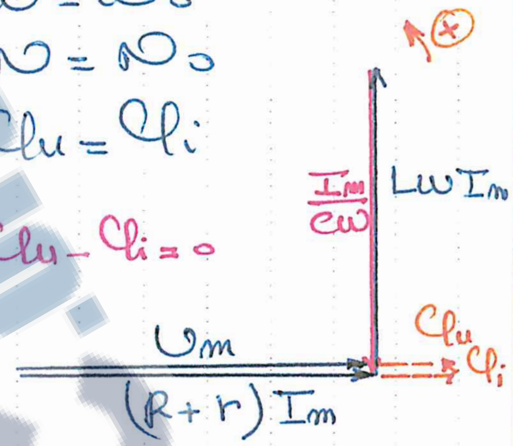
2e Cas . $L\omega = \frac{1}{C\omega}$

. $\omega = \omega_0$

. $N = N_0$

. $\varphi_u = \varphi_i$

$\varphi_u - \varphi_i = 0$



Le circuit est résistif

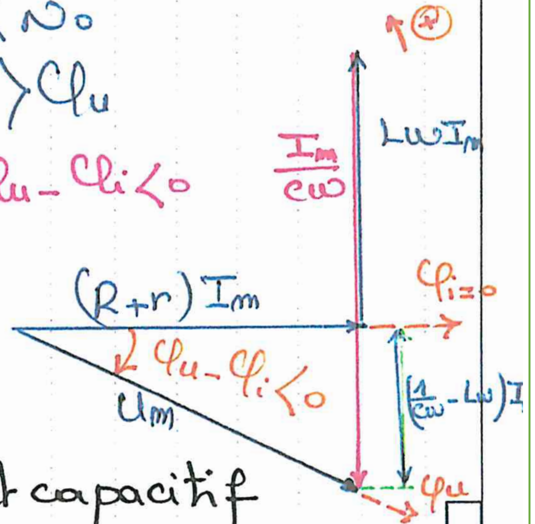
3e Cas . $\frac{1}{C\omega} > L\omega$

. $\omega < \omega_0$

. $N < N_0$

. $\varphi_i > \varphi_u$

$-\frac{\pi}{2} < \varphi_u - \varphi_i < 0$



circuit capacitif

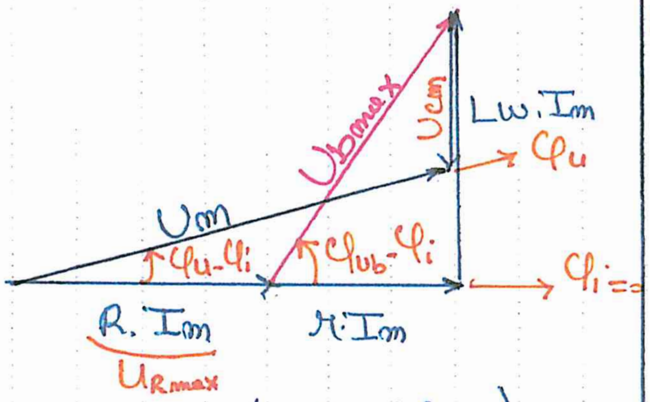
Construction de Fresnel relatif aux tensions maximales

U_{Rmax}

U_{Cmax}

U_{bmax}

U_{max}



$u_b(t) = U_{bm} \sin(\omega t + \varphi_{ub})$

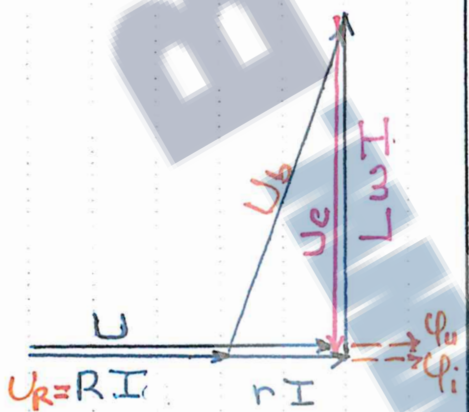
relatif aux tensions efficaces

U_R

U_C

U_b

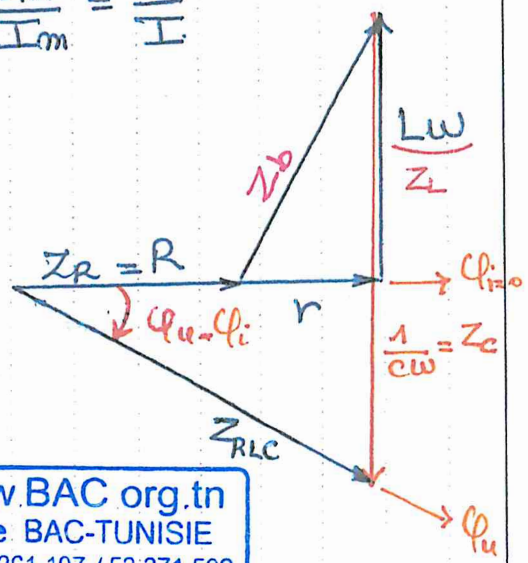
U



$-\frac{\pi}{2} < \varphi_u - \varphi_i < \frac{\pi}{2}$

relatif aux impédances

$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}$



Exemple 1

. on donne :

$u(t) = 3\sin(100\pi t)$

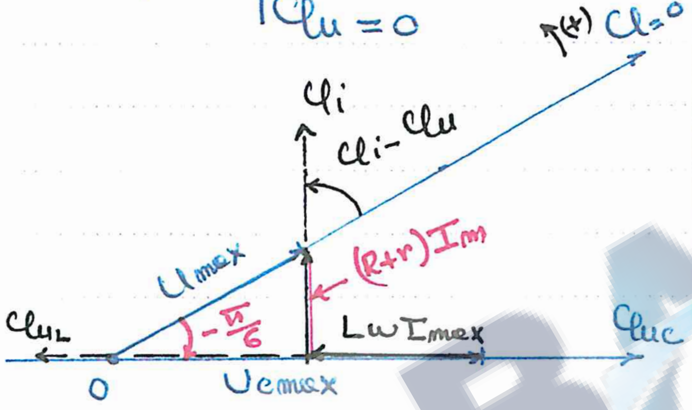
$u_C(t) = 6\sin(100\pi t - \frac{\pi}{6})$

faire la construction de Fresnel relative aux tension maximales

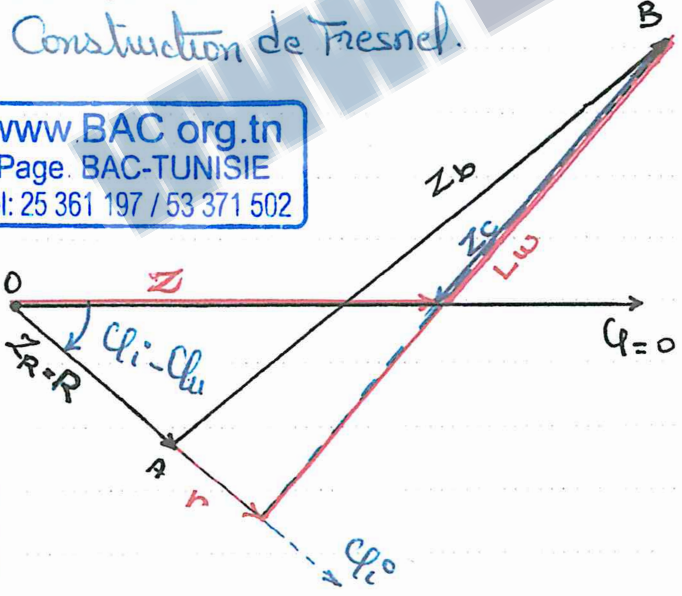
Echelle 1V ⟶ 1cm

$\cdot\, u_C(t) \longrightarrow \begin{cases} U_{Cm} = \frac{I_m}{C\omega} = 6V \longrightarrow 6cm \\ \varphi_{uC} = \varphi_i - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6}\,rad \end{cases}$

$\cdot\, u(t) \longrightarrow \begin{cases} U_m = 3V \longrightarrow 3cm \\ \varphi_u = 0 \end{cases}$



Exemple 2. Completer la Construction de Fresnel.



Remarque

N < No	N = No	N > No	N
$\varphi_u < \varphi_i$	$\varphi_u = \varphi_i$	$\varphi_u > \varphi_i$	
$L\omega < \frac{1}{C\omega}$	$L\omega = \frac{1}{C\omega}$	$L\omega > \frac{1}{C\omega}$	
C	R	I	

Determination de Imax :

D'après Pythagore 1er ou 3e Cas

$$U_m^2 = (R+r)^2 I_m^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2 . I_m^2$$

$$= I_m^2 \left((R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2\right)$$

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} = \frac{U_m}{Z}$$

avec

$$Z = \sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$$

. Determination de φ_i

$$\cdot\, tg(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R+r} = \frac{Z_L - Z_C}{R+r}$$

$$\cdot\, tg(\varphi_i - \varphi_u) = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R+r} = \frac{Z_C - Z_L}{R+r}$$

$$\cdot\, \cos(\varphi_u - \varphi_i) = \cos(\varphi_i - \varphi_i)$$

$$= \frac{(R+r)\,I_m}{U_m}$$

$$= \frac{(R+r)\,I}{U}$$

$$= \frac{(R+r)}{Z}$$

facteur de puissance

Remarque

$\cdot\, U_m = Z.I_m = \sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}\, I_m$

$\Rightarrow U_{Cm} = Z_C . I_m$ avec $Z_C = \frac{1}{C\omega}$

$\Rightarrow U_{bm} = Z_b . I_m$ avec $Z_b = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2}$

$\Rightarrow U_{Lm} = Z_L . I_m$ avec $Z_L = L\omega$

$\Rightarrow U_{bCm} = Z_{bC} . I_m$ avec $Z_{bC} = \sqrt{r^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$

$\Rightarrow U_{RCm} = Z_{RC} . I_m$ avec $Z_{RC} = \sqrt{R^2 + (\frac{1}{C\omega})^2}$

Resónance d'intensité

Def: à la résónance d'intensité I_m passe par son max I_{om}.

Conséquence

$$I_m = \frac{\overset{cte\ \forall N}{U_m}}{\sqrt{(R+r)^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}}$$

$\Rightarrow$ Z est minimale

$\Rightarrow$ $Z_{min} = R+r$: le circuit est résistif

$\Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$

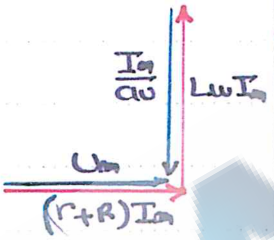
* $L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow LC\omega^2 = 1$

$\Rightarrow U_m = (R+r)I_{om}$

$\Rightarrow \omega = \omega_0$

$\Rightarrow N = N_0$

* $\Rightarrow \varphi_u = \varphi_i$



u(t) et i(t) sont en phase

$\Rightarrow \varphi_u = \varphi_i$ or $\varphi_i = \varphi_{uc} + \frac{\pi}{2}$

$\varphi_u = \varphi_{uc} + \frac{\pi}{2}$

u(t) est en quadrature avance de phase par rapport à $u_c(t)$.

$\Rightarrow \varphi_u = \varphi_i$; $u_L = L\frac{di}{dt}$

$\varphi_{u_L} = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$

$\varphi_u = \varphi_{u_L} - \frac{\pi}{2}$

u(t) est en quadrature retard de phase par rapport à $u_L(t)$.

* $U(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$

$= (R+r)I_{om} \sin(\omega_0 t + \varphi_i)$

$u(t) = (R+r)\,i(t)$

* L'equation diff:

$L\frac{di}{dt} + (R+r)i + \frac{q}{C} = u(t)$

$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$ or $i = \frac{dq}{dt}$

$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$

à la resónance d'intensité le circuit se comporte comme un circuit LC

* Mq L'energie est constante et calculer sa valeur.

$E = E_C + E_L$

$= \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$

$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2C}2q\frac{dq}{dt} + \frac{1}{2}L\,2i\frac{di}{dt}$

$= i\left(\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt}\right)$

$= i\left(u(t) - (R+r)i\right)$

or $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$

$= (R+r)I_{om} \sin(\omega_0 t + \varphi_i)$

$u(t) = (R+r)\,i(t)$

d'où $\frac{dE}{dt} = 0$ donc E = Constante

(AN) $E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C} = \frac{1}{2}C\,U_{cm}^2$

$E = \frac{1}{2}L I_{om}^2$

• Le facteur de Qualité ou le coefficient de surtension

(à la résonance d'intensité)

$$Q = \frac{U_{Cmax}}{U_{max}} = \frac{U_{Lmax}}{U_{max}} = \frac{1}{(R+r)\omega_0 C}$$

$$= \frac{L\omega_0}{R+r} = \frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

• Si $Q<1$: pas de surtension

• Si $Q>1 \Rightarrow U_{cm} > U_{max}$: il y a phénomène de surtension aux bornes du condensateur.

• La puissance moyenne

• $P_{moy} = U.I.\cos(\varphi_u - \varphi_i)$

• $P_{moy} = (R+r)I^2$
(watt)

or $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ et $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

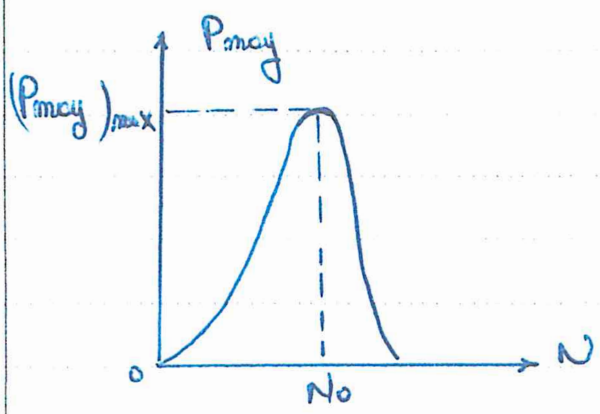
sig $P_{moy} = \frac{1}{2} U_m . I_m \cos(\varphi_u - \varphi_i)$

$P_{moy} = \frac{1}{2}(R+r) I_m^2$

Remarque

$P_{moy} = \frac{1}{2}(R+r) I_m^2$

à la résonance d'intensité I_m passe par son maximum or P_{moy} et I_m^2 sont proportionnelle donc P_{moy} passe aussi par son maximum : c'est la résonance de puissance



Montrons que lorsque R augmente alors $(P_{moy})_{max}$ diminue ?

$(P_{moy})_{max} = \frac{1}{2}(R+r) I_{om}^2$

or

$U_m = (R+r) I_{om} \Rightarrow I_{om} = \frac{U_m}{R+r}$

$(P_{moy})_{max} = \frac{1}{2}(R+r) . \frac{U_m^2}{(R+r)^2}$

$= \frac{1}{2} \frac{U_m^2 \leftarrow cte}{(R+r)}$

donc lorsque R augmente alors $P_{moy\,max}$ diminue

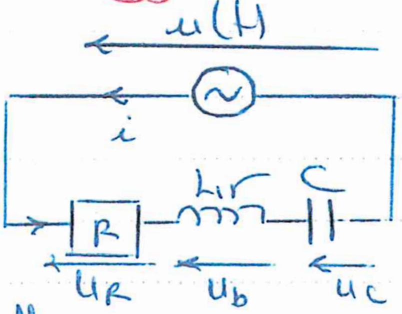
Energie dissipée

$E_d = P_{moy} . t$
(j) (watt) (s)

Fin

Résonance de charge

1°) Equation différentielle



Loi des mailles

$u_b+u_R+u_C-u=0$

$L\frac{di}{dt}+ri+Ri+\frac{q}{C}=u(t)$

or $i=\frac{dq}{dt}$

$L\frac{d^2q}{dt^2}+(R+r)\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=U_m\sin(\omega t+\varphi_u)$

L'eq diff a pour solution

$q(t)=Q_m\sin(\omega t+\varphi_q)$

Vecteurs de Fresnel

• $\frac{q}{C}=\frac{1}{C}Q_m\sin(\omega t+\varphi_q)$

$\rightarrow \vec{V_1}\begin{cases}\frac{Q_m}{C}\\ \varphi_q\end{cases}$

• $(R+r)\frac{dq}{dt}=(R+r)\omega Q_m\sin(\omega t+\varphi_q+\frac{\pi}{2})$

$\rightarrow \vec{V_2}\begin{cases}(R+r)\omega.Q_m\\ \varphi_q+\frac{\pi}{2}\end{cases}$

• $L\frac{d^2q}{dt^2}=L\omega^2Q_m\sin(\omega t+\varphi_q+\pi)$

$\rightarrow \vec{V_3}\begin{cases}L\omega^2Q_m\\ \varphi_q+\pi\end{cases}$

• $u(t)=U_m\sin(\omega t+\varphi_u)$

$\rightarrow \vec{V}\begin{cases}U_m\\ \varphi_u\end{cases}$ / $\vec{V}=\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3}$

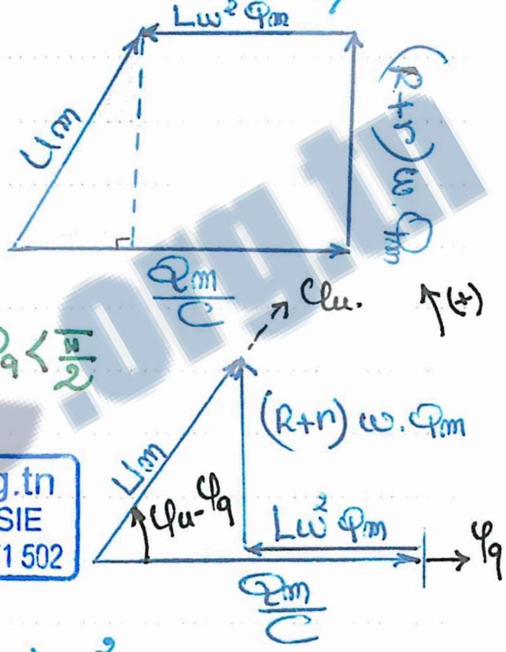
$\Rightarrow \vec{V_1}\perp\vec{V_2}$; $\vec{V_2}\perp\vec{V_3}$

et $\vec{V_1}$ et $\vec{V_3}$ sont ∥ de sens contraire

Construction de Fresnel

• Si $\frac{1}{C}>L\omega^2$ ou $\omega_0>\omega$ ou $N_0>N$

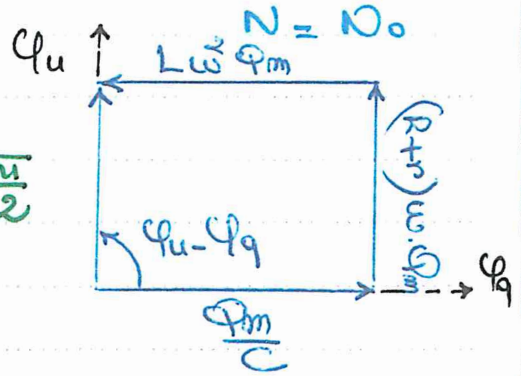
1er Cas



$0<\varphi_u-\varphi_q<\frac{\pi}{2}$

• Si $\frac{1}{C}=L\omega^2$ ou $\omega=\omega_0$ $N=N_0$

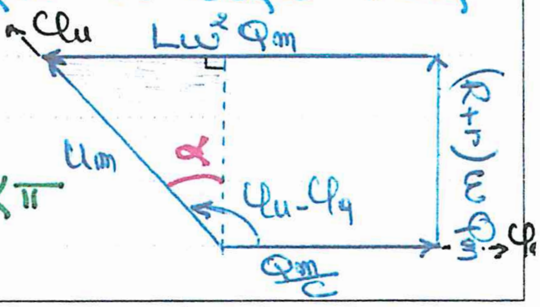
2ème Cas



$\varphi_u-\varphi_q=\frac{\pi}{2}$

• Si $\frac{1}{C}<L\omega^2$ ou $\omega_0<\omega$ ou $N_0<N$

3ème Cas



$\frac{\pi}{2}<\varphi_u-\varphi_q<\pi$

⇒ $0 < \varphi_u - \varphi_q < \pi$

⇒ $u(t)$ est toujours en avance de phase par rapport à $q(t)$

⇒ $u(t)$ est toujours en avance de phase par rapport à $u_c(t)$

Expression de Q_m

$$U_m^2 = (R+r)^2\omega^2 . Q_m^2 + \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 Q_m^2$$

$$= Q_m^2\left((R+r)^2\omega^2 + \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2\right)$$

$U_m = cte$

• $Q_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{(R+r)^2\omega^2 + \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2}}$

• $Q_m = \dfrac{I_m}{\omega}$

Expression du déphasage:

1er Cas

$$tg(\varphi_u - \varphi_q) = \frac{(R+r)\omega}{\frac{1}{C} - L\omega^2} > 0$$

3ème Cas

$$tg(\varphi_u - \varphi_q) = \frac{(R+r)\omega}{L\omega^2 - \frac{1}{C}} > 0$$

Résonance de charge:

à la résonance de charge Q_{max} passe par son maximum càd

$$g(\omega) = (R+r)^2\omega^2 + \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2$$

est minimale

sig $\dfrac{dg(\omega)}{d\omega} = 0$ pour $\omega = \omega_r$

$$(R+r)^2 . 2\omega_r + 2\left(\frac{1}{C} - L\omega_r^2\right) . (-2L\omega_r) = 0$$

$$\underbrace{2\omega_r}_{\neq 0}\left((R+r)^2 - 2L\left(\frac{1}{C} - L\omega_r^2\right)\right) = 0$$

$$(R+r)^2 - \frac{2L}{C} + 2L^2\omega_r^2 = 0$$

$$2L^2\omega_r^2 = \frac{2L}{C} - (R+r)^2$$

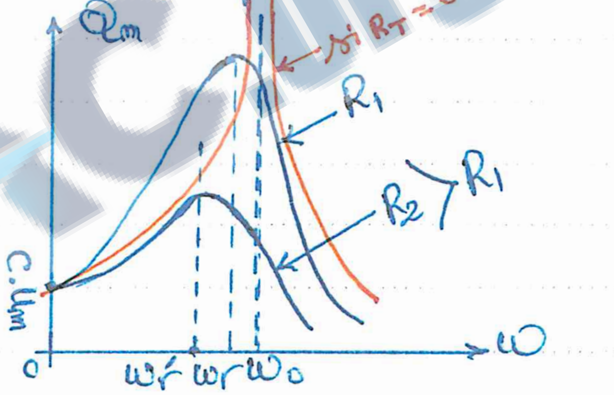
$$\omega_r^2 = \frac{\cancel{2}\cancel{L}}{C.\cancel{2}L^{\cancel{2}}} - \frac{(R+r)^2}{2L^2}$$

$$\omega_r^2 = \frac{1}{LC} - \frac{(R+r)^2}{2L^2}$$

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{(R+r)^2}{2L^2}$$

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{(R+r)^2}{2L^2}}$$

ω_0 est superieur à ω_r



Rq 1). si $R_T = R + r = 0$

$$Q_m = \frac{U_m}{\left|\frac{1}{C} - L\omega^2\right|}$$

pour $\omega_r = \omega_0$ alors $\frac{1}{C} - L\omega^2 = 0$ dans ce cas $Q_m \rightarrow +\infty$

2) pour qu'il ya résonance de charge il faut que ω_r existe càd

$$\omega_0^2 - \frac{(R+r)^2}{2L^2} > 0$$

$$\omega_0^2 > \frac{(R+r)^2}{2L^2}$$

$$(R+r)^2 < 2\omega_0^2 L^2$$

$$(R+r)^2 < 2 \cdot \frac{1}{\cancel{L}C} \cdot L^{\cancel{2}}$$

$$(R+r)^2 < 2\frac{L}{C}$$

$$R+r < \sqrt{\frac{2L}{C}}$$

- pour qu'il nypas resonance de charge:

il faut que $R+r \geq \sqrt{\frac{2L}{C}}$

Fin

Lycée Hédi Chaker
SFAX

28 10

Devoir de synthèse N°1
Décembre 2011

2011 / 2012

Section : Sciences Expérimentales **Coefficient :** 4 **Durée :** 3 heures

EPREUVE : SCIENCES PHYSIQUES

M. Abdmouleh Nabil

Le devoir comporte deux exercices de chimie et deux exercices de physique répartis sur cinq pages numérotées de 1/5 à 5/5. La page 5/5 est à remplir par l'élève et à remettre avec la copie.

Chimie : - Document scientifiques
- Equilibre chimique.

Physique : - Circuit RLC
- Circuit RL

CHIMIE (9.0 points)

Exercice N°1 (3,00 points) La lampe à iode

Considérons d'abord la lampe à incandescence représentée sur la figure-1-. Elle est constituée d'une ampoule de verre dans laquelle on a remplacé l'air par un gaz inerte. Un filament de tungstène est parcouru par un courant électrique et est porté à très haute température. Ce qui génère la lumière. Il est indispensable que l'air soit remplacé par un gaz inerte sinon le tungstène brûlerait par oxydation avec l'oxygène.

Malgré cette précaution, la lampe à une durée de vie limitée (+/- 1000 h), car le tungstène se sublime (Sublimation = passage de la phase solide à la phase gazeuse). Cette sublimation entraîne un amincissement du filament qui finit par se briser. Le tungstène gazeux va se déposer sur la paroi de l'ampoule qui devient noire, car cette paroi est plus froide.

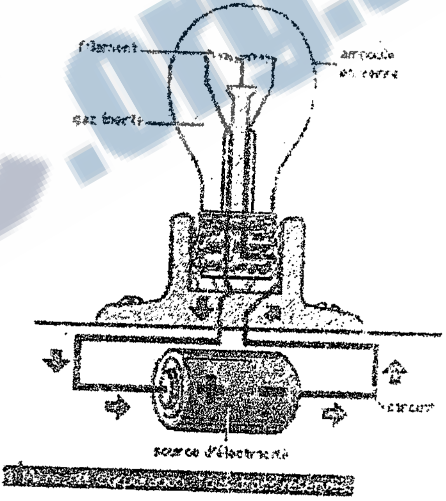


Figure-1-

On a donc un équilibre : $W_{(g)} \rightleftharpoons W_{(s)}$ (1)

Dans la lampe à iode, le gaz inerte est remplacé par l'iode qui va réagir avec le tungstène gazeux : $I_{2\,(g)} + W_{(g)} \rightleftharpoons WI_{2\,(g)}$ (2) Cette réaction est exothermique. Or au niveau du filament la température est très élevée. Par conséquent, l'équilibre va se déplacer vers la gauche : l'iodure de tungstène se décompose, donc augmentation de la concentration en tungstène gazeux près du filament, et finalement l'équilibre de l'équation (1) est déplacée vers la droite. Une partie du tungstène gazeux se redépose sur le filament. La présence d'iode protège donc le filament, tout en produisant plus de lumière.

Questions :

1°/ En se basant sur le texte, définir une lampe à iode.

2°/

a°/ Enoncer la loi d'action de masse.

b°/ Donner l'expression de la constante d'équilibre K relative à la réaction (2).

3°/ En s'appuyant sur le texte, préciser le sens de la réaction qui se produit dans un système en équilibre formé par le tungstène, l'iode et l'iodure de tungstène suite à une augmentation de sa température.

4°/ On lit dans le texte la phrase suivante : « La présence d'iode protège donc le filament, tout en produisant plus de lumière » Expliquer comment l'iode protège le filament.

Exercice N°2 (6,00 points)

On prépare à l'instant de date $t = 0$ un tube à essai contenant les quantités $n_1 = 2{,}1.10^{-2}$ mol d'acide éthanoïque de formule brute $C_2H_4O_2$ et $n_2 = 1{,}6.10^{-2}$ mol de méthanol de formule brute CH_4O. On scelle le tube à essai puis on place ce dernier dans un bain marie de température constante $\theta = 80°C$.

1°/ Expliquer l'intérêt des opérations suivantes :

- ✓ On scelle le tube à essai.
- ✓ On porte le tube à essai à une température élevée.

2°/

a°/ En utilisant les formules semi-développées, écrire l'équation chimique de la réaction limitée qui se produit dans le tube à essai. Nommer l'ester (E) obtenu.

b°/ Dresser le tableau descriptif d'évolution du système contenu dans le tube à essai.

3°/ La réaction chimique étudiée a un taux d'avancement final $\tau_f = 0{,}75$.

a°/ Déterminer l'avancement final x_f de cette réaction.

b°/ Calculer la constante d'équilibre K relative à la réaction d'estérification.

4°/ A un instant de date t_1, on refroidit le contenu du tube à essai, puis, on dose la quantité d'acide restant par une solution aqueuse (S) d'hydroxyde de sodium de concentration molaire $C_B = 2$ mol. L^{-1} en présence de phénolphtaléine. A l'équivalence acido-basique, le volume d'hydroxyde de sodium ajouté est $V_{BE} = 5$ mL.

a°/ Déterminer à la date t_1 l'avancement x_1 de la réaction d'estérification. En déduire la composition du système à cette date.

b°/ Montrer que la date t_1 ne correspond pas à un état d'équilibre chimique dynamique du système chimique réalisé.

5°/ On prépare un système chimique formé par les quantités 0,1 mol d'acide éthanoïque, 0,2 mol de méthanol, 0, 3 mol d'ester(E) et 0,4 mol d'eau.

a°/ Montrer que le système obtenu n'est pas en état d'équilibre dynamique.

b°/ Préciser, en justifiant la réponse, le sens dévolution spontané.

PHYSIQUE (11.0 points)

Exercice N°1 (4,75 points)

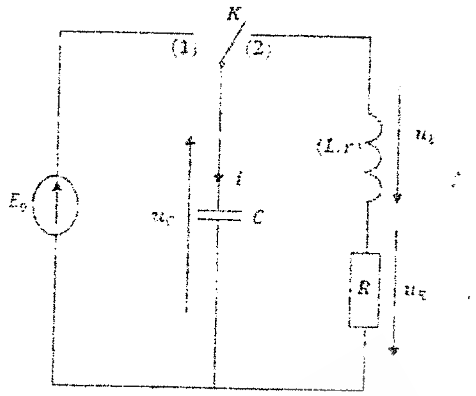


Figure-2-

A l'aide d'un condensateur de capacité C, d'une bobine d'inductance L et de résistance interne r = 10 Ω, d'un commutateur K, d'un conducteur ohmique de résistance R = 40 Ω et d'un dipôle générateur idéal de tension de f. é. m. E_0, on réalise le circuit électrique schématisé sur la figure-2-.

On place le commutateur K en position (1) puis on le bascule en position (2) et en même temps on déclenche un système d'acquisition de données à une date prise comme origine du temps.

1°/ Quel est le phénomène physique qui se produit dans le circuit au moment où K est en position (2) ? Justifier la réponse.

2°/ L'équation différentielle qui régit les variations de la tension u_C aux bornes du condensateur peut s'écrire sous la forme : $\frac{d^2u_C}{d^2t} + \alpha\frac{du_C}{dt} + \beta u_C = 0$

Déterminer l'expression de α et celle de β en fonction des données de l'exercice.

3°/

a°/ Donner l'expression de l'énergie électrique E du circuit RLC en fonction de C, L, u_C et i où i représente l'intensité du courant électrique qui circule dans le circuit.

b°/ Etablir que $\frac{dE}{dt} = -(R+r)i^2$.

Interpréter cette relation.

4°/ Les courbes de la figure-3- représentent l'évolution au cours du temps de l'énergie électrique E et de la tension u_C.

a°/ Déterminer graphiquement et à t = 0, l'énergie électrique E_1, la tension U_1 aux bornes du condensateur et la pseudo-période T. En déduire la valeur de C et celle de E_0.

b°/ En se servant de la courbe E = f(t) et de la tangente (Δ), trouver à la date $t_2 = 3.10^{-3}$s la valeur de l'énergie magnétique E_L emmagasinée dans la bobine

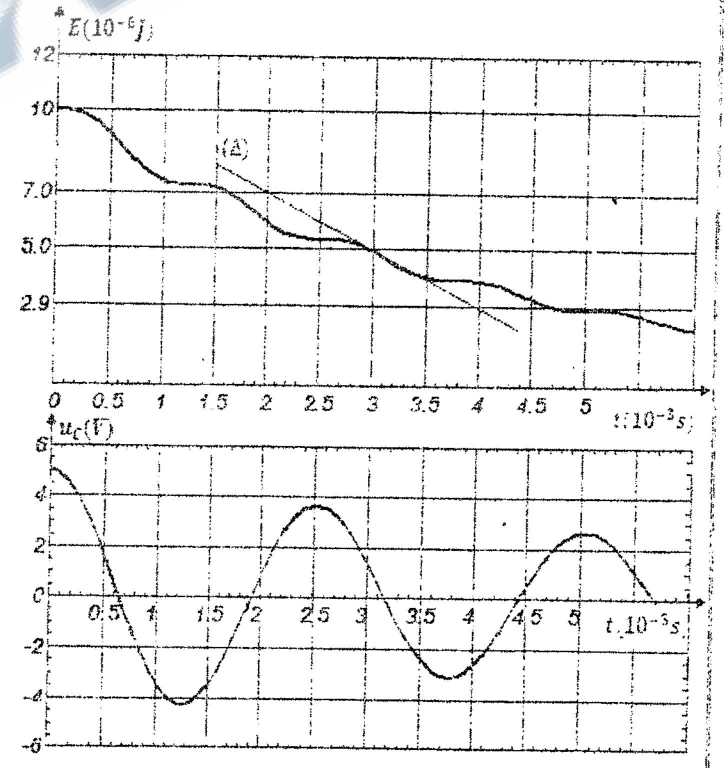


Figure-3-

31

et celle de l'intensité électrique i_2. En déduire la valeur de L.

5°/ On reprend le circuit électrique de la figure-2- et pour différents conducteurs ohmiques, on représente les variations au cours du temps de la tension u_C. On obtient les courbes du document-1- de la page 5/5. Compléter le tableau du document-1- en associant à chaque courbe la résistance R et le nom du régime d'oscillation correspondants.

Exercice N°2 (4,25 points)

A l'aide d'une bobine d'inductance L et de résistance interne r, d'un conducteur ohmique de résistance R, d'un dipôle générateur idéal de tension de f. é. m. E et d'un interrupteur K, on réalise le circuit électrique schématisé sur la figure-4-. A l'instant de date t = 0, on ferme l'interrupteur K.

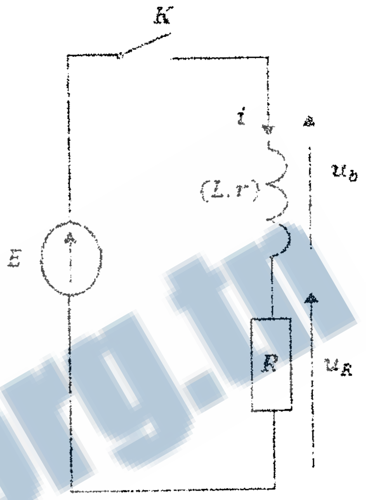


Figure-4-

1°/ Préciser le phénomène physique qui se produit dans le circuit électrique du document-2- page 5/5.

2°/ En appliquant la loi des mailles, montrer qu'en régime permanent l'intensité du courant est $I = \frac{E}{R+r}$ et la tension aux bornes de la bobine est $U_b = \frac{r\,E}{R+r}$.

3°/ L'équation différentielle qui régit les variations au cours du temps de l'intensité i du courant électrique peut s'écrire sous la forme : $\alpha\frac{di(t)}{dt} + i = \beta$ avec α et β sont des constantes positives.

a°/ Exprimer α et β en fonction des données de l'exercice. Que représente α pour le circuit RL étudié.

b°/ Quelle est parmi les fonctions suivantes $i(t) = \frac{E}{R+r}(1\text{-}e^{-\frac{R+r}{L}t})$ et $i(t) = \frac{E}{R+r}\,e^{-\frac{R+r}{L}t}$ celle qui constitue une solution de l'équation différentielle trouvée ? Justifier la réponse.

4°/ Un système d'acquisition non représenté sur la figure-3- suit l'évolution au cours du temps de la tension $u_b(t)$ aux bornes de la bobine et de l'intensité i du courant électrique. On obtient les courbes du document-2- page 5/5

a°/ Déterminer, graphiquement, les valeurs I, U_b, E et la constante de temps τ du dipôle RL.

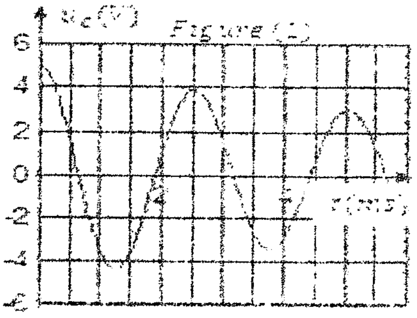
b°/ En déduire r, R, et L

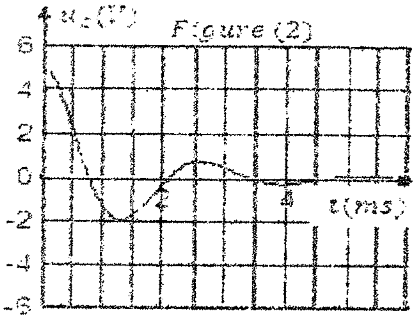
5°/ Donner. en fonction du temps, l'expression de la tension u_R aux bornes du résistor et représenter son allure sur le document-2- de la page 5/5

32

Lycée Hédi Chaker Sfax

Epreuve Sciences Physique **Devoir de synthèse**	*Décembre 2011*	M. Abdmouleh Nabil
Nom :	Prénom :	Classe :





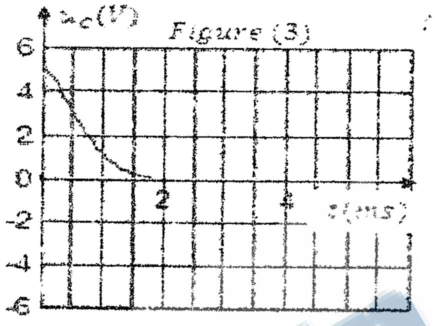
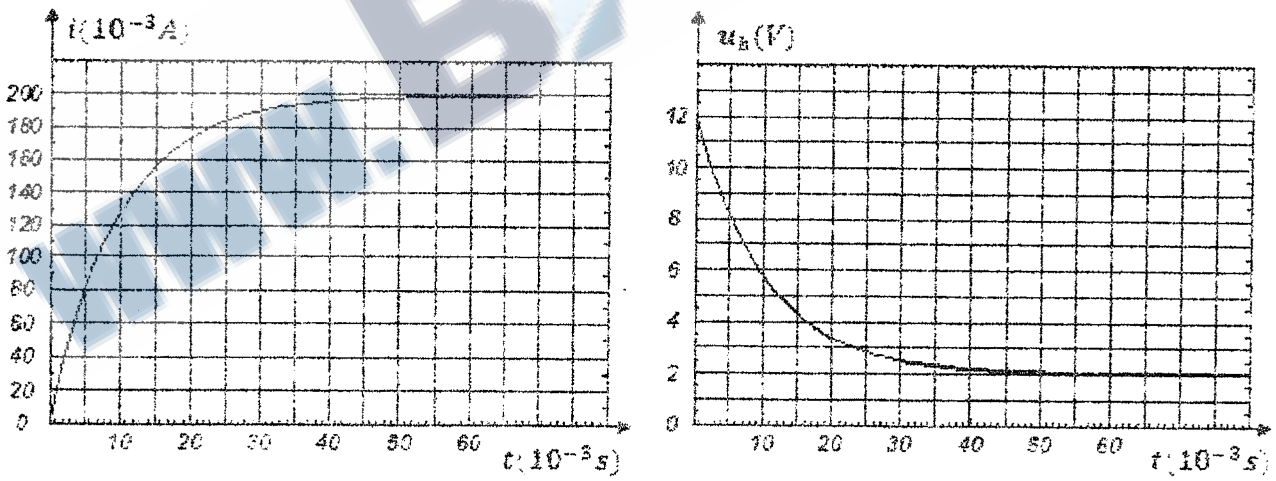


Figure n°			
Valeur de la résistance R (Ω)	860	30	280
Régime d'oscillation			

Document-1-



Document-2-

Exercice n°1 :

1/ La lampe à iode est constituée d'une ampoule de verre dans laquelle on a remplacé l'air par l'iode. Un filament de tungstène est parcouru par un courant électrique porté à très haute température.

2/a/ Pour un système chimique aboutissant à un état d'équilibre la fraction de concentration π prend une valeur constante lorsque cet équilibre est atteint appelée la constante d'équilibre notée K.

$$\boxed{\pi_{eq.dyn} = K}$$

b/ à l'équilibre dynamique π = K.

$$\Rightarrow K = \frac{[WI_2]_{éq}}{[I_2]_{éq} \cdot [W]_{éq}}$$

3/ Suite à une augmentation de la température l'équilibre se déplace à gauche donc la réaction qui se produit spontanément est

$$WI_{2(g)} \longrightarrow I_{2(g)} + W_{(g)}$$

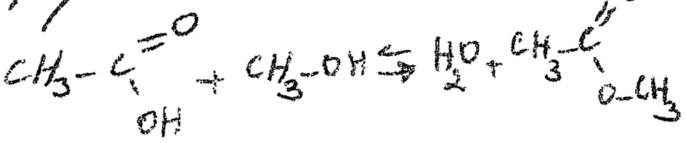
4) La présence de l'iode permet d'obtenir le tungstène gazeux qui à en donnant de tungstène solide qui se dépose sur le filament de tungstène ce qui empêche l'amincissement de ce filament assez rapidement ⇒ Obtenir une durée de vie de la lampe plus importante que celle de la lampe à incandescence.

Exercice n°2 :

1/ à 80°C on peut obtenir la vaporisation de la matière organique (alcool, ester et l'acide carboxylique) donc on scelle le tube à essai pour condenser la vapeur du ~~cette~~ matière formée et donc empêcher toute perte.

— La réaction d'estérification est lente donc on porte le tube à essai à une température élevée pour l'accélérer.

2/a/



$$CH_3-C(=O)-OH + CH_3-OH \rightleftharpoons H_2O + CH_3-C(=O)-O-CH_3$$

Ester. éthanoate de méthyle

b/

Equation de la R^{ct} : Acide + alcool ⇌ Ester + eau					
Etat	Avanc	Quantité de matière (mol)			
initial	0	$2,1.10^{-2}$	$1,6.10^{-2}$	0	0
qql	x	$2,1.10^{-2}-x$	$1,6.10^{-2}-x$	x	x
final	x_f	$2,1.10^{-2}-x_f$	$1,6.10^{-2}-x_f$	x_f	x_f

3/ a/ $\tau_f = \frac{x_f}{x_{max}} \Rightarrow x_f = x_{max} \cdot \tau_f$

valeur x_{max}.

on $\begin{cases} n_0(\text{acide}) > n_0(\text{alcool}) \\ \text{la R}^{ct} \text{ se produit mole à mole (1 mol acide réagit avec 1mol d'alcool} \end{cases}$

D'où l'alcool est le réactif limitant donc

$1,6.10^{-2} - x_{max} = 0$

$\Rightarrow x_{max} = 1,6\,10^{-2}$ mol.

Par suite

$x_f = 1,6.10^{-2} \times 0,75$

$= 1,2.10^{-2}$ mol

b/ la composition finale du système

$n_f(ac) = 2,1.10^{-2} - x_f = 2,1.10^{-2} - 1,2.10^{-2}$

$= 0,9\,10^{-2}$ mol

$n_f(al) = 1,6\,10^{-2} - x_f = 1,6.10^{-2} - 1,2\,10^{-2}$

$= 0,4.10^{-2}$ mol

$n_f(est) = n_f(eau) = x_f = 1,2.10^{-2}$ mol.

valeur K

D'après la loi d'action de masse

$\pi_{eq} = K$

donc $K = \frac{[\text{ester}]_{éq} \cdot [\text{eau}]_{éq}}{[\text{acide}]_{éq} \cdot [\text{alcool}]_{éq}}$

$= \frac{\frac{n(est)}{V} \cdot \frac{n(eau)}{V}}{\frac{n(acide)}{V} \cdot \frac{n(alcool)}{V}}$

$\Rightarrow K = \frac{n_f(ester) \; n_f(eau)}{n_f(acid) \cdot n_f(alcool)}$

$= \frac{(1,2\,10^{-2})^2}{0,9\,10^{-2} \times 0,4.10^{-2}}$

$\boxed{K = 4}$

4) a/ A L'équivalence du dosage

$n(\text{acid}) = n(\text{bas})$

$\Rightarrow n(\text{acide}) = C_B \cdot V_{B_{éq}} = 2 \times 5.10^{-3}$

$= 10^{-2}$ mol

à l'instant t_1

$n(ac) = n_1 - x_1 \Rightarrow x_1 = n_1 - n(ac)$

donc $x_1 = 2,1.10^{-2} - 10^{-2} = 1,1.10^{-2}$ mol.

b) $\pi_1 = \frac{n(est) \cdot n(eau)}{n(ac) \cdot n(al)} = \frac{x_1}{}$

$= \frac{x_1^2}{(n_1 - x_1)(n_2 - x_1)} = \frac{(1,1.10^{-2})^2}{10^{-2} \times 0,6\,10^{-2}}$

$\pi_1 = 2,016$.

On constate que $\pi_1 \neq K$

$\Rightarrow$ la date t_1 ne correspond à un état d'équilibre.

5/ a/ $\pi = \frac{n(est) \; n(eau)}{n(ac) \cdot n(al)} = \frac{0,3 \times 0,4}{0,1 \times 0,2}$

$= 6$

On a. $\pi \neq K$ $\Rightarrow$ le système n'est pas en état d'équilibre dynamique.

b/ $\pi > K$ $\Rightarrow$ le système évolue spontanément dans le sens qui diminue π pour atteindre K donc la réaction inverse se produit spontanément

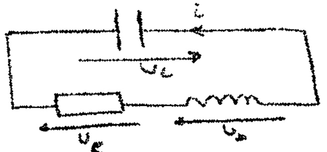
$\Rightarrow$ le système évolue spontanément dans le sens de l'hydrolyse de l'ester

Physique

Exercice n°2.

1/ Lorsque le commutateur est position 1, Le condensateur se charge par le générateur.
Au moment t on bascule commutateur sur la position 2 le condensateur se décharge à travers la bobine et le conducteur ohmique

2/



d'après la loi de mailles.

$u_C + u_R + u_b = 0$

$\Rightarrow u_C + Ri + L\frac{di}{dt} + ri = 0$

$\Rightarrow u_C + (R+r)i + L\frac{di}{dt} = 0$

or $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(Cu_C) = C\frac{du_C}{dt}$

d'où

$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + (R+r)C\frac{du_C}{dt} + u_C$

$\Rightarrow \frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R+r}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}$

L'équation différentielle s'écrit la forme

$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \alpha\frac{du_C}{dt} + \beta u_C = 0$

avec. $\alpha = \frac{R+r}{L}$ et $\beta = \frac{1}{LC}$

1/ a/ $E = E_e + E_m = \frac{1}{2C}q^2 + \frac{1}{2}Li^2$ 36

$= \frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}Li^2$

b/ $\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}Li^2\right)$

$= C u_c \frac{du_c}{dt} + L i \frac{di}{dt}$

or $i = C\frac{du_c}{dt}$

$\frac{dE}{dt} = i\left(u_c + L\frac{di}{dt}\right)$

d'après l'équation différentielle

$u_c + L\frac{di}{dt} = u_c + LC\frac{d^2u_c}{dt^2}$

$= -(R+r)C\frac{du_c}{dt} = -(R+r)i$

d'où $\frac{dE}{dt} = i\left(-(R+r)i\right)$

$= -(R+r)i^2$

$\frac{dE}{dt} = -(R+r)i^2 \Rightarrow dE = -(R+r)i^2 dt$

⇒ L'énergie totale de l'oscillateur diminue au cours du temps

cette diminution due à la perte d'énergie transformée de chaleur par effet Joule

2) a/ valeur E_1 : $E_1 = 10.10^{-6}$ J

valeur U_1 : $U_1 = 5V$

valeur T $T = 2,5\ 10^{-3}$ A

valeur C à t = 0 $E_1 = E_{e_1} + E_{L_1} = E_{e_1} = \frac{1}{2}CU_1^2$

(4)

$\Rightarrow C = \frac{2E_1}{U_1^2} = \frac{2.10\ 10^{-6}}{(5)^2}$

$\boxed{C = 8.10^{-7}\ F}$

valeur E_0

à l'instant t = 0, le condensateur est chargé par le générateur

donc $E_0 = U_1 \Rightarrow E_0 = 5V$

b/ valeur de i_2

La pente de la tangente Δ à la courbe de l'énergie est $a = -(R+r)i_2^2$

$\Rightarrow i_2^2 = -\frac{a}{R+r}$

d'après la courbe de $u_c = f(t)$ à l'instant $t_2 = 3\ 10^{-3}$ A le condensateur se décharge tel que la courbe est décroissante

$\frac{dq}{dt} < 0 \Rightarrow i_2 < 0$

d'où $i_2 = -\sqrt{-\frac{a}{R+r}}$

valeur a

$a = \frac{5\ 10^{-6} - 8.10^{-6}}{3\ 10^{-3} - 1,5.10^{-3}} = -2\ 10^{-3}$ J.

valeur i_2

$i_2 = -\sqrt{-\frac{-2\ 10^{-3}}{50}} = -6,32\ 10^{-3}$ A

valeur E_{L_2}

$E_{L_2} = E_2 - E_{e_2} = E_2 - \frac{1}{2}CU_2^2$

$= 5\ 10^{-6} - \frac{1}{2}8\ 10^{-7}(1,5)^2$

$E_{L_2} = 4,1\ 10^{-6}$ J

Valeur de L

$E_{L_2} = \frac{1}{2}Li_2^2 \Rightarrow L = \frac{2E_{L_2}}{i_2^2}$ 37

$L = \frac{2\times 4,1\ 10^{-6}}{(6,32.10^{-3})^2} = 0,205$ H

Exercice n°2

1/ L'établissement du courant électrique dans le circuit n'est pas instantané. Il y a un certain retard de temps. Ce retard est dû au phénomène d'auto-induction qui apparaît dans le circuit.

2/ La loi des mailles donne

$E - u_b - u_R = 0$

$\Rightarrow E = u_b + u_R = ri + L\frac{di}{dt} + Ri$

en régime permanent i = cte

$\Rightarrow i = I$ donc $\frac{di}{dt} = 0$

d'où $E = rI + RI = (r+R)I$

d'où $\boxed{I = \frac{E}{R+r}}$

la tension aux bornes de la bobine est $u_b = ri + L\frac{di}{dt}$

en régime permanent $\frac{di}{dt} = 0$

$\Rightarrow u_b = rI$

$U_b = r\frac{E}{r+R}$

(5)

3/ La loi des mailles donne

$E - u_b - u_R = 0$

$\Rightarrow E = u_b + u_R = ri + L\frac{di}{dt} + Ri$

$= (r+R)i + L\frac{di}{dt}$

$\Rightarrow \frac{L}{r+R}\frac{di}{dt} + i = \frac{E}{r+R}$

Équation différentielle s'écrit sur la forme $\alpha\frac{di}{dt} + i = \beta$

avec $\begin{cases} \alpha = \frac{L}{R+r} \\ \beta = \frac{E}{R+r} \end{cases}$

La constante α constitue une grandeur physique caractéristique du circuit appelée la constante de temps notée τ.

b/ les conditions initiales

$\begin{cases} \text{lorsque } t = 0 \text{ ; } i = 0 \\ \text{lorsque } t \to +\infty \quad i = I = \frac{E}{R+r} \end{cases}$

1ère expression : $i = \frac{E}{R+r}\left(1 - e^{-\frac{R+r}{L}t}\right)$

$t = 0$: $i = 0$

$t \to +\infty$ $e^{-\frac{R+r}{L}t} = 0 \Rightarrow i = \frac{E}{R+r}$

Cette expression vérifie les conditions initiales.

2ème expression : $i(t)=\frac{E}{R+r}\bar{e}^{\frac{1}{\tau}.t}$ 38

$\begin{cases} \text{pour } t=0 : i=\frac{E}{R+r} \\ \text{pour } t\to\infty . \ i=0 \end{cases}$

n'est pas en accord avec les condition initiale

① : L'expression de l'intensité qui est solution de l'équation différentielle est

$$i(t)=\frac{E}{R+r}\left(1-e^{-\frac{R+r}{L}.t}\right)$$

4) a/ – D'après la courbe n°1

$I=200.10^{-3}A$

– D'après la courbe n°2

valeur E : $E=U_b(t=0) \Rightarrow E=12V$

valeur U_b . $U_b=2V$

– valeur de τ :

la tangente à l'origine du temps à la courbe n°1 ($i=f(t)$) Coupe l'asymptote à cette courbe au point d'abscisse

$\tau=10.10^{-3}s$

Autre méthode

– $t=\tau$. $i=0,63.I_0=0,63\times200\,10^{-3}$

$=126\ 10^{-3}A$.

– La tangente à l'origine du temps à la courbe n°2 ($U_b=g(t)$) coupe à l'asymptote à cette courbe au point d'abscisse τ.

b/ valeur R .

$U_R=E-U_b=12-2=10V$

$U_R=RI \Rightarrow R=\frac{U_R}{I}=\frac{10}{200.10^{-3}}=50\Omega$

valeur de r

$I=\frac{E}{r+R} \Rightarrow r+R=\frac{E}{I}$

$\Rightarrow r=\frac{E}{I}-R$

AN $r=\frac{12}{200.10^{-3}}-50=10\Omega$

valeur τ

$\tau=\frac{L}{R+r} \Rightarrow L=(R+r)\tau$

AN $L=60\times10.10^{-3}=0,6H$

5/ $U_R(t)=R\,i(t)$

$=R.I\left(1-\bar{e}^{\frac{R+r}{L}.t}\right)$

$=R.I\left(1-\bar{e}^{\frac{t}{\tau}}\right)$

AN

$$\boxed{U_R(t)=10\left(1-e^{-100t}\right)}$$

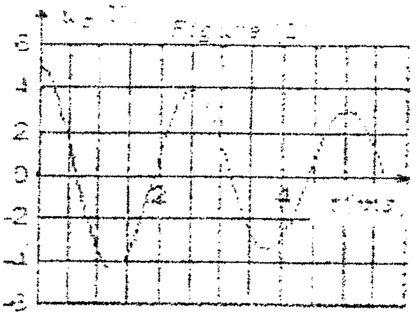
t	0	τ	3τ	5τ
$U_R(V)$	0	6,32	9,5	10

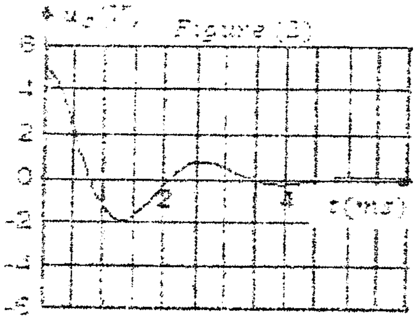
$(\tau=10.10^{-3}A)$

Lycée Hédi Chaker Sfax

Epreuve Sciences Physique Devoir de synthèse	Décembre 2011	M. Abdmouleh Nabil
Nom :	Prénom :	Classe :

39





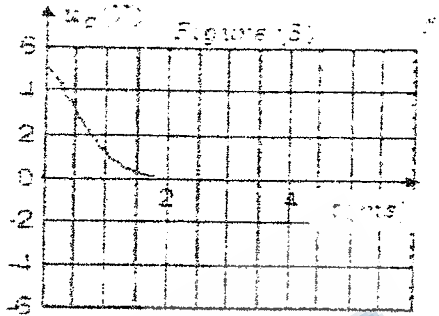
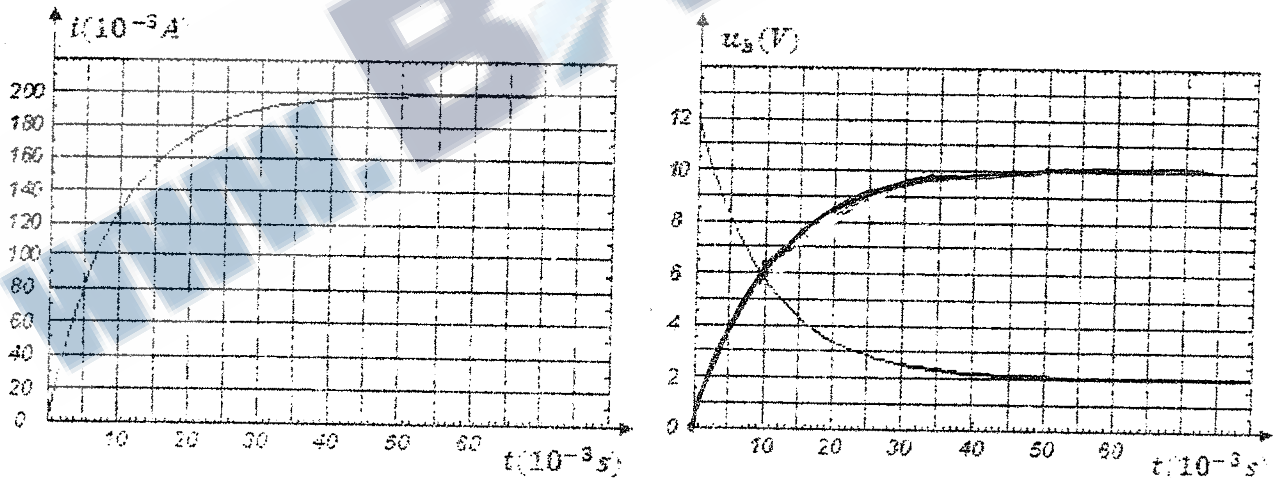


Figure n°	3	1	2
Valeur de la résistance R (Ω)	560	30	290
Régime d'oscillation	apériodique	pseudopériodique	pseudopériodique

Document-1-



Document-2-

Lycée 9 Avril 1938 SFAX	Devoir de synthèse n°1	Année scolaire 2011/2012
Date :9-12-2011	Sciences physiques	Classes : $4^{ème}$ Tec-Math

CHIMIE : (7pts)

Exercice n°1 :

L'hydrolyse d'un ester (E) de formule brute $C_4H_8O_2$ donne un alcool (A) et un acide carboxylique (B).

La constante d'équilibre relative à cette réaction est $K = \frac{1}{(1,5)^2}$.

La température du milieu réactionnel reste constante durant la réaction chimique qui se termine après 2 heures.

1) Ecrire en utilisant les formules semi-développées l'équation de la réaction d'hydrolyse sachant que (A) est un alcool secondaire.
2) a- Donner à partir des données les caractères de cette réaction.
   b- Comment peut-on accélérer cette réaction chimique ?
3) Dans une première expérience on part à t=0 d'un mélange équimolaire contenant n_1 mol de l'ester (E) et n_1 mol d'eau. **A l'équilibre** on obtient **2.10^{-2} mol** d'alcool.
   a- Dresser le tableau descriptif de la réaction d'hydrolyse.
   b- Déterminer n_1
   c- En déduire la composition du mélange à l'équilibre.
   d- Calculer le taux d'avancement final τ_f.
4) Déterminer la valeur du taux d'avancement de la réaction lorsque $\pi = 0,25$.
5) Dans une deuxième expérience on part à t=0 d'un mélange contenant 10^{-2} mol de l'ester (E), 2.10^{-2} mol de l'alcool (A) et 2.10^{-2} mol de l'acide (B).
   a- Dans quel sens évolue ce système chimique?
   b- Calculer le pourcentage de l'ester dans le mélange lorsque l'équilibre est atteint.
   c- On veut augmenter ce pourcentage obtenu à l'équilibre. En utilisant la fonction des concentrations, dire si à l'équilibre il faut ajouter ou diminuer la quantité d'eau.

Exercice n°2 :

En solution aqueuse les ions A^{3+} réagissent avec les ions B^- pour donner les ions C^{2+} selon l'équation :

$$A^{3+} + B^- \rightleftarrows C^{2+}$$

La constante d'équilibre relative à cette réaction est K = 1000 à une température T.

1) A t=0 et à la température T, on mélange : **2.10^{-4} mol** d'ions A^{3+} avec **2.10^{-4} mol** d'ions B^-. On obtient une solution de volume **V = 450 mL.**
   a- Dresser le tableau descriptif de cette réaction.
   b- Donner l'expression de la fonction des concentrations en fonction de l'avancement x.
2) Sachant qu'à $t = t_1$ le nombre de moles d'ions B^- est égal 4 fois ~~au~~ nombre de moles d'ions C^{2-}.
   a- Le système est- il en état d'équilibre chimique à l'instant de date t_1?
   b- Déterminer la composition du mélange à l'équilibre chimique.
3) Au mélange obtenu à l'équilibre on ajoute sans variation de volume à la température T **10^{-5} mol** d'ions C^{2+} et **10^{-5} mol** d'ions B^-.
   a- Comment varie le nombre de moles d'ions A^{3+} dans ce mélange? Justifier.
   b- Déterminer la nouvelle composition du mélange lorsque l'équilibre est atteint sachant que le nombre de moles d'ions total à l'équilibre est égal à **$3,74.10^{-4}$ mol**.

PHYSIQUE : (13 pts)

Exercice n°1 :

Un circuit est composé d'un générateur de tension constante E, d'une bobine d'inductance L = 0,3 H et de résistance r, d'un interrupteur K, de deux conducteurs ohmiques **$R_1 = 200\ \Omega$ et R_2** inconnue et une diode (Figure 1). A un instant pris comme origine des temps on ferme K et on suit avec un oscilloscope à mémoire l'évolution au cours du temps de la tension $u_{R_1}(t)$ aux bornes de R_1 et la tension $u_b(t)$ aux bornes de la bobine. On obtient les enregistrements de la figure 2.

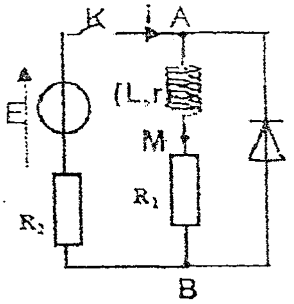


figure n°1

) a- Montrer que l'oscillogramme (a) correspond à la tension $u_{R_1}(t)$.

b- Quelle est l'influence de la bobine lors de l'établissement du courant dans le circuit ?

) a- Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension $u_{R_1}(t)$.

b- La solution de cette équation différentielle est : $u_{R_1}(t) = U_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

Déterminer les expressions des constantes U_1 et τ.

i) a- Déterminer graphiquement :

- * La f e m E du générateur.
- * L'intensité du courant en régime permanent.
- * La valeur de la tension aux bornes de la bobine en régime permanent. Déduire la valeur de r
- * La constante de temps τ.

b- Déduire de deux façons la valeur de R_2.

l) Calculer l'énergie emmagasinée dans la bobine en régime permanent.

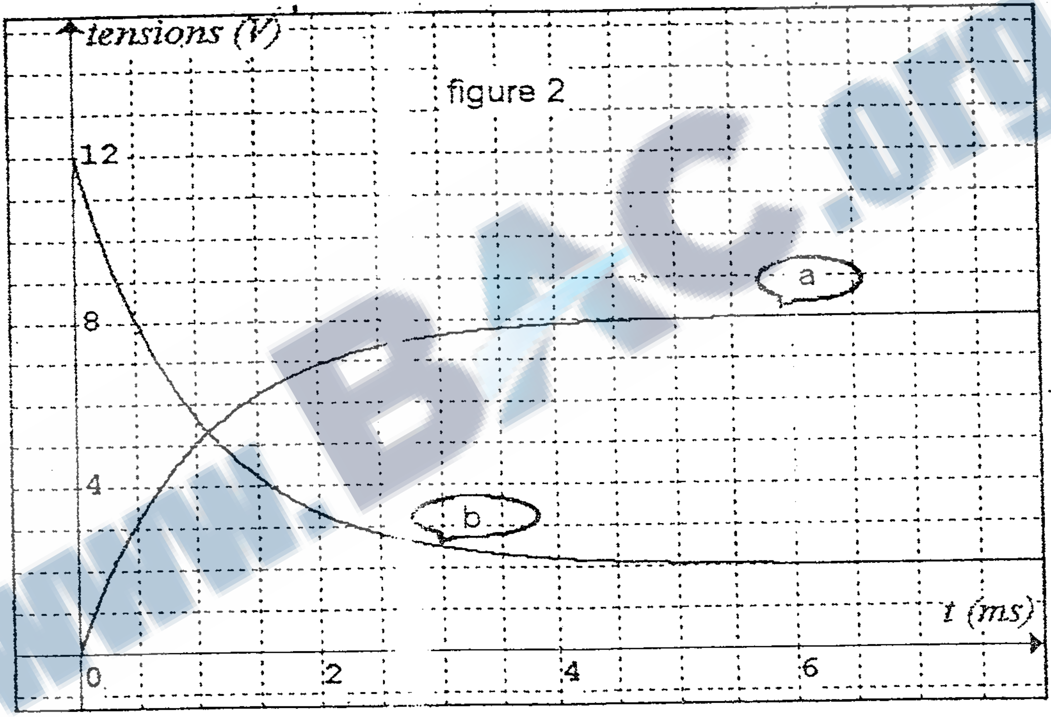
5) Le régime permanent étant établi. A une nouvelle origine des temps t'= 0, on ouvre l'interrupteur K

a- Donner l'expression de la constante de temps τ_1 du dipôle AB.

b- Quel est le phénomène le plus rapide ; l'établissement ou la rupture du courant dans le dipôle AB ? Justifier.

c- Représenter l'allure de la tension $u_{R_1}(t)$ au cours de cette rupture en précisant les points remarquables

d- Que se passe –t-il pour l'énergie qui était dans la bobine ? Calculer la partie qui apparaît dans chaque dipôle.



Exercice n°2 :

Le montage permettant d'étudier expérimentalement les oscillations libres d'un circuit RLC série comporte:

*Un générateur idéal de tension de f e m constante E=10V.

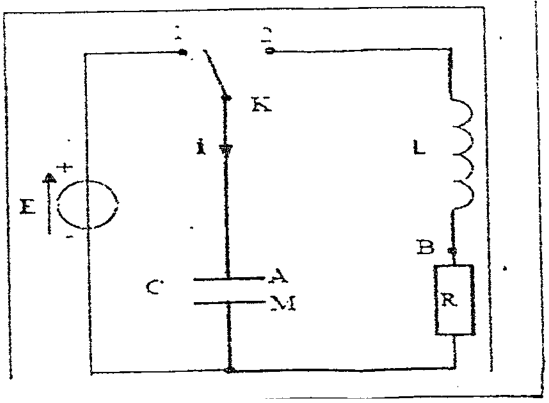
*Un condensateur de capacité C = 4 μF .

* Une bobine purement inductive d'inductance L= 1 H.

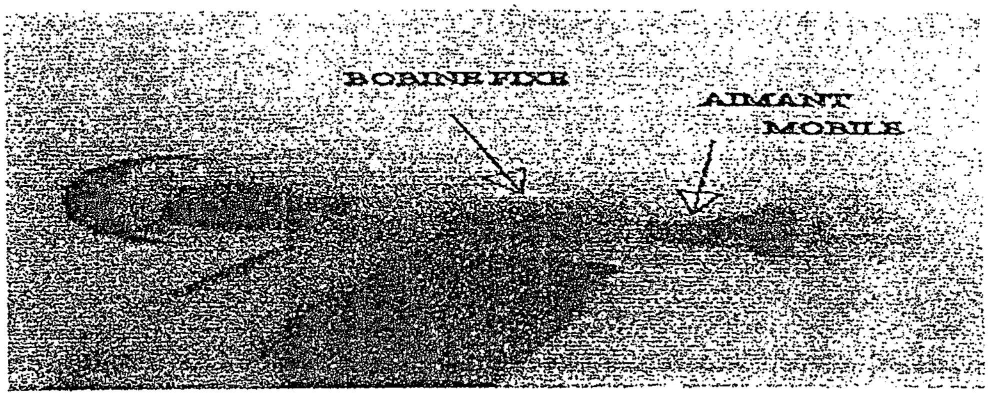
* Un résistor de résistance R= 254 Ω.

* Un commutateur K. (voir figure ci-contre)

On charge complètement le condensateur.



Exercice n°3 : Une lampe de poche qui ne nécessite aucune pile



En 1821 M. Faraday a découvert l'induction électromagnétique: Le principe général est qu'un aimant passant dans un bobinage de fil produit un courant.
La lampe à induction est une lampe de poche qui ne nécessite aucune pile.
Cette lampe se charge en la secouant. Il n'est pas nécessaire de secouer avec force mais plutôt avec régularité. L'objectif est d'obtenir le déplacement de l'aimant principal a travers le bobinage.
Le mouvement de vas et vient de l'aimant lorsque on secoue la lampe produit une énergie qui est transformée en électricité .L'énergie électrique produite est alors stockée dans un condensateur capable de la conserver pendant des mois et capable d'être rechargé plus d'un million de fois.
Le condensateur se charge puis se décharge dans une diode électroluminescente (DEL). La DEL à une durée de vie estimée d'au moins 50 000 heures, même exposée à des chocs répétés.

La lampe à induction peut délivrer de 30 à 50 minutes de luminosité pour 20 à 30 min d'agitation.

De ce fait la "Night Star" fournira toujours une lumière efficace sans utiliser de pile ni nécessiter le changement d'aucune pièce.

Secouer : agiter rapidement et plusieurs fois.

Questions:

1) Expliquer le phénomène physique origine du courant dans la lampe.
2) Préciser l'inducteur et l'induit dans cette lampe.
3) Quelles sont les formes d'énergie qui apparaissent dans cette lampe. Justifier.
4) Donner les avantages d'une lampe à induction par rapport à une lampe de poche traditionnelle.

I/ A t= 0, on bascule K sur la position -2-.

On observe, sur l'oscilloscope, la tension $u_R(t)$ aux bornes du résistor (figure 3).

1) a- Pourquoi la tension $u_R(t)$ est dite grandeur oscillante?

b- De quel régime oscillatoire s'agit-il ? Justifier.

2) Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de la tension u_C.

3) a- Calculer la valeur algébrique de la charge q_M de l'armature M du condensateur à l'instant t=0.

b- Déterminer la pseudo-période T des oscillations puis la comparer à T_0 période propre du même oscillateur non amorti. Comment peut-on qualifier cet amortissement ?

c- Pour $t \in \left[0 ; \frac{T}{4}\right]$: Quel est le signe de l'intensité du courant dans le circuit? Représenter sur un schéma le sens de i et le sens de déplacement des électrons dans le circuit RLC fermé.

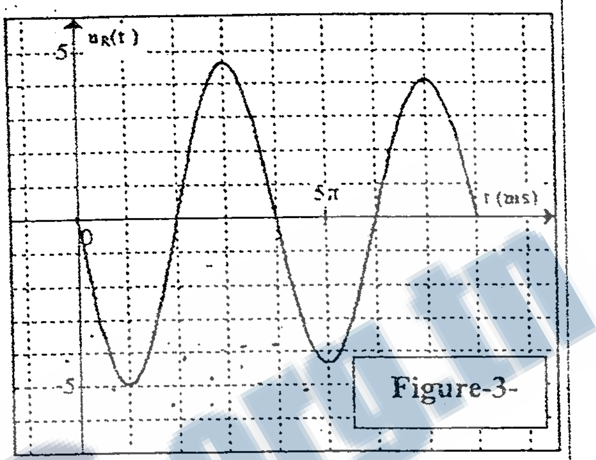


Figure-3-

4) a- Donner l'expression de l'énergie totale E_T dans le circuit, puis montrer qu'elle diminue au cours du temps.

b- Sous quelles formes se trouve l'énergie dans l'oscillateur à chacune des dates $t_0 = 0$ et $t_1 = \frac{T}{4}$?

c- Calculer la variation de l'énergie dans l'oscillateur entre les deux instants t_0 et t_1. Interpréter cette variation.

d- Sachant que l'oscillateur perd 6 % de son énergie chaque demi-oscillation:

- Calculer l'énergie totale de l'oscillateur à t = T.
- Déduire la valeur de la tension aux bornes du condensateur à cette date.

II / Dans une 2ème expérience, on réalise un circuit (L, C) formé par le condensateur de capacité C =4 µF chargé sous la tension U=10V et la bobine <u>purement inductive</u> d'inductance L=1 H

1) Quelle est la nature des oscillations électriques dans ce circuit ?

2) a- Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de la charge q du condensateur.

b- La solution de cette équation différentielle est : $q(t) = Q_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi_q)$

Déterminer les valeurs de ω_0 ,Q_{max} et φ_q ,en prenant pour origine des temps l'instant ou q= - Qmax.

c- Déterminer l'expression de l'intensité du courant dans le circuit.

3) a- Montrer que l'énergie totale se conserve, calculer sa valeur.

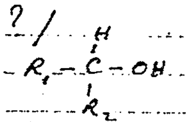
b- Donner les expressions de E_C (énergie électrostatique, et de E_L (énergie magnétique) en fonction de la charge q du condensateur. Pour quelles valeurs de q a-t-on $E_C = E_L$?

c- Représenter les courbes de E_C et de E_L en fonction de q en précisant les points remarquables.

Chimie

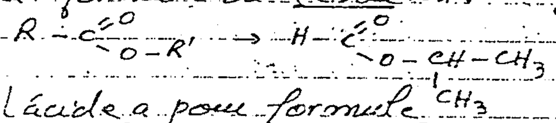
Ex.1 : hydrolyse d'un ester (E) de formule brute $C_4H_8O_2$ → alcool (A) et un acide carboxylique (B)
la constante d'équilibre : $K = \frac{1}{(1,5)^2} = \frac{1}{2,25}$
T = constante
durée de la réaction 2 heures

1/ équation de la réaction ? /
(0,5) (A) : alcool secondaire →



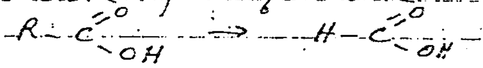
$R_1-\overset{H}{\underset{R_2}{C}}-OH$

or puisque l'ester contient 4 carbone ⇒ l'alcool contient 3 carbone et l'acide 1 carbone d'où
la formule de l'alcool est $CH_3-\underset{CH_3}{CH}-OH$
la formule de l'ester est :



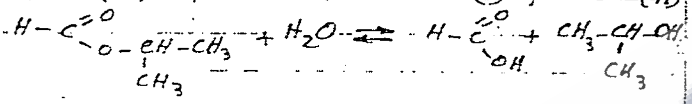
$R-C\genfrac{}{}{0pt}{}{=O}{-O-R'} \rightarrow H-C\genfrac{}{}{0pt}{}{=O}{-O-\underset{CH_3}{CH}-CH_3}$

l'acide a pour formule



$R-C\genfrac{}{}{0pt}{}{=O}{-OH} \rightarrow H-C\genfrac{}{}{0pt}{}{=O}{-OH}$

l'équation de la réaction est :
ester (E) + eau ⇌ acide(B) + alcool(A)

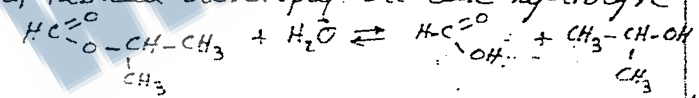


$H-C\genfrac{}{}{0pt}{}{=O}{-O-\underset{CH_3}{CH}-CH_3} + H_2O \rightleftharpoons H-C\genfrac{}{}{0pt}{}{=O}{-OH} + CH_3-\underset{CH_3}{CH}-OH$

2/ ~~b~~a/ Pour accelerer cette réaction
(0,25) - on augmente la température ou
- on ajoute un catalyseur (H_2SO_4)
ou encore on fait les deux opération
a/ les caractères de cette réaction ?
(0,5) - athermique (T = cte)
- lente (durée = 2 heures)

3/ 1ère experience : $\overset{A\ t=0}{}$ mélange equimolaire n_1 mol d'ester et n_1 mol d'eau.
A l'équilibre on a 2.10^{-2} mol d'alcool.
a/ Tableau descriptif de cette hydrolyse

(0,25)



$HC\genfrac{}{}{0pt}{}{=O}{-O-\underset{CH_3}{CH}-CH_3} + H_2O \rightleftharpoons H-C\genfrac{}{}{0pt}{}{=O}{-OH} + CH_3-\underset{CH_3}{CH}-OH$

à t = 0	n_1	n_1	0	0 (mol)
t > 0	$n_1 - x$	$n_1 - x$	x	x (mol)
t_f	$n_1 - x_f$	$n_1 - x_f$	x_f	$x_f = 2.10^{-2}$ (mol)

b/ n_1 = ?
(0,5) $K = \Pi_{eq.dyn} = \frac{[A]^1_{eq}.[B]^1_{eq}}{[E]^1_{eq}[eau]^1_{eq}} = \frac{(\frac{x_f}{V})(\frac{x_f}{V})}{(\frac{n_1-x_f}{V})(\frac{n_1-x_f}{V})}$

$K = \frac{x_f^2}{(n_1-x_f)^2} = \frac{1}{(1,5)^2} \Rightarrow \frac{x_f}{n_1-x_f} = \frac{1}{1,5} \Rightarrow$

$1,5x_f = n_1 - x_f \Rightarrow 2,5x_f = n_1$ donc

$n_1 = 2,5x_f = 2,5 . 2.10^{-2} mol. = 5.10^{-2} mol.$

c/ Composition du mélange à l'équilibre
(0,25) $(n_{ac})_f = (n_{al})_f = x_f = 2.10^{-2} mol$

$(n_{ester})_f = (n_{eau})_f = n_1 - x_f = 5.10^{-2} - 2.10^{-2}$
$= 3.10^{-2} mol.$

d/ le taux d'avancement final ?
(0,25) $\tau_f = \frac{x_f}{x_{max}}$ or $x_f = 2.10^{-2} mol.$ et $n_1 - x_{max} = 0$
$\Rightarrow x_{max} = n_1 = 5.10^{-2} mol$

$\tau_f = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{2.10^{-2}}{5.10^{-2}} = \frac{2}{5} = 0,4 < 1$
⇒ réaction limitée

4/ Taux d'avancement ? / $\Pi = 0,25$
(0,5) $\tau = \frac{x}{x_{max}}$ avec $x_{max} = 5.10^{-2} mol.$
$\Rightarrow x = ?$ / $\Pi = 0,25$
$\Pi = \frac{x^2}{(n_1-x)^2} = 0,25 = 25.10^{-2} = (5.10^{-1})$

$\Rightarrow \frac{x}{n_1-x} = 5.10^{-1} = 0,5 \Rightarrow$
$0,5(n_1-x) = x$
$0,5n_1 - 0,5x = x \Rightarrow 1,5x = 0,5n_1$
$\Rightarrow x = \frac{0,5}{1,5}n_1 = \frac{1}{3}n_1 = \frac{1}{3}.5.10^{-2} mo$

$\tau = \frac{x}{x_{max}} = \frac{\frac{1}{3}.n_1}{n_1} = \frac{1}{3} = 0,333$

2ème méthode $\tau = \frac{x}{x_{max}} = \frac{x}{n_1} \Rightarrow$
$x = n_1\tau.$
$\Pi = \frac{x^2}{(n_1-x)^2} = \frac{(n_1\tau)^2}{(n_1-n_1\tau)^2} = \frac{\tau^2}{(1-\tau)^2} = 0,2$

$\Rightarrow \frac{\tau}{1-\tau} = 0,5 \Rightarrow 0,5(1-\tau) = \tau \Rightarrow$

$0,5 - 0,5\tau = \tau \Rightarrow 1,5\tau = 0,5 \Rightarrow$
$\tau = \frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3} = 0,333.$

5/ 2ème experience
A t=0 on a $(n_{ester})_0 = 10^{-2} mol$
(0,25) $(n_{ac})_0 = (n_{al})_0 = 2.10^{-2} mol$
a/ sens d'évolution du système ?
$\Pi_0 = \frac{[A]_0.[B]_0}{[E]_0.[eau]_0} = +\infty$ car $[eau]_0 =$ $(n_{eau})_0 = 0$
$\Pi_0 = +\infty > K = \frac{1}{(1,5)^2} \Rightarrow$
le système évolue spontanément dans le sens inverse (c.à.d dans le sens de l'estérification).

b/ Pourcentage de l'ester dans le
(0,5) mélange à l'équilibre ?

	(E)	+ eau	⇌ (A)	+ (B)
à t = 0	10^{-2}	0	2.10^{-2}	2.10^{-2} (m
t > 0	$10^{-2} + x$	x	$2.10^{-2} - x$	$2.10^{-2} -$
t_f	$10^{-2} + x_f$	x_f	$2.10^{-2} - x_f$	$2.10^{-2} -$

A l'équilibre on a $K = \Pi_{eq.dyn} = \frac{(2.10^{-2}-x_f)^2}{(10^{-2}+x_f)x_f}$

$K = \frac{1}{\ldots} = \frac{1}{\ldots}$

page ④

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2+r}.E = \frac{R_1}{R}.E$$

3/ a/ Déterminons graphiquement :

* $E = ?$

on a : $u_b + u_{R_1} + u_{R_2} = E$

à $t=0$, $u_{R_1} = u_{R_2} = 0$ car $i = 0$

(0,25) $\Rightarrow u_b = E$

d'après la courbe (b), à $t=0$, $u_b = 12V$

donc $\underline{E = 12V}$

* l'intensité du courant en régime permanent ?

(0,25) $u_{R_1max} = R_1 I_{max} \Rightarrow I_{max} = \frac{u_{R_1max}}{R_1}$

avec $u_{R_1max} = U_1 = 8V$

$$\underline{I_{max}} = \frac{8V}{200\Omega} = \underline{0,04A = 40mA}$$

* u_b en régime permanent, $r = ?$

(0,5) $\underline{u_b = 2V}$

$u_b = r\,I_{max} \Rightarrow r = \frac{u_b}{I_{max}} = \frac{2V}{0,04A} = 50\Omega$

donc $\underline{r = 50\Omega}$

* la constante de temps $\tau = ?$

(0,25) si $t = \tau \Rightarrow u_{R_1} = U_1(1-e^{-1})$

$u_{R_1} = 0,63U_1 = 0,63.8V = 5,04V$

$u_{R_1} = 5,04V \longrightarrow \underline{\tau = 1ms = 10^{-3}s}$

d'après la courbe (a)

b/ déduct. de $R_2 = ?$

1^{ère} méthode : $\tau = \frac{L}{R_1+R_2+r}$

(0,5) $\Longrightarrow (R_1+R_2+r)\tau = L$

$R_2\tau + (R_1+r)\tau = L$

$R_2\tau = L - (R_1+r)\tau$

$\underline{R_2 = \frac{L}{\tau} - (R_1+r)} = \frac{0,3}{10^{-3}} - (200+50)$

$R_2 = 300 - 250 = 50\Omega$

$\underline{R_2 = 50\Omega.}$

2^{ème} méthode : en régime permanent

on a $(R_1+R_2+r)I_{max} = E$

$\Longrightarrow R_2 I_{max} = E - (R_1+r)I_{max}$

$\Longrightarrow R_2 = \frac{E}{I_{max}} - (R_1+r)$

$R_2 = \frac{12}{0,04} - (200+50)$

$R_2 = 300 - 250 = 50\Omega.$

$\underline{R_2 = 50\Omega}.$

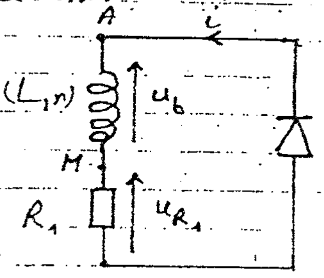
4/ Energie emmagasinée dans la bobine en régime permanent ?

(0,25) $E_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}LI_{max}^2 = \frac{1}{2}0,3.(0,04)^2 = \underline{2,4.10^{-4}J}$

$\underline{E_L = 0,24 10^{-3}J = 0,24mJ}$

a/ Expression de la constante de temps τ_1 du dipole AB.

(0,25) $\tau_1 = \frac{L}{R_1+r}$



b/ le phénomène le plus rapide ? (l'établissement ou la rupture du courant)

(0,25) $\tau = \frac{L}{R_1+R_2+r} < \tau_1 = \frac{L}{R_1+r}$

$\Rightarrow$ l'établissement du courant électrique est plus rapide que sa rupture dans le dipôle AB

c/ $u_{R_1}(t) = U_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}$ avec $U_1 = U_{R_1max} = 8V$

(0,5) et $\tau_1 = \frac{L}{R_1+r} = \frac{0,3}{250} = 1,2\,10^{-3}s$ $\underline{\tau_1 = 1,2ms}$.

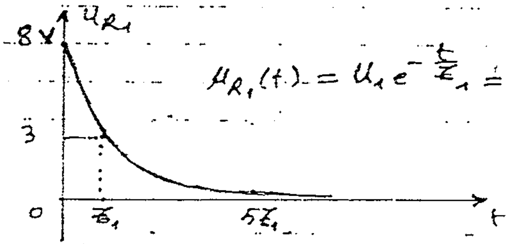
si $t=0 \Rightarrow u_{R_1} = U_1 = U_{R_1max} = 8V$

si $t \rightarrow +\infty \Rightarrow u_{R_1} = 0$

si $\underline{t = \tau_1} \Rightarrow \underline{u_{R_1}} = 0,37U_1 = 2,96V$
$\underline{\simeq 3V}$

$\frac{du_{R_1}}{dt} = -\frac{U_1}{\tau_1}e^{-\frac{t}{\tau_1}} < 0 \Rightarrow u_{R_1}(t)$ fct décroissante

t	0	+∞
$\frac{du_{R_1}}{dt}$	−	
u_{R_1}	8V ↘	0



$u_{R_1}(t) = U_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} = 8e^{-\frac{t}{\tau_1}}$

d/ l'énergie emmagasinée dans la bobine est dissipée par effet Joule dans la bobine ($r \neq 0$) et dans le Resistor R_1.

E_L est l'énergie dissipée dans (R_1+r).

$\Rightarrow$ pour $R_1+r \longrightarrow E_L$

(0,5) $r \longrightarrow E(r) = \frac{r}{R_1+r}E_L$

$R_1 \longrightarrow E(R_1) = \frac{R_1}{R_1+r}E_L$.

$\underline{E(r)} = \frac{r}{R_1+r}E_L = \frac{50}{250}.2,4.10^{-4} = \underline{0,48.10^{-4}J}$

$\underline{E(R)} = \frac{R_1}{R_1+r}E_L = \frac{200}{250}.2,4.10^{-4} = \underline{1,92.10^{-4}J}$

$2,25(4.10^{-4} + x_f^2 - 4.10^{-2}x_f) = 10^{-2}x_f + x_f^2$

$9.10^{-4} + 2,25x_f^2 - 9.10^{-2}x_f = 10^{-2}x_f + x_f^2$

$1,25x_f^2 - 0,1x_f + 9.10^{-4} = 0$

$ax_f^2 + bx_f + c = 0$ avec $\begin{cases} a = 1,25 \\ b = -0,1 \\ c = 9.10^{-4} \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0,01 - 0,0045$

$\Delta = 55.10^{-4} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 7,42.10^{-2}$

$(x_f)_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0,1 + 0,0742}{2,5} = 0,07$

$(x_f)_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0,1 - 0,0742}{2,5} = 0,01$

a $0 \leq x \leq 2.10^{-2} = 0,02$

donc la 1ère solution (0,07) est a rejetée et on prend la 2ème solution c.a.d $\underline{x_f = 0,01 \text{ mol}}$

$x_f = 10^{-2}$ mol.

$(n_{ester})_f = 10^{-2} + x_f = 10^{-2} + 10^{-2} = 2.10^{-2}$ mol

$(n_{eau})_f = x_f = 10^{-2}$ mol.

$(n_{ac})_f = (n_{al})_f = 2.10^{-2} - x_f = 2.10^{-2} - 10^{-2}$
$= 10^{-2}$ mol.

$(n_t)_f = (n_{est})_f + (n_{eau})_f + (n_{ac})_f + (n_{al})_f$
$= 2.10^{-2} + 10^{-2} + 10^{-2} + 10^{-2}$

$(n_t)_f = 5.10^{-2}$ mol.

dans 5.10^{-2} mol du mélange on a 2.10^{-2} mol d'éster

" 100 mol $\longrightarrow \frac{2.10^{-2}.100}{5.10^{-2}} = 40$ mol. d'éster

donc le pourcentage d'éster est de $\underline{40\ \%}$

ou encore $\frac{(n_{ester})_f}{(n_t)_f} = \frac{2.10^{-2}}{5.10^{-2}} = \frac{2}{5} = 0,4$

$\Rightarrow$ % estér $= 40\ \%$

(0,25) c/ on veut augmenter ce pourcentage $\Rightarrow$ faut-il ajouter ou diminuer la quantité d'eau?

$K = \pi_{eq.dyn} = \frac{(n_{ac})_{eq}.(n_{al})_{eq}}{(n_{ester})_{eq}.(n_{eau})_{eq}}$

pour augmenter ce pourcentage il faut augmenter le nombre de mole d'ester final $\Rightarrow$ deplacer l'équilibre dans le sens inverse (l'estérification)

$\Rightarrow$ π doit etre superieur a' K

$\pi > K \Rightarrow$ il faut <u>diminuer</u> le nombre de mol d'eau ($\underline{n_{eau} \searrow}$)

$K = 1000 = 10^3$ a' une température T

1/ A t = 0 et a' T on melange $(n_{A^{3+}})_0 = 2.10^{-4}$ mol et $(n_{B^-}) = 2.10^{-4}$

$\longrightarrow$ solution de volume $\underline{V = 450\text{ m}}$

$V = 0,45 L$

a/ Tableau descriptif

(0,25)

	A^{3+} +	B^- $\rightleftarrows$	C^{2+}	
a' t = 0	2.10^{-4}	2.10^{-4}	0	(mol)
t > 0	$2.10^{-4} - x$	$2.10^{-4} - x$	x	"
t_f	$2.10^{-4} - x_f$	$2.10^{-4} - x_f$	x_f	"

b/ $\pi = f(x)$?

(0,5) $\pi = \frac{[C^{2+}]^1}{[A^{3+}]^1[B^-]^1} = \frac{\frac{x}{V}}{\left(\frac{2.10^{-4}-x}{V}\right)\left(\frac{2.10^{-4}-x}{V}\right)}$

$$\boxed{\pi = V.\frac{x}{(2.10^{-4} - x)^2}}$$

2/ a' t = t_1 on a $n_{B^-} = 4\, n_{C^{2+}}$

a/ le systéme est-il en équilibre a' t_1

(0,5) $n_{B^-} = 4 n_{C^{2+}}$ a' $t_1 \rightarrow$

$2.10^{-4} - x_1 = 4x_1 \Rightarrow 5x_1 = 2.10^{-4}$

$\rightarrow x_1 = \frac{2}{5}.10^{-4}$ mol $= 4.10^{-5}$ mol.
$= 0,4.10^{-4}$ mol.

$\pi_1 = 0,45.\frac{0,4.10^{-4}}{(2.10^{-4} - 0,4.10^{-4})^2} = \frac{0,45.\ 0,4}{(1,6)^2.10^{-4}}$

$\pi_1 = 703,125 \simeq 703$

$\pi_1 \simeq 703 < K = 1000$

$\pi_1 \neq K$ le systéme n'est <u>pas en équilibre</u>

b/ Composition du melange a' l'équilibre?

$\Longrightarrow x_f = ?$

(0,5) on a $\pi_{eq\,dy} = K = V.\frac{x_f}{(2.10^{-4} - x_f)^2} = 1000$

$\Rightarrow 0,45.x_f = 1000(2.10^{-4} - x_f)^2$

$0,45x_f = 1000(4.10^{-8} + x_f^2 - 4.10^{-4}x_f)$

$0,45x_f = 4.10^{-5} + 1000x_f^2 - 4.10^{-1}x_f$

$10^3 x_f^2 - 0,85x_f + 4.10^{-5} = 0$

$x_f^2 - 8,5.10^{-4}x_f + 4.10^{-8} = 0$

$\Delta = (8,5.10^{-4})^2 - 4.1.4.10^{-8} =$

$\Delta = 72,25.10^{-8} - 16.10^{-8} = 56,25.10^{-8}$

$\rightarrow \sqrt{\Delta} = 7,5.10^{-4}$

$(x_f)_1 = \frac{+8,5.10^{-4} - 7,5.10^{-4}}{2} = \frac{1}{2}.10^{-4}$

$(x_f)_1 = 0,5.10^{-4}$ mol.

$(x_f)_2 = 8.10^{-4}$ mol or

$0 \leq x \leq 2.10^{-4}$ mol

donc ce dernier resultat est à rejeter

on a donc $\underline{x_f = 0,5.10^{-4} \text{ mol}} \Rightarrow$

$(n_{A^{3+}})_f = (n_{B^-})_f = 2.10^{-4} - x_f = 2.10^{-4} - 0,5.10^{-4}$

$= \underline{1,5.10^{-4} \text{ mol}}$

$(n_{C^{2+}})_f = x_f = \underline{0,5.10^{-4} \text{ mol}}$

0,5 3/ a/

	A^{3+}	$+ B^-$	$\rightleftarrows C^{2+}$
à $t_{éq}$	$1,5.10^{-4}$	$1,5.10^{-4}$	$0,5.10^{-4}$
à t'=0	$1,5.10^{-4}$	$1,5.10^{-4}+10^{-5}$	$0,5.10^{-4}+10^{-5}$
à t'=0	$1,5.10^{-4}$	$1,6.10^{-4}$	$0,6.10^{-4}$

$$\Pi' = V.\frac{0,6.10^{-4}}{1,5.10^{-4}.1,6.10^{-4}} = 0,45.\frac{0,6}{1,5.1,6}.10^4$$

$\underline{\Pi' = 1125} > K = 1000$

$\Rightarrow$ ~~le~~ le $\underline{\text{systeme évolue}}$ spontanement $\underline{\text{dans le sens inverse}}$

$\Rightarrow \underline{n_{A^{3+}} \text{ augmente}}$

0,25 b/ la nouvelle composition du melange lorsque l'équilibre est atteint et $(n_t)_{eq} = 3,74.10^{-4}$ mol.

	A^{3+}	$+ B^-$	$\rightleftarrows C^{2+}$
à t'=0	$1,5.10^{-4}$	$1,6.10^{-4}$	$0,6.10^{-4}$
t'>0	$1,5.10^{-4}+x$	$1,6.10^{-4}+x$	$0,6.10^{-4}-x$
t'_{eq}	$1,5.10^{-4}+x_f$	$1,6.10^{-4}+x_f$	$0,6.10^{-4}-x_f$

$(n_t)_f = 1,5.10^{-4}+x_f + 1,6.10^{-4}+x_f + 0,6.10^{-4}-x_f$

$(n_t)_f = x_f + 3,7.10^{-4} = 3,74.10^{-4}$

$\Rightarrow x_f = (3,74-3,70)10^{-4} = 0,04.10^{-4}$

$x_f = 0,04.10^{-4}$ mol $= 4.10^{-6}$ mol.

donc la composit° finale est.

$(n_{A^{3+}})_f = 1,5.10^{-4}+x_f = 1,5.10^{-4}+0,04.10^{-4}$

$= \underline{1,54.10^{-4} \text{ mol}}$

$(n_{B^-})_f = 1,6.10^{-4}+x_f = 1,6.10^{-4}+0,04.10^{-4}$

$= \underline{1,64.10^{-4} \text{ mol}}$

$(n_{C^{2+}})_f = 0,6.10^{-4} - x_f = 0,6.10^{-4} - 0,04.10^{-4}$

$= \underline{0,56.10^{-4} \text{ mol}}$

③

$L = 0,3$ H ; r = ?

$R_1 = 200\,\Omega$; R_2 = ?

A t = 0, on ferme K $\rightarrow \begin{cases} u_{R_1}(t) \text{ et} \\ u_b(t) \end{cases}$

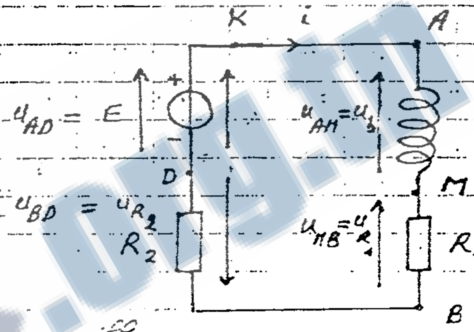
1/ a/ m.q. l'oscillogramme (a) $\rightarrow u_{R_1}(t)$?

0,25 à t = 0, i = 0 $\rightarrow u_{R_1} = R_1.i = 0$ et progressivement il s'établit un courant permanent $\Rightarrow$ (a) $\rightarrow u_{R_1}(t)$

b/ l'établissement du courant

0,25 permanent n'est pas instantanée (régime transitoire ou s'établit avec un retard) car la bobine s'oppose par son inductance L (ou par sa f.e.m d'auto-induction) à l'établissement du courant dans le circuit.

2/ a/ éq. diff. en $u_{R_1}(t)$



0,5

Loi des mailles :

$u_{AM} + u_{MB} + u_{BD} + u_{DA} = 0$

$u_b + u_{R_1} + u_{R_2} - E = 0$

$ri + L\frac{di}{dt} + R_1 i + R_2 i = E$ or $u_{R_1} = R_1.i \Rightarrow i = \frac{u_{R_1}}{R_1}$

$L\frac{di}{dt} + (R_2+r)i + u_{R_1} = E$

$\frac{L}{R_1}\frac{du_{R_1}}{dt} + \frac{(R_2+r)}{R_1}u_{R_1} + u_{R_1} = E$

$\frac{L}{R_1}\frac{du_{R_1}}{dt} + \frac{(R_1+R_2+r)}{R_1}.u_{R_1} = E$

$$\boxed{L\frac{du_{R_1}}{dt} + (R_1+R_2+r)u_{R_1} = R_1E} \text{ ou}$$

$$\boxed{\frac{du_{R_1}}{dt} + \frac{(R_1+R_2+r)}{L}u_{R_1} = \frac{R_1}{L}.E}$$

éq. diff. du 1er ordre en u_{R_1} avec second membre non nul.

b/ la solution de cette éq. diff est

0,5 $u_{R_1}(t) = U_1(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \rightarrow \begin{cases} U_1 = ? \\ \tau = ? \end{cases}$

à t = 0, $u_{R_1} = 0$

si $t \rightarrow +\infty \Rightarrow u_{R_1} = U_1$

$\frac{du_{R_1}}{dt} = \frac{U_1}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow$ on remplace ds l'éq. diff.

$\rightarrow \frac{U_1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} + \left(\frac{R_1+R_2+r}{L}\right)U_1(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{R_1E}{L}$

$\left(\frac{1}{\tau} - \frac{R_1+R_2+r}{L}\right)U_1e^{-\frac{t}{\tau}} + \left(\frac{R_1+R_2+r}{L}\right)U_1 = \frac{R_1.E}{L}$ $\forall t$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\tau} - \frac{R_1+R_2+r}{L} = 0 \\ \text{et} \\ (R_1+R_2+r)U_1 = R_1E \end{cases}$

circuit RLC série

$E = 10 V$; $C = 4 \mu F = 4.10^{-6} F$

bobine purement inductive $L = 1 H$

$R = 25,4 \Omega$

On charge complètement le condensateur

I/ A t = 0, on bascule K sur la position 2. → $u_R(t)$

1/a/ Au cours du temps, la tension $u_R(t)$ prend des valeurs positives et négatives (alternativement)
(0,25)
$\Rightarrow u_R(t)$ est une grandeur oscillante

b/ Il s'agit d'un régime pseudo-périodique car $u_R(t)$ oscille mais l'amplitude des oscillations diminue au cours du temps.
(0,25)

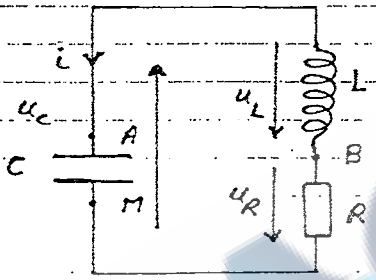
2/ Equation différentielle en u_C?

Loi des mailles

(0,5) $u_{AM} + u_{MB} + u_{BA} = 0$

$u_C + u_R + u_L = 0$

$u_C + Ri + L\frac{di}{dt} = 0$



avec $\begin{cases} i = \frac{dq}{dt} \text{ et} \\ q = C.u_C \end{cases}$

$\Rightarrow i = C\frac{du_C}{dt}$ et $\frac{di}{dt} = C.\frac{d^2u_C}{dt^2}$

$\Rightarrow LC.\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC.\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$

ou $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0$

éq. diff. du second ordre en u_C avec second membre nul.

3/ a/ $q_M = ?$ à t = 0.

à t = 0 le condensateur est chargé et sa charge $q = q_A = C.u_C = CE$

(0,25) $q = C.E = 4.10^{-6}.10 = 4.10^{-5} C > 0$

or $q_M = -q = -CE = -4.10^{-5} C < 0$

b/ la pseudo-période T ?

$\left.\begin{matrix} 5 \text{ div} \rightarrow 5\pi \\ 1 \text{ div} \rightarrow \pi \end{matrix}\right\}$ or $T = 4 \text{ div} = 4\pi ms$

$T = 4\pi ms$.

(0,5)

or la période propre est $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

$T_0 = 2\pi.\sqrt{1.4.10^{-6}} = 2\pi.2.10^{-3} s$

$T_0 = 4\pi.10^{-3} s = 4\pi ms$

$T = T_0 = 4\pi ms \Rightarrow$ amortissement faible.

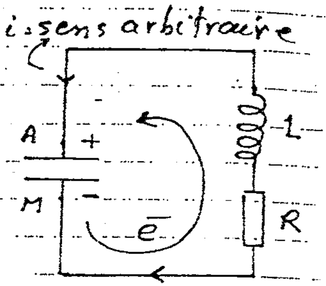
⑤

l'intensité du courant ?

$u_R < 0 \rightarrow i < 0$ car $u_R = Ri$

$i < 0 \Rightarrow$ i circule dans le sens contraire du sens ④ choisi arbitrairement.
(0,5)

- le courant réel i circule de A vers M à travers le circuit



- les électrons circulent dans le sens inverse du courant réel c.à.d. de M vers A à travers le circuit.

4/a/ Expression de l'énergie totale E_T dans le circuit

$E_T = E_C + E_L = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2$

(0,5)
$\frac{dE_T}{dt} = Cu_C\frac{du_C}{dt} + Li\frac{di}{dt}$ or $i = C\frac{du_C}{dt}$

$\frac{dE_T}{dt} = i\left(u_C + L\frac{di}{dt}\right) = i(-Ri) = -R$ d'après l'éq. diff

donc $\frac{dE_T}{dt} = -Ri^2 < 0 \Rightarrow$ E_T est une fonction décroissante

(E_T diminue au cours du temps

b/ à $t_0 = 0$, $u_R = 0 \Rightarrow i = 0 \Rightarrow E_L =$

donc $E_T = E_C + E_L = E_C$

(0,5) l'énergie est purement électrostatique

. à $t_1 = \frac{T}{4}$; $u_R = -u_{Rmax_1} \Rightarrow E_L$ est max

et E_C minimale E_C pratiquement nulle.

donc $E_T = E_C + E_L = E_L$ l'énergie est purement magnétique.

c/ $\Delta E = E_1 - E_0$

(0,5)
$E_0 = \frac{1}{2}C u_{Cmax_0}^2 = \frac{1}{2}C.E^2 = \frac{1}{2}.4.10^{-6}(10)^2$

$= 2.10^{-4} J$

$E_1 = \frac{1}{2}L I_{max_1}^2 = \frac{1}{2}L\left(\frac{u_{Rmax_1}}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{L}{R^2}.u^2_{m}$

$E_1 = \frac{1}{2}.\frac{1}{(25,4)^2}(-5)^2 = 1,9375.10^{-4} J$

$\simeq 1,94.10^{-4} J$

$\Delta E = E_1 - E_0 = (1,94 - 2).10^{-4} J$

$\Delta E = -0,0625.10^{-4} J = -6.10^{-6} J$

$\Delta E \simeq -6.10^{-6} J = -6 \mu J < 0$ cette variation est due à l'énergie therm dissipée par effet joule dans le circ

* $E_T(t=T) = ?$

$E'(\frac{T}{2}) = E_0 - 0{,}06E_0 = 0{,}94\,E_0$

$E(T) = E' - 0{,}06E' = 0{,}94E'$

(0,5) $= 0{,}94(0{,}94E_0) = (0{,}94)^2 E_0$

$= (0{,}94)^2 \cdot 2.10^{-4} = 1{,}7672.10^{-4}\,J$

$\underline{E(T) \simeq 1{,}77.10^{-4} J = 0{,}177\,mJ.}$

* $u_c = ?$ pour $t = T$

$E_T = \frac{1}{2} C u_{Cmax_2}^2$, à $t=T \Rightarrow u_c = u_{Cmax_2}$

$\Longrightarrow u_c = u_{Cmax_2} = \sqrt{\frac{2E_T}{C}}$

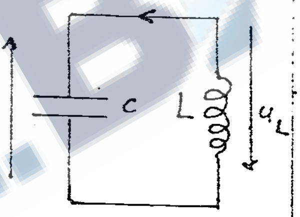
(0,25) $u_c = u_{Cmax_2} = \sqrt{\frac{2.1{,}7672.10^{-4}}{4.10^{-6}}} = 9{,}4V$

$\underline{u_c = u_{Cmax_2}} = 9{,}4\,V$ à $t = T$.

II/ circuit (L, C), $C = 4\,\mu F$
$U = 10V$ $L = 1H$ (pure)

1/ les oscillations se produisent sans agent extérieur (générateur) et sans résistor (amortissement)
(0,25) $\Rightarrow$ <u>les oscillations sont libres non amorties</u> (oscillations sinusoïdales)

2/ a/ éq. diff. en q?
Loi des mailles



$u_c + u_L = 0$

$\frac{q}{c} + L\frac{di}{dt} = 0$

(0,25) or $i = \frac{dq}{dt}$

$\Rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{c}.q = 0$ ou

$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}.q = 0.}$ éq. diff. du second ordre en q avec second membre nul.

b/ la solution de cette équation est:

$q(t) = Q_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi_q)$

(0,5) $\omega_0 = ?$ $Q_{max} = ?$ $\varphi_q = ?$ / à $t=0$ $q = -Q_{max}$

• $\underline{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1.4.10^{-6}}} = 0{,}5.10^3\,rad.s^{-1} = \underline{500\,rad.s^{-1}}$

• $\underline{Q_{max}} = CE = 4.10^{-6}.10 = \underline{4.10^{-5}C}$

• à $t=0$, $\left\{\begin{array}{l} q = Q_{max}\sin\varphi_q \\ q = -Q_{max}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\sin\varphi_q = -1 \Rightarrow \underline{\varphi_q = -\frac{\pi}{2}}$

donc $\underline{q}(t) = 4.10^{-5}\sin(500t - \frac{\pi}{2})$

$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \omega_0 Q_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi_q$

(0,25) $i(t) = \omega_0 Q_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi_q + \frac{\pi}{2})$

$i(t) = 500.4.10^{-5}\sin(500t - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})$

$\underline{i(t) = 0{,}02\sin(500t)}$

$i(t) = I_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi_i)$ avec

$I_{max} = 0{,}02\,A$; $\varphi_i = 0$

$\omega_0 = 500\,rad.s^{-1}$

3/ a/ m.q. E se conserve ?

(0,5) $E = E_c + E_L = \frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}Li$

$\frac{dE}{dt} = Cu_c\frac{du_c}{dt} + Li\frac{di}{dt} = i(\underbrace{u_c + L\frac{di}{dt}}$

$\Rightarrow \underline{\frac{dE}{dt} = 0} \Rightarrow \underline{E = constante}$!!
l'énergie E se conserve

$E = E_{Cmax} = E_{Lmax} = \frac{1}{2C}Q_{max}^2$

$\underline{E} = \frac{1}{2}LI_{max}^2 = \frac{1}{2}.1.(0{,}02)^2 = \underline{2.10^{-}}$

b/ $E_c = f(q)$? $E_L = g(q)$?

(0,25) $\left\{\begin{array}{l} \underline{E_c = \frac{1}{2C}q^2} \quad \text{or} \quad E = E_c + E_L \\ \underline{E_L} = E - E_c = \underline{E - \frac{1}{2C}q^2}\end{array}\right.$

$E_c = E_L \Rightarrow \frac{1}{2C}q^2 = E - \frac{1}{2C}q^2$
$= \frac{1}{2C}Q_m^2 - \frac{1}{2C}q^2$

(0,25) $\Rightarrow 2q^2 = Q_m^2 \Rightarrow q = \pm\frac{Q_m}{\sqrt{2}}$

$q = \pm\frac{4.10^{-5}}{1{,}414} = \pm 2{,}829.10^{-5}C$

$\underline{q = \pm 2{,}83.10^{-5}C}$

c/ les courbes $E_c = f(q)$ et $E_L = g(q)$

$E_c = \frac{1}{2C}q^2$ branche parabolique de concavité dirigé vers le haut ($\frac{1}{2C}$

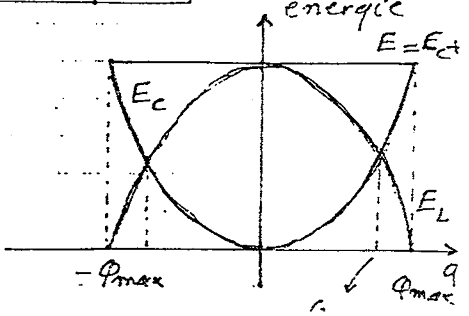
$E_L = -\frac{1}{2C}q^2 + E$

E_L est une branche parabolique de concavité dirigé vers le bas ($-\frac{1}{2C}<$

avec $q \in [-Q_m, Q_m]$

q	$-Q_m$	0	Q_m
E_c	E_{Cmax}	0	E_{Cmax}
E_L	0	E_{Lmax}	0

(0,25)



Ex III

1/ le mouvement de l'aimant
0,5 a' travers la bobine produit
un courant induit : c'est le
phénomene d'induction
électromagnetique

2/ - l'inducteu est l'aimant
0,5 - l'induit est la bobine

3/ - Energie lumineuse (rayomant)
dû à $\rightarrow$ E_c électrostatique dans le condensateu
0,5 E_L magnetique dans la bobine

4/ Les avantages de cette lampe
a' induction
0,5 - sans pile
- sans pièce de rechange

Lycée El Khalij Sfax *Professeur : Mr Mourad Fgaier*	*Devoir de contrôle N°2* *Sciences physiques*	*Durée : 2h*	*Date :* *19-01-12*	*Classe :* *4ème Math*

- *Le sujet comporte :*

251
6

Chimie : ***- Loi de modération.***
- Loi d'action de masse appliquée aux réactions acide- base.

Physique : ***-Oscillations électriques libres non amorties.***
-Oscillations électriques forcées.

- ***Le sujet est réparti sur 4 pages numérotées de 1 à 4.***
- ***La page -4- est à remplir et à remettre avec la copie.***

CHIMIE : (7 points)

Exercice N°1 : (3,25 points)

Dans un récipient préalablement vide de volume V, on mélange **0,8 mol** de monoxyde de carbone CO(gaz) et **1,5 mol** de dihydrogène H_2 (gaz) à une température T_1.

L'équation de la réaction ayant lieu est : $CO_{(gaz)} + 2\ H_{2(gaz)} \rightleftarrows CH_3OH_{(gaz)}$.

Un dispositif approprié permet de mesurer le nombre de mole de H_2 (gaz) restant à un instant t.
Les mesures ont montré que lorsque l'équilibre est atteint le nombre de mole de dihydrogène restant est égal à **0,9 mol**.

1°/ Déterminer la valeur du taux d'avancement final de la réaction à la température T_1.

2°/ L'équilibre précédent étant atteint, on augmente la température à pression constante on constate que le nombre de mole de dihydrogène présent à la fin de la réaction augmente.
Préciser, en le justifiant, le caractère énergétique de la réaction de synthèse du méthanol.

3°/ La température étant maintenue constante et égale à T_1. Préciser, en le justifiant, l'effet d'une augmentation de la pression sur l'équilibre et sur la constante d'équilibre de la réaction.

4°/ Comment varie la quantité de monoxyde de carbone CO présent à l'équilibre, si on additionne à température et volume constants du dihydrogène H_2? Justifier la réponse.

Exercice N°2 : (3,75 points)

Un mélange de volume V contient à l'état d'équilibre dynamique les entités chimiques suivantes :

Entité chimique	HF	$C_2O_4^{2-}$	$HC_2O_4^-$	F^-
Quantité de matière (mol)	10^{-2}	10^{-2}	$2,5.10^{-3}$	4.10^{-3}

1°/
a- Donner les couples acide base formés à partir des quatre entités chimiques inscrites dans le tableau.
b- Ecrire l'équation de la réaction qui met en jeu les deux couples tel que $HC_2O_4^-$ est un réactif.
c- Calculer la constante d'équilibre K de la réaction.
d- Classer les deux couples selon la force croissante de leurs bases.

2°/ On ajoute au système en équilibre **$1,5.10^{-3}$ mol** de $HC_2O_4^-$ à la même température.
a- Indiquer, en justifiant la réponse, le sens d'évolution spontané de la transformation.
b- Calculer la nouvelle composition du mélange à l'équilibre.

PHYSIQUE (13 points)

Exercice N°1 : (6,5 points)

259

On étudie les oscillations libres non amorties d'un oscillateur électrique formé d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance **L = 0,2 H** et de résistance nulle. Figure-1-.
Le condensateur est initialement chargé sous une tension U_0.

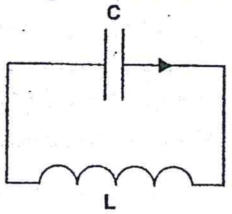


Figure-1-

1°/

a- Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension instantanée $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

b- Vérifier que $u_C(t)$ [illegible] n($\frac{1}{\sqrt{LC}}$ t + φ_{u_C}) est solution de l'équation différentielle précédente.

2°/ Les courbes ([illegible] la figure-2- représentent l'évolution en [illegible] temps de la tension instantanée u [illegible] bornes du condensateur et de l'intensité ins [illegible] née i(t) du courant qui traverse le circuit.

a- Montrer que la courbes (1) correspond à $u_C(t)$.

b- Soit I_m : l'intensité maximale de i(t).
Montrer que la capacité C du condensateur est exprimée par : $C = \frac{L.I_m^2}{U_0^2}$. Calculer sa valeur.

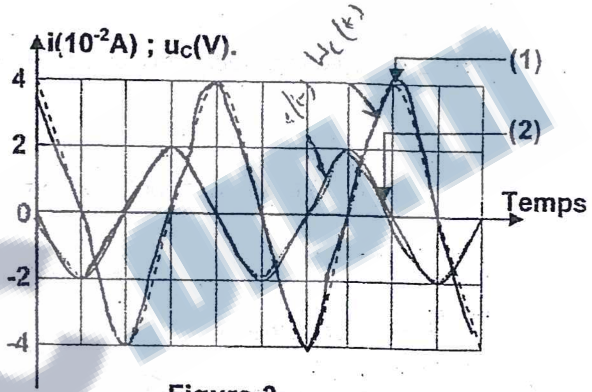


Figure-2-

3°/

a- Déterminer l'expression de i(t) et celle de la charge q(t) du condensateur. On précisera pour chacune de ces grandeurs l'amplitude, la pulsation et la phase initiale.

b- Etablir la relation liant q^2,i^2, $\omega_0^{\ 2}$ et Q_0^2 tel que ω_0 et Q_0 sont respectivement la pulsation propre de l'oscillateur et la charge maximale acquise par le condensateur.

c- Déduire les valeurs de i lorsque q = $\frac{1}{\sqrt{2}}Q_0$.

4°/

a- Montrer que l'énergie électromagnétique totale E emmagasinée par l'oscillateur étudié est constante.

b- Calculer sa valeur.

5°/ En exploitant le caractère conservatif de l'oscillateur étudié retrouver l'équation différentielle établie précédemment.

6°/

a- Montrer que l'énergie électrostatique $E_e(t)$ emmagasinée dans le condensateur et l'énergie magnétique $E_m(t)$ s'écrivent sous la forme de :

$$E_e(t) = \frac{1}{2}E\,[1 - \cos(2\omega_0 t + \pi)] \text{ et } E_m(t) = \frac{1}{2}E\,[1 + \cos(2\omega_0 t + \pi)].$$

b- La courbe de la figure-3- de la page-4- représente l'évolution en fonction du temps de l'une de ces deux formes d'énergies. Laquelle? Justifier.

c- Préciser l'échelle sur la figure-3- de la page-4- et tracer la courbe correspondante à l'autre forme d'énergie.

253

Exercice N°2 : (6,5 points)

Le circuit électrique de la figure-4- comporte en série :
Un résistor de résistance **R = 80Ω**.
Une bobine d'inductance L et de résistance r.
Un condensateur de capacité **C = 16µF**.
Un ampèremètre de résistance négligeable.
Un générateur G de basse fréquence impose aux bornes de l'ensemble une tension alternative sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(2\pi Nt + \varphi_u)$ de fréquence N réglable et d'amplitude U_m constante.
Lorsqu'on ajuste la fréquence N à la valeur **N_1=50Hz**, un oscilloscope bicourbe à deux entrées Y_1 et Y_2 permet de visualiser les oscillogrammes de la figure -5-.

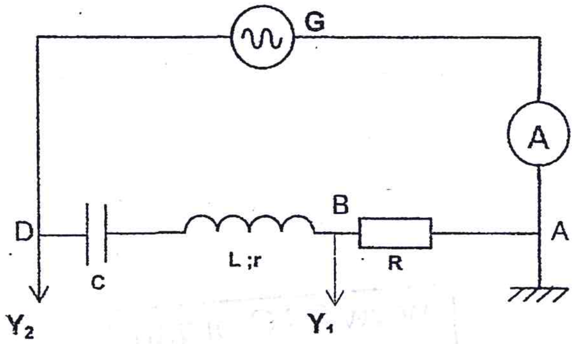


Figure-4-

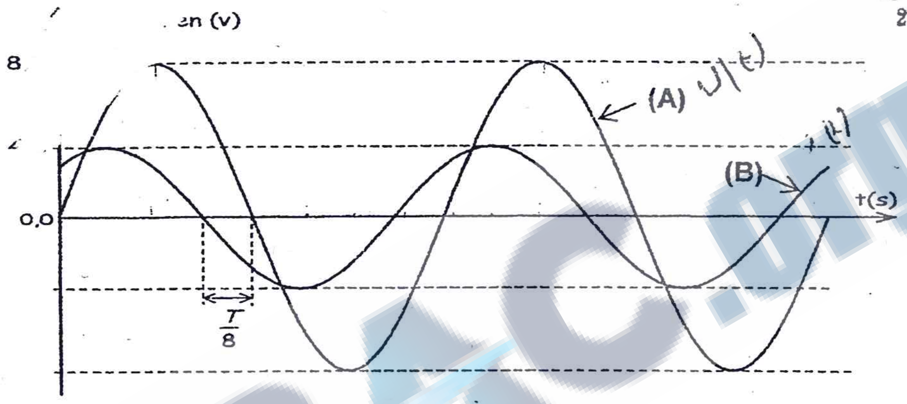


Figure-5-

1°/ En utilisant les oscillogrammes de la figure-5- :
- a- Montrer que l'oscillogramme (A) correspond à la tension u(t).
- b- Quelle grandeur électrique, autre que la tension, peut être déterminée à partir de l'oscillogramme (B)?
- c- Déterminer le déphasage $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ de la tension u(t) par rapport à i(t).
  Déduire si le circuit est inductif, capacitif ou résistif.
- d- Préciser les valeurs U_m , U_{Rm} et I_m . Calculer U_{Cm}.

2°/ L'équation différentielle reliant i(t), sa dérivée première $\frac{di}{dt}$ et sa primitive ∫idt est :

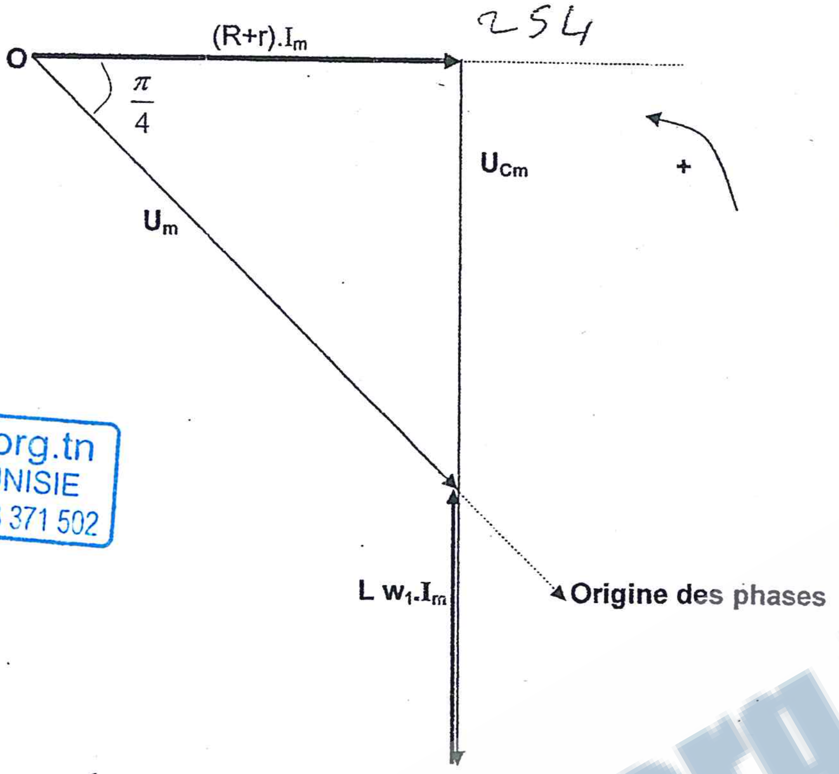
$$L\frac{di}{dt} + (R+r)\,i(t) + \frac{1}{C}\int i\,dt = U_m \sin(2\pi N t + \varphi_u)$$

Cette équation différentielle admet comme solution $i(t) = I_m \sin(2\pi Nt + \varphi_i)$
- a- Compléter la construction de Fresnel sur la figure -6- de la page -4- sur laquelle est représentée le vecteur qui correspond à la fonction sinusoïdale $\frac{1}{C}\int i\,dt$: Echelle : **1cm** pour **1V.**
- b- Déduire les valeurs de L et r.

3°/ Lorsqu'on ajuste la fréquence N du générateur à la valeur N_2 différente de N_1, on constate que :
$U_{BA} = 2\,.U_{DB}$.
- a- Montrer que le circuit est en état de résonance d'intensité.
- b- Déterminer l'expression de l'intensité du courant i(t).
- c- Calculer le rapport $\frac{U_{C_m}}{U_m}$. De quel phénomène s'agit-il ?
- d- Représenter dans le même système d'axes les tensions u(t) et $u_R(t)$ pour $N=N_2$.

Suite d'ex n° 2

254



0,75

(Tout ou rien)

b- (R+r).Im = 6V alors $r = \frac{6}{Im}$-R AN: $r = \frac{6}{0{,}05}$-80 = 40Ω. 0,25

L $w_1.I_m$= 3,9V alors $L = \frac{3{,}9}{w_1.I_m}$ AN: $L = \frac{3{,}9}{100\pi.0{,}05}$=0,248H ≈ 0,25H. 0,25

3°/

a- On a $U_{BA} = U_{DB} \Rightarrow Z_{BA}\,I = Z_{DB}\,I \Rightarrow Z_{BA} = Z_{DB} \Rightarrow R = 2\sqrt{r^2 + (\frac{1}{Cw_2} - Lw_2)^2} \Rightarrow$

$R^2 = 4\, r^2 + (\frac{1}{Cw_2} - Lw_2)^2 \Rightarrow (\frac{1}{Cw_2} - Lw_2)^2 = R^2 - 4\, r^2$. AN: $(\frac{1}{Cw_2} - Lw_2)^2 = 80^2 - 4 \times 40^2 = 0 \Rightarrow$ 0,5

$\frac{1}{Cw_2} - Lw_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{Cw_2} = Lw_2 \Rightarrow w_2 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = w_0$ d'où le circuit est en état de résonance d'intensité.

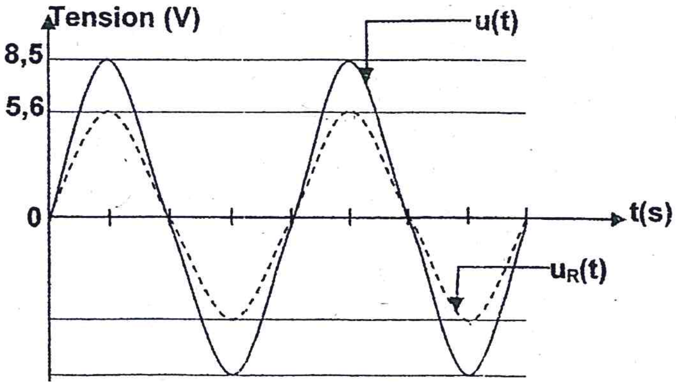
b- i(t)= $I_m \sin(w_2\, t + \varphi_i)$. Avec $I_m = \frac{U_m}{R+r}$. AN : $I_m = \frac{8{,}5}{80+40}$ = 0,07A, $w_2 =$

$w_2 = \frac{1}{\sqrt{0{,}25 \times 16.10^{-6}}}$ =500 rad.s^{-1} et $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$ alors $\varphi_i = \varphi_i =$

i(t)= 0,07 sin(500t) (A). 0,5

c- $\frac{U_{Cm}}{U_m} = \frac{9{,}94}{8{,}5}$ = 1,17 > 1 alors il ya le phénomène de surtension. 0,5

d- U_{Rm}= RI_m . AN : U_{Rm}=80× 0,07= 5,6 A et $w_2 = w_0$ = 500 rad.s^{-1}> $w_1 = 100\pi$ rad.s^{-1}. 0,5



0,5

Lycée secondaire El Khalij Sfax *Professeur:* • *Mr Rekik Fathi*	Sciences physiques **Correction du devoir de contrôle N°2** **(2011 . 2012)**

CHIMIE : (9 points)

Exercice N°1 : (3,25 points)

1°/ $CO(g) + 2H_2(g) \rightleftharpoons CH_3OH(g)$

	CO(g)	2 H₂ (g)	CH₃OH (g)	
t=0s	0,8	1,5	0	mol.
t	0,8 - x	1,5 - 2x	x	mol.
t=t_f	0,8- x_f	1,5 - 2x_f	x_f	mol.

• Détermination de X_m : On suppose que la réaction est totale et on a $\frac{n_{CO)_0}}{1} > \frac{n_{H_2)_0}}{2}$ alors

$1,5 - 2x_m = 0$ d'où $x_m = 0,75$ mol.

• Détermination de X_f : $n_{H_2)_{restant}} = 1,5 - 2x_f = 0,9$ mol d'où $X_f = 0,3$ mol.

• Détermination de τ_f : $\tau_f = \frac{x_f}{x_m}$. AN : $\tau_f = \frac{0,3}{0,75} = 0,4$. 0,75

2°/ Une augmentation de la température provoque l'augmentation du nombre de moles de dihydrogène restant c-a-d que l'équilibre a évolué dans le sens inverse qui est endothermique car d'après la loi de modération un système est en état d'équilibre à pression constante, une augmentation de la température favorise l'évolution du système dans le sens de la réaction endothermique par suite le sens direct (synthèse de méthanol) est exothermique. 0,75

3°/ Un système est en état d'équilibre à température et à volume constants, une augmentation de la pression favorise le réaction qui tend à diminuer le nombre de mole du mélange gazeux (le sens direct) alors que la constante d'équilibre K reste constante, car elle dépend que de la température. 1

4°/ Un système est en état d'équilibre à température et à volume constants, une augmentation de concentration de H_2 favorise le réaction qui tend à diminuer la concentration de H_2 (sens direct) par suite la quantité de monoxyde de carbone CO diminue. 0,75

Exercice N°2 : (3,75 points)

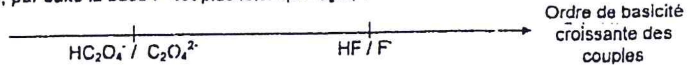
1°/

a- HF / F^- ; $HC_2O_4^- / C_2O_4^{2-}$. 0,5

b- $HC_2O_4^- + F^- \rightleftharpoons C_2O_4^{2-} + HF$. 0,5

c- $$K = \pi_{éq} = \frac{[C_2O_4^{2-}][HF]}{[HC_2O_4^-][F^-]} = \frac{\frac{n_{C_2O_4^{2-}}}{\cancel{V}} \times \frac{n_{n_{HF}}}{\cancel{V}}}{\frac{n_{HC_2O_4^-}}{\cancel{V}} \times \frac{n_{n_F}}{\cancel{V}}} = \frac{n_{C_2O_4^{2-}} \times n_{n_{HF}}}{n_{HC_2O_4^-} \times n_{n_{F^-}}}$$ AN : $K = \frac{10^{-2} \times 10^{-2}}{2,5.10^{-3} \times 4.10^{-3}} = 10$. 0,75

d- $K = 10 \succ 1$, alors les espèces figurés dans les réactifs sont plus forts que ceux figurés dans les produits, par suite la base F^- est plus forte que $C_2O_4^{2-}$. 0,5



2°/

a- D'après la loi de modération relative aux concentrations, toute augmentation de la concentration de l'un des constituants d'un système en état d'équilibre chimique, à pression et température constante favorise le sens qui tend à diminuer la concentration de ce constituant ; par suite l'ajout de $1,5.10^{-3}$ ~~mol de $HC_2O_4^-$ au système en équilibre favorise le sens directe.~~ 0,5

b- $HC_2O_4^- + F^- \rightleftharpoons C_2O_4^{2-} + HF$

	HC₂O₄⁻	F⁻	C₂O₄²⁻	HF	
A t=0	4.10^{-3}	4.10^{-3}	10^{-2}	10^{-2}	(En mol)
A t_f	$4.10^{-3} - x_f$	$4.10^{-3} - x_f$	$10^{-2} + x_f$	$10^{-2} + x_f$	(En mol)

$K = \pi_{éq} = \frac{n_{C_2O_4^{2-}} \times n_{n_{HF}}}{n_{HC_2O_4^-} \times n_{n_F}}$ alors $K = \frac{(10^{-2} + x_f)^2}{(4.10^{-3} - x_f)^2}$ par suite $\sqrt{10} = \frac{(10^{-2} + x_f)}{(4.10^{-3} - x_f)}$

d'où $0,0026 - 4,16 \times xf = 0$ on trouve alors $xf = 6,24.10^{-4} mol$.

Composition molaire du mélange final :

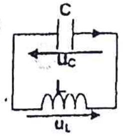
$n_{HC_2O_4^-)f} = n_{F^-)f} = 4.10^{-3} - x_f$.AN : $n_{HC_2O_4^-)f} = n_{F^-)f} = 3,37.10^{-3} mol$. 1

$n_{C_2O_4^{2-})f} = n_{HF)f} = 10^{-2} + x_f$.AN : $n_{C_2O_4^{2-})f} = n_{HF)f} = 1,06.10^{-2} mol$.

PHYSIQUE : (13 points)

Exercice N°1 : (6,5 points)

1°/



a- D'après la loi de maille $u_L(t) + u_C(t) = 0$ alors $L\frac{di}{dt} + u_C = 0$ or $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt}$

alors $LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$ alors $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C = 0$. 0,5

255

b- On a : $u_C(t) = U_0.\sin(\frac{1}{\sqrt{LC}}.t + \varphi_{U_C})$ alors $\frac{du_C}{dt} = U_0\frac{1}{\sqrt{LC}}.\cos(\frac{1}{\sqrt{LC}}.t + \varphi_{U_C})$

alors $\frac{d^2u_C}{dt^2} = -U_0\frac{1}{LC}.\sin(\frac{1}{\sqrt{LC}}.t + \varphi_{U_C})$

$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C = -U_0\frac{1}{LC}.\sin(\frac{1}{\sqrt{LC}}.t + \varphi_{U_C}) + U_0\frac{1}{LC}.\sin(\frac{1}{\sqrt{LC}}.t + \varphi_{U_C}) = 0$.

$u_C(t) = U_0.\sin(\frac{1}{\sqrt{LC}}.t + \varphi_{U_C})$ est une solution de l'équation différertielle précédente. 0,5

2°/

a- On a $u_C(t)$ est en quadrature retard par rapport à i(t) or la courbe (1) atteint sa valeur max aprés la courbe (2) d'où la courbe (1) correspond à la tension $u_C(t)$. 0,25

b- On a $I_m = Q_0 w_0 \Rightarrow I_m^2 = Q_0^2 w_0^2 = (C^2 U_0^2) \times (\frac{1}{LC}) = \frac{C.U_0^2}{L} \Rightarrow C = \frac{LI_m^2}{U_0^2}$

. AN: $C = \frac{0,2 \times (2.10^{-2})^2}{4^2} = 5.10^{-6}$ F. 0,5

3°/

a- • $i(t) = I_m.\sin(\omega_0.t + \varphi_i)$ or $I_m = 2.10^{-2}$A ; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. AN : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0,25 \times 5.10^{-6}}} = 10^3$ rad.s⁻¹.

à t=0 s, $i = I_{max}.\sin\varphi_i = 0$ alors $\sin\varphi_i = 0$ alors $\varphi_i = 0$ rad ou $\varphi_i = \pi$ rad or à t=0 s, la courbe i(t) est décroissante alors $\frac{di(t)}{dt} < 0$ alors $\cos\varphi_i < 0$ par suite $\varphi_i = \pi$ rad d'ou $i(t) = 2.10^{-2}\sin(10^3.t + \pi)$ (A). 0,5

• $q(t) = c.u_C(t) = C.U_0.\sin(\omega_0.t + \varphi_{u_C})$ or $\varphi_{u_C} = \varphi_q$ donc t=0 : $q = Q_0.\sin\varphi_q = Q_0$ alors $\sin\varphi_q = 1$ d'où

$\varphi_q = \frac{\pi}{2}$ rad d'où $q(t) = 5.10^{-6}.4.\sin(10^3.t + \frac{\pi}{2})$ (C). 0,5

b- On a : $q(t) = Q_0.\sin(\omega_0.t + \varphi_q)$ et $i(t) = Q_0\,\omega_0.\cos(\omega_0.t + \varphi_q)$ alors

$q^2(t) = Q_0^2.\sin^2(\omega_0.t + \varphi_q)$ et $i^2(t) = Q_0^2\omega_0^2.\cos^2(\omega_0.t + \varphi_q)$ alors

$\frac{q^2(t)}{Q_0^2}$ =sin²(ω_0.t + φ_q) et $\frac{i^2(t)}{Q_0^2\omega_0^2}$ = cos²(ω_0.t + φ_q) alors $\frac{q^2(t)}{Q_0^2} + \frac{i^2(t)}{Q_0^2\omega_0^2}$ =1 alors

$\frac{\omega_0^2 q^2(t)+i^2(t)}{Q_0^2\omega_0^2}$ =1 alors $\omega_0^2 q^2(t)+i^2(t) = Q_0^2\omega_0^2$ alors $i^2(t) = -\omega_0^2 q^2(t) + Q_0^2\omega_0^2$. 0,5

c- Si q= $\frac{1}{\sqrt{2}}$ Q₀ alors $i^2 = -\frac{1}{2}\omega_0^2\ Q_0^2 + Q_0^2\omega_0^2 = \frac{1}{2}\omega_0^2\ Q_0^2$ alors $i = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0 Q_0$.

AN : $i = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(2.10^{-6}\times10^3) = \pm 1{,}414.10^{-2}$A. 0,5

4°/ a- On a: $\xi = \xi_e + \xi_m = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}$L. i².

$\frac{d\xi}{dt} = \frac{q}{c}\,i + L.\,I.\,\frac{di}{dt} = i.(\frac{q}{c} + L.\frac{di}{dt}) = i.(\frac{q}{c} + L.\frac{d^2q}{dt^2})$ or d'après l'équation différentielle on a :

$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{c} = L\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{C}u_C = 0$ 0,5

alors l'énergie totale est conservée. $\frac{d\xi}{dt}$ d'où

b- A t=0s, ona u$_C$= U$_{cm}$ alors q= Q₀ et i=0 alors $\xi = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$ .AN : $\xi = \frac{1}{2}\frac{2.10^{-5}}{5.10^{-6}} = 4.10^{-5}$J. 0,25

5°/ On a : ξ est constante alors $\frac{d\xi}{dt}$ =0 alors $\frac{d\xi}{dt} = i.(\frac{q}{c} + L.\frac{d^2q}{dt^2})$=0 or i≠0 d'où $(\frac{q}{c} + L.\frac{d^2q}{dt^2})$=0 alors

$L\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{C}u_C = 0$ alors $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C = 0$. 0,5

6°/

a- • $\xi_e(t) = \frac{1}{2}\frac{q(t)^2}{C}$ or q(t) = Q₀.sin (ω_0.t + φ_q) alors $\xi_e(t) = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}\sin^2(w_0.t + \varphi_q)$ or

sin²(α)=$\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$ d'où $\xi_e(t) = \frac{1}{4}\frac{Q_0^2}{C}\left[1-\cos(2w_0.t+2\varphi_q)\right]$. on a E=$\frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$ et $\varphi_q = \varphi_{u_C} = \frac{\pi}{2}$ rad

par suite $\xi_e(t) = \frac{E}{2}\left[1-\cos(2w_0.t+\pi)\right]$. 0,25

• $\xi_m(t) = \frac{1}{2}Li^2$ or i(t) = Q₀ w₀ cos(ω_0.t + φ_q) alors $\xi_m(t) = \frac{1}{2}L.Q_0^2w_0^2\cos^2(w_0.t+\varphi_q)$ or

cos²(α)=$\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$ et L. $w_0^2 = \frac{1}{C}$ d'où $\xi_m(t) = \frac{1}{4}\frac{Q_0^2}{C}\left[1+\cos(2w_0.t+2\varphi_q)\right]$. on a E=$\frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$ et

$\varphi_q = \varphi_{u_C} = \frac{\pi}{2}$ rad par suite $\xi_m(t) = \frac{E}{2}\left[1+\cos(2w_0.t+\pi)\right]$. 0,25

b- A t=0s, on a U$_C$= U₀ et i=0 alors ξ_m = 0 et $\xi_C = \xi_{C\max} = \frac{1}{2}$C U₀² d'où la courbe de la figure-3- correspond à $\xi_e(t)$. 0,5

c- On a $\xi_e(t)$ est périodique et de période $T_{\xi_e(t)}\ \frac{T_0}{2} = \frac{2\pi\sqrt{LC}}{2} = \pi\sqrt{LC}$.

AN : $T_{\xi_e(t)} = \pi\sqrt{0{,}2\times5.10^{-6}} = \pi.10^{-3}$s = π m.s. 0,5

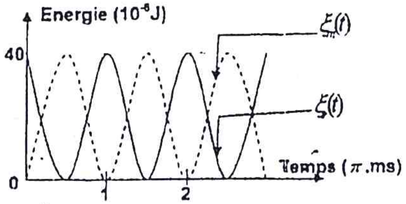


Figure-2-

Exercice N°2 : (6,5 points)

1°/

a- on a U$_m$= Z I$_m$, avec Z= $\sqrt{(R+r)^2 + (\frac{1}{Cw} - Lw)^2}$ et U$_{Rm}$= Z$_R$ I$_m$, avec Z$_R$= R alors Z > Z$_R$ par suite:

U$_m$ > U$_{Rm}$. Or Um$_{courbe\,(A)}$ > Um$_{courbe\,(B)}$ alors la courbe (A) correspond à la tension u(t). 0,5

b- La grandeur électrique qu'on peut déterminer à partir du l'oscillogramme (B) est i(t) puisque

u$_R$(t) = R. i(t) d'où i(t) = $\frac{u_R(t)}{R}$ et R=Constante >0 alors u$_R$(t) et i(t) sont deux fonctions sinusoïdales

synchrones et en phase ($\varphi_{u_R} = \varphi i$). 0,25

c- Δφ = $\varphi_u - \varphi_{u_R} = \varphi_u - \varphi i < 0$ puisque u$_R$(t) est en avance de phase par rapport à u(t) (u$_R$(t) atteint

sa valeur maximale avant u(t)) par suite Δφ = $\varphi_u - \varphi i$ =- w .Δt = $-\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{8} = -\frac{\pi}{4}rad$. 0,5

Puisque Δφ = $\varphi_u - \varphi i = -\frac{\pi}{4}rad < 0$ alors le circuit est capacitif. 0,25

d- U$_m$ = 8,5V ; U$_{Rm}$ = 4V. 0,25

U$_{Rm}$= R . I$_m$ alors $I_m = \frac{U_{Rm}}{R}$ AN : $I_m = \frac{4}{80} = 0{,}05A$. 0,5

$U_{Cm} = \frac{I_m}{2\pi N_1 C}$ AN : $U_{Cm} = \frac{0{,}05}{100\pi.16.10^{-6}}$ d'ou U$_{Cm}$ = 9,947V≈9,95V. 0,5

256

2°/

a-

$$\begin{array}{ccccccc} L\frac{di}{dt} & + & (R+r)\,i(t) & + & \frac{1}{C}\int i\,dt & = & U_m\sin(2\pi N t + \varphi_u) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix} LW_1.Im \\ \varphi_i + \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} & + & \overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix} (R+r).Im \\ \varphi_i \end{pmatrix} & + & \overrightarrow{V_3}\begin{pmatrix} U_{Cm} = \frac{Im}{C.W_1} \approx 9{,}95V \\ \varphi_i - \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} & = & \overrightarrow{V}\begin{pmatrix} U_m = 8{,}5V \\ \varphi u \end{pmatrix} \end{array}$$

Avec : w₁ = 100 π rad.s⁻¹.

U(t=0) = U$_m$sin (φ_u)=0 alors φ_u =0 ou φ_u = π rad.

Puisque u(t) est croissante à t=0 alors cos (φ_u)>0 donc φ_u =0 et par suite $\varphi i = \frac{\pi}{4}rad$.

A S 2012 – 2013 **4^{eme} M-Sc**	**Résumé du chapitre** **Nombres complexes**	**Prof : MOALLA MOHAMED**

$Z \in \mathbb{C}, \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 / Z = x + i y$; x : ***partie réelle*** ; y : ***partie imaginaire***

$\overline{Z} = x - i y$ est le ***conjugué*** de Z

$\overline{Z+Z'} = \overline{Z} + \overline{Z'}$; $\overline{ZZ'} = \overline{Z}\overline{Z'}$; $\overline{(\frac{Z}{Z'})} = \frac{\overline{Z}}{\overline{Z'}}$; $\overline{Z^n} = \overline{Z}^n$; $Z\overline{Z} = x^2 + y^2$

$Z + \overline{Z} = 2x$ et $Z - \overline{Z} = 2y$

Z est réel $\Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow \overline{Z} = Z$

Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow \overline{Z} = -Z$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$;

M (x , y) ou M(Z) ; $|Z| = OM = \sqrt{x^2+y^2}$; $|Z|^2 = Z\overline{Z}$

$A(Z_A)$, $B(Z_B)$; $\overrightarrow{AB}\ (Z_B - Z_A)$ et $AB = |Z_B - Z_A|$

FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

$Z = x + i y$, $|Z| = \sqrt{x^2+y^2} = r$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$ et $\sin\theta = \frac{y}{r}$ où θ est l'argument de Z

$$Z = \underset{\Uparrow}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \underset{\Uparrow}{[r, \theta]} = \underset{\Uparrow}{r e^{i\theta}}$$

$\underline{[1, \theta] = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}}$

Forme trigonométrique ***forme polaire*** ***forme exponentielle***

Exemple : $a = 1 + i$; $|a| = \sqrt{2}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $\theta \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

$$a = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right) = [\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}] = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$1 = [1, 0] = e^{i0}$; $(-1) = [1, \pi] = e^{i\pi}$; $i = [1, \frac{\pi}{2}] = e^{i\frac{\pi}{2}}$; $(-i) = [1, -\frac{\pi}{2}] = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$Z = [r, \theta]$ et $\alpha > 0$; $\alpha Z = [\alpha r, \theta]$; $-\alpha Z = [\alpha r, \theta + \pi]$; $i\alpha Z = [\alpha r, \theta + \frac{\pi}{2}]$, $-i\alpha Z = [\alpha r, \theta - \frac{\pi}{2}]$

$\overline{[r,\theta]} = [r, -\theta]$	$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
$-[r, \theta] = [r, \theta + \pi]$	$-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$
$[r, \theta].[r', \theta'] = [rr', \theta + \theta']$	$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
$\frac{1}{[r,\theta]} = [\frac{1}{r}, -\theta]$	$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
$\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']} = [\frac{r}{r'}, \theta - \theta']$	$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
$[r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$	$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$
$Cos\,\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$	$2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$
$Sin\,\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$	$2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$
$1 + e^{i\theta} = 2\cos(\frac{\theta}{2})\, e^{i\frac{\theta}{2}}$ *(à démontrer)*	$1 - e^{i\theta} = -2i\sin(\frac{\theta}{2})\, e^{i\frac{\theta}{2}}$ *(à démontrer)*

Résumé de Cours Continuité et limites

Rappels

Branches infinies

Asymptote horizontale :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme [a ; + ∞ [où a est un réel et L un réel donné .

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ alors la droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale à la courbe Cf en + ∞ .

Asymptote verticale :

Soit f une fonction .

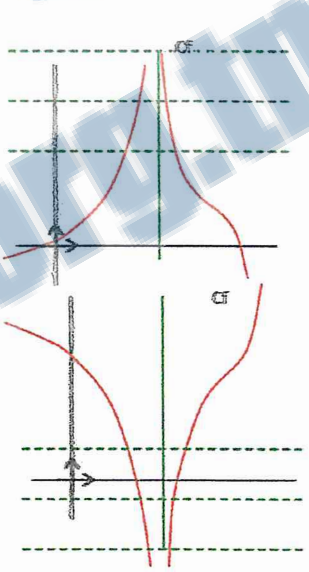
- Si « *f (x) est aussi grand que l'on veut dès que x est assez proche de a* » , alors on dit que f a pour limite + ∞ en a .

On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

On définit de la même façon $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

- On dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe Cf .



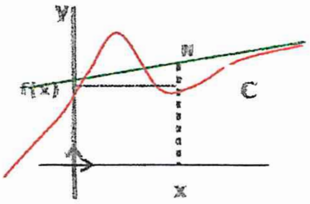
Asymptote oblique :

Soit a ($a \neq 0$) et b deux réels et C la courbe représentant une fonction f dans un repère.

Dire que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à C en + ∞ (respectivement en – ∞) revient à dire que :

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

$$\left(\text{respectivement } \lim_{x \to -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0\right)$$



Continuité et limite d'une fonction composée

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble I et g une fonction définie sur ensemble J tel que $f(I) \subset J$.

La fonction notée $g \circ f$, définie sur I par $g \circ f(x) = g[f(x)]$, est appelée fonction composée de f et g.

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant le réel $f(a)$.

Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g\circ f$ est continue en a.

Conséquence :

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur I} \\ \text{g est continue sur J} \\ f(I)\subset J \end{cases}$ alors $g\circ f$ est continue sur I.

Théorème :

Soit f et g deux fonctions. Soit a, b *et* c finis ou infinis.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x)=c$ alors $\lim\limits_{x\to a} g\circ f(x)=c$.

Limites et ordre

Théorème :

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I sauf peut être en un réel a de I.

Soit deux réels ℓ et ℓ'.

Si $f(x)\le g(x)$ pour tout $x\in I^*_{x_0}$ et si $\lim\limits_{a} f=\ell$ et $\lim\limits_{a} g=\ell'$, alors $\ell\le\ell'$.

Si $h(x)\le f(x)\le g(x)$ pour tout $x\in I^*_{x_0}$ et si $\lim\limits_{a} h=\lim\limits_{a} g=\ell$, alors $\lim\limits_{a} f=\ell$.

Si $f(x)\ge g(x)$ pour tout $x\in I^*_{x_0}$ et si $\lim\limits_{a} g=+\infty$, alors $\lim\limits_{a} f=+\infty$.

Si $f(x)\le g(x)$ pour tout $x\in I^*_{x_0}$ et si $\lim\limits_{a} g=-\infty$, alors $\lim\limits_{a} f=-\infty$.

Ces résultats restent aussi valables lorsqu'on remplace a par $\pm\infty$ ou par a^+ ou a^-.

Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème :

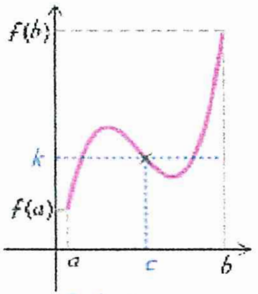
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires :

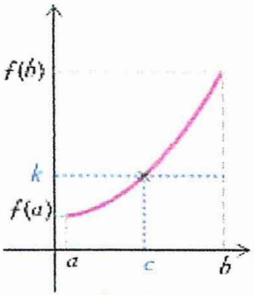
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.

Soient $a\in I$ et $b\in I$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$



f n'est pas strictement monotone



f est strictement monotone

Si de plus f est strictement monotone sur I, alors c est unique.

Image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue :

Théorème :

Si f est continue sur $[a,b]$ alors $f([a,b])=[m,M]$

Où m est le minimum de f sur $[a,b]$ et M est le maximum de f sur $[a,b]$.

Cas des fonctions monotones :

Théorème :

* Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a,b[$ (b fini ou infini).

Si f est croissante et majorée alors f possède une limite finie en b.

Si f est croissante et non majorée alors f tend vers $+\infty$ en b.

* Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a,b[$ (b fini ou infini) .

Si f est décroissante et minorée alors f possède une limite finie en b .

Si f est décroissante et non minorée alors f tend vers $-\infty$ en b.

Théorème :

L'image d'un intervalle I par une fonction continue et monotone sur I est un intervalle de même nature.

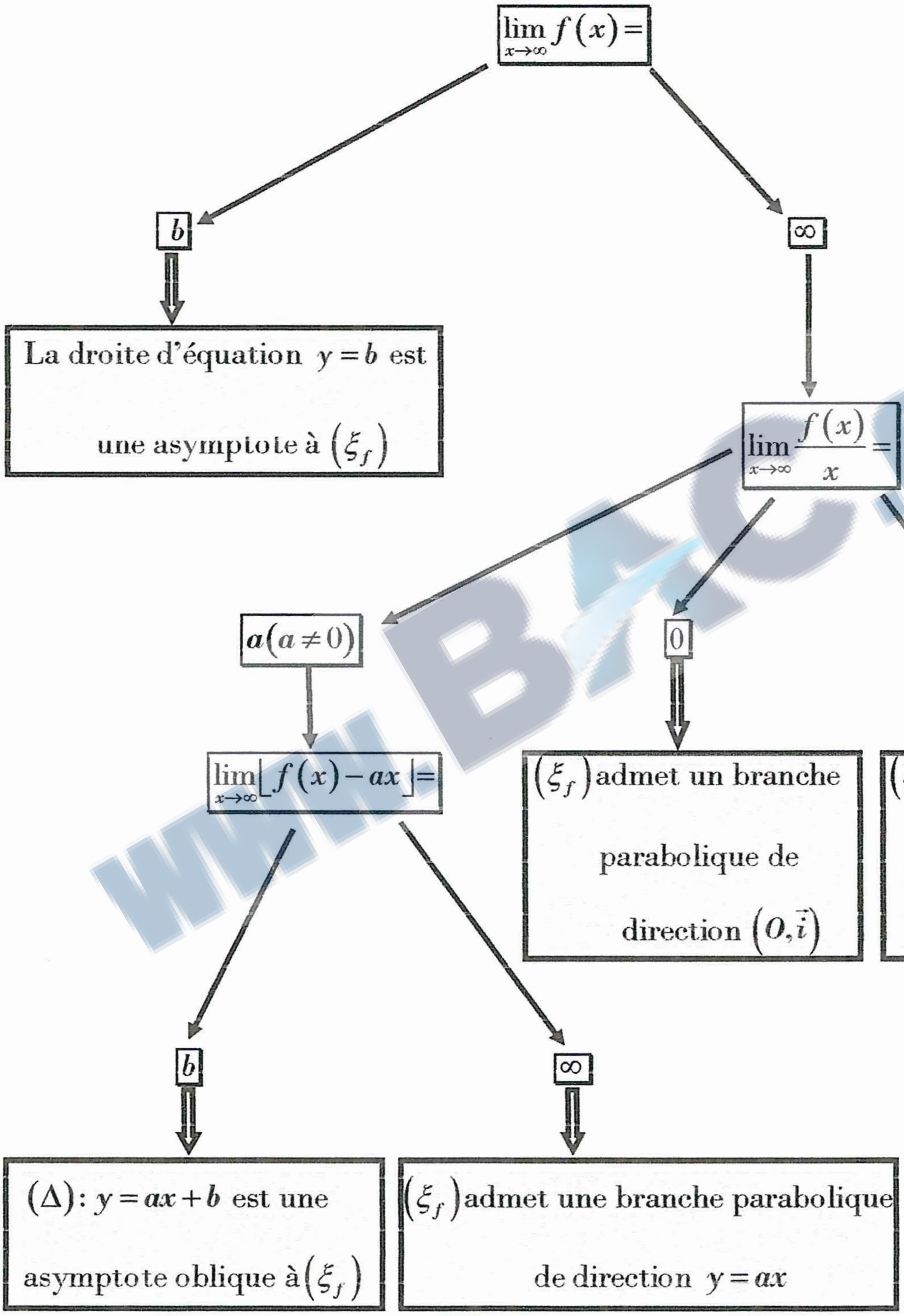
Conséquence :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Si f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I.

Intervalle I	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$I=[a,b]$	$f(I)=[f(a),f(b)]$	$f(I)=[f(b),f(a)]$
$I=[a,b[$	$f(I)=\left[f(a),\lim\limits_{b^-} f\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{b^-} f,f(a)\right]$
$I=[a,+\infty[$	$f(I)=\left[f(a),\lim\limits_{+\infty} f\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{+\infty} f,f(a)\right]$
$I=]a,b[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{a^+} f,\lim\limits_{b^-} f\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{b^-} f,\lim\limits_{a^+} f\right[$

Soit f une fonction et (ξ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.



Mr Masmoudi.I   Savoir Réagir   2002-2003

Questions	Méthode
1) M.q f est continue en a ⇒	$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
2) M.q f est dérivable en a ⇒	$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \text{fini} = f'(a)$
3) Interpréter $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ ⇒	C_f admet une demi-tangente verticale vers le haut au point d'abscisse a
4) Donner une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a ⇒	$T: y = f'(a)(x-a)+f(a)$
⑤ Étudier les variations de f sur I ⇒	•) Calculer f' •) Voir le signe de f' sur I •) Dresser le tableau de f •) Calcul des limites aux bornes ouvertes de I
⑥ M.q f est une bijection de I sur $f<I>$ ⇒	f continue et strictement monotone sur I
⑦ M.q l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α ⇒	$0 \in f<I>$ donc il existe un unique α t.q $f(x)=$
et que $\alpha \in]a,b[$ →	$f(a)f(b) < 0$
⑧ Calculer $f^{-1}(x)$ pour $x \in f<I>$ ⇒	partir de $f(y)=x$ puis trouver y en fonction de x $(y = f^{-1}(x))$ (uni
⑨ M.q f^{-1} est dérivable sur $f<I>$ ⇒	f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I
⑩ Calculer $(f^{-1})'(x)$. ⇒	$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$ on pose $f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$ $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}$ ....

④ Savoir les bijections et f^{-1} :

⊛ M.q f admet une fonction réciproque f^{-1} c'st : f st continue et strictement monotone sur I

f^{-1} est continue sur $f<I>$

) M.q f^{-1} est dérivable sur $f<I>$ c'st : f st dérivable sur I et f' ne s'annulle pas.

) Calculer $f^{-1}(x)$ c'est partir de $f(y)=x$ puis trouver y unique en fonction de x

) Calculer $f^{-1}(1)$ sans savoir $f^{-1}(x)$ c'est résoudre $f(x)=1$ et trouver l'unique x

) M.q $f(x)=0$ admet une solution unique α c'est dire que $0 \in f<I>$ donc il existe α unique tel que $f(\alpha)=0$

) Vérifier que $\alpha \in]a,b[$ c'est avoir $f(a)f(b)<0$

) M.q $f(x)=x$ admet une solution unique α c'est : poser $\varphi(x)=f(x)-x$, enoncer la bijection de φ puis dire que $0 \in \varphi<I>$

Tracer $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ c'st : faire la symétrique de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\Delta : y=x$.

② ⑤ Savoir interpréter les limites :

⊛ $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty \longrightarrow$ $\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente verticale (vers le bas)

⊛ $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0 \longrightarrow$ $\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente horizontale

⊛ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) \longrightarrow$ f est continue en 1

⊛ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty \longrightarrow$ $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale $D : x=1$

⊛ $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 1 \longrightarrow$ $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale $D : y=1$

⊛ $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)-(ax+b) = 0 \longrightarrow$ $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique $D : y=ax+b$

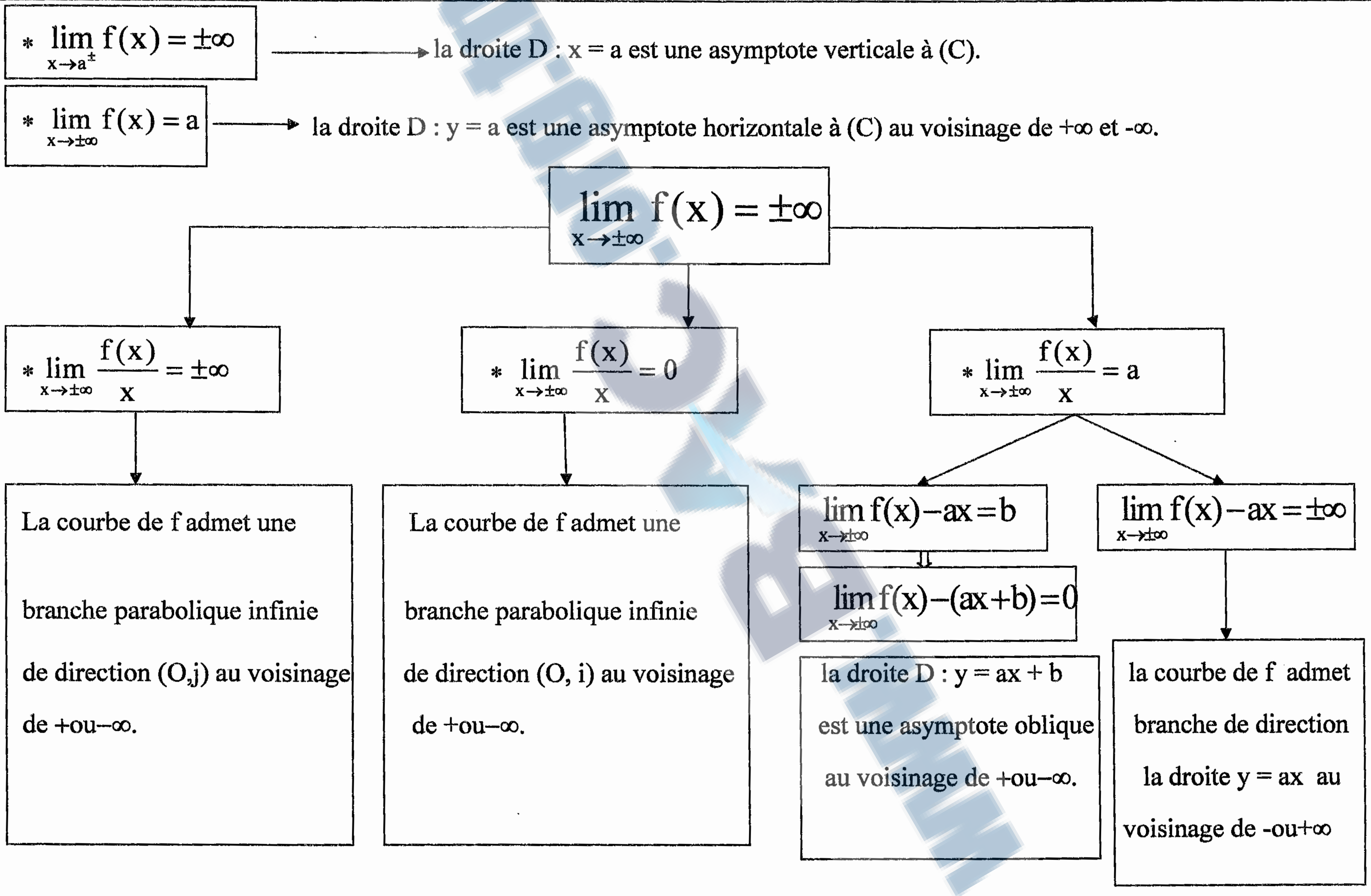
⊛ $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \\ \downarrow \\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \\ \downarrow \\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax = b \end{array}\right\} \longrightarrow$$ $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ $D : y = ax+b$

⊛ $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \\ \downarrow \\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow$$ $\mathscr{C}_f$ admet une branche infinie de direction $(O\vec{i})$

⊛ $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \\ \downarrow \\ \lim \dfrac{f(x)}{x} = \infty \end{array}\right\} \longrightarrow$$ $\mathscr{C}_f$ admet une branche infinie de direction $(O\vec{j})$,

ASYMPTOTES ET BRANCHES INFINIES

L. S.MONGI SLIM *BEN AMAR ADNEN*



$* \lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ → la droite D : x = a est une asymptote verticale à (C).

$* \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$ → la droite D : y = a est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de +∞ et -∞.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$* \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ → La courbe de f admet une branche parabolique infinie de direction (O,j) au voisinage de +ou–∞.

$* \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ → La courbe de f admet une branche parabolique infinie de direction (O, i) au voisinage de +ou–∞.

$* \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b$ ⇕ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ → la droite D : y = ax + b est une asymptote oblique au voisinage de +ou–∞.
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ → la courbe de f admet branche de direction la droite y = ax au voisinage de -ou+∞

$\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ ⟷ on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale $\Delta : x = x_0$ (fig 1)

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) =$

- a ⟷ on dit que $\mathscr{C}_f$ admet un asymptote horizontale $\Delta : y = a$ (fig 2)
- ±∞ ⟶ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} =$
  - ± ∞ ⟷ on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction celle de $(o,\vec{j})$ (fig3)
  - 0 ⟷ on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction celle de $(o,\vec{i})$ (fig4)
  - a ⟶ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x)\text{-}ax)$
    - ± ∞ ⟷ On dit que $\mathscr{C}_f$ admet une branche Parabolique de dir $\Delta : y = ax$ (fig5)
    - b ⟷ on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique $\Delta : y = ax+b$

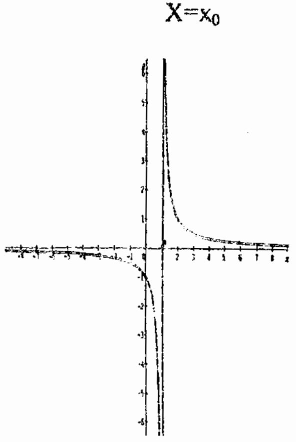


Fig1

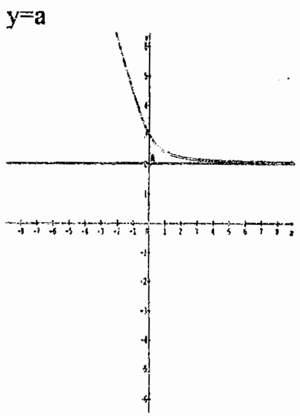


Fig2

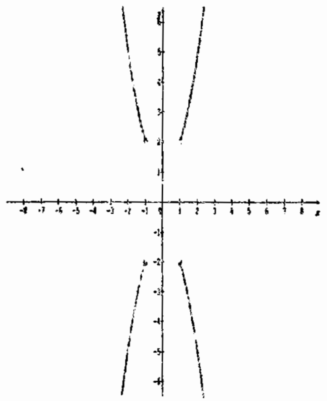


Fig3

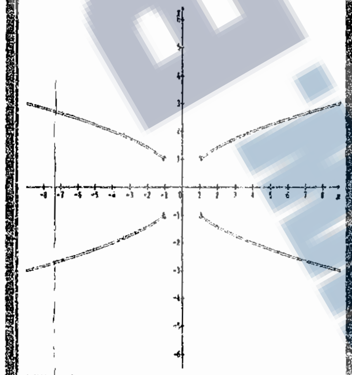


Fig4

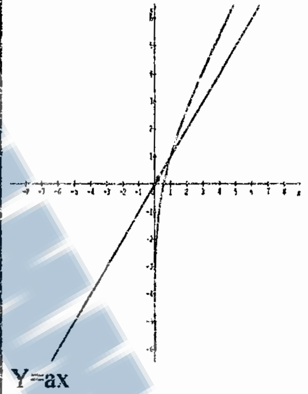


Fig5

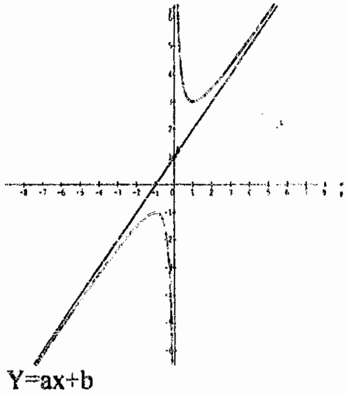


Fig6

FONCTIONS RÉCIPROQUES

I - Fonctions réciproques :

1) Définition : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I .

√(f est une bijection de I sur f<I>) Ssi(∀ y∈f<I> l'équation f(x)=y admet une unique solution dans I)

√ On appelle fonction réciproque de f , la fonction f^{-1} définie sur f<I>
et qui à tout y∈f<I> associe l'unique solution dans I de l'équation f(x) = y d'inconnue x∈I.

2)Exercice n°1: Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0]$par $f(x) = 2x^2 - 3$.

1) Déterminer : $f(]-\infty;0])$.
2) Montrer que pour tout y∈ $f(]-\infty;0])$, l'équation f(x)=y d'inconnue x admet une unique solution dans $]-\infty;0]$.
3) En déduire la fonction f^{-1}.

Réponses :

1) $x \mapsto 2x^2 - 3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty;0]$
Donc f est dérivable sur $]-\infty;0]$ et pour tout x≤0 , $f'(x) = 4x \leq 0$ sur $]-\infty;0]$.
Donc : f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$et $f(]-\infty;0])= [f(0) ; \lim\limits_{x\to-\infty} f [= [-3 ;+\infty[$.

2) f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.
donc : pour tout y∈ $f]-\infty;0])= [-3 ;+\infty[$, il existe un unique réel $x\in]-\infty;0]$ tel que f(x)=y.
Conclusion : Pour tout y ∈ $f(]-\infty;0])$, l'équation f(x)=y admet une unique solution dans $]-\infty;0]$.

3) f^{-1} est la fonction définie sur $[-3 ;+\infty[$ et qui :
à tout $y\in[-3 ;+\infty[$ associe l'unique solution dans $]-\infty;0]$de l'équation f(x) =y d'inconnue $x\in]-\infty;0]$.

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in]-\infty;0] \\ y \in [-3;+\infty[\end{cases} \text{ éq à : } \begin{cases} y = 2x^2 - 3 \\ x \leq 0 \\ y \geq -3 \end{cases} \text{ éq à } \begin{cases} x^2 = \frac{y+3}{2} \geq 0 \\ x \leq 0 \\ y \geq -3 \end{cases} \text{ éq à : } x = -\sqrt{\frac{y+3}{2}} \text{ car } x\leq 0.$$

Conclusion : f^{-1} est la fonction définie sur $[-3 ;+\infty[$ par : $f^{-1}(y) = x = -\sqrt{\frac{y+3}{2}}$.

3)Théorème : Fonction réciproque d'une fonction strictement monotone :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Si (***f est continue et strictement monotone sur un intervalle I***) alors (f réalise une bijection de I sur f<I>).

4)Activité② :page78

5) Définition : Fonction réciproque.
Soit f une fonction définie sur I.

Si (f est une bijection de I sur f(I)) alors (On appelle fonction récproque de f la fonction notée f^{-1} définie sur f(I) et qui à tout réel y ∈ f(I) associe l'unique solution dans I de f(x) = y)

6)Conséquences :

Si (f est une bijection de I sur f(I)) alors
- f^{-1} est une bijection de f(I) sur I
- Pour tout x ∈ I et pour tout y ∈ f(I), $(f(x) = y)$Ssi$(f^{-1}(y) = x)$
- Pour tout x ∈ I et pour tout y ∈ f(I), $f^{-1}of(x) = x$ et $fof^{-1}(y) = y$ = f(x)

f(x) = y ⇒ f⁻¹(y) = x
x ∈ I , y ∈ f<I>

f(y) = x
f⁻¹(x) = y
x ∈ f<I>
y ∈ I

7)Activité③ : page 56

☞$f^{-1}(-1)=x$ éq à : f(x)=−1 et $x\in[-2;+\infty[$ éq à : x=−2 , conclusion $f^{-1}(-1)=-2$. ($f^{-1}(1)=0$ et $f^{-1}(3)=1$)

A(−2;−1) ∈ $\mathscr{C}_f$ ⇐⇒ f(−2) = −1 ⇐⇒ $f^{-1}(-1) = -2$

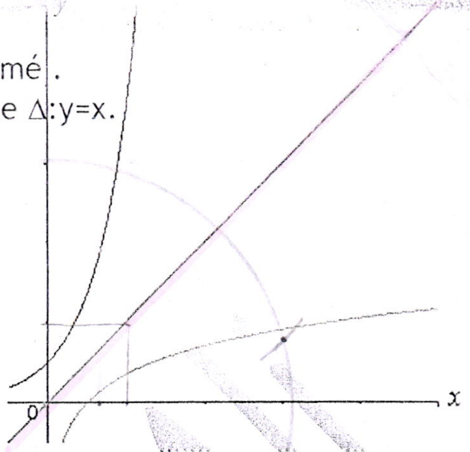
8)Exercice n°2 : Soit f : $x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[1;+\infty[$.
2) Déterminer la fonction f^{-1}.

9) Représentation graphique d'une fonction réciproque : page (2)

a/Introduction : Soient f une bijection de I sur f(I).
$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé .
Les points M(x ;y) et M'(y ;x) sont symétriques par rapport à la droite Δ:y=x.

M(x ;y)∈ $\mathscr{C}$ Ssi $\begin{cases} y = f(x) \\ x \in I \end{cases}$ Ssi $\begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in f(I) \end{cases}$ Ssi M'(y ;x)∈ $\mathscr{C}$'.



b/Conséquence :
Dans le plan muni d'un repère orthonormé,
les courbes représentatives d'une fonction et
sa réciproque sont symétriques par rapport à la droite Δ:y=x.

$\mathscr{C}_{f^{-1}} = S_\Delta(\mathscr{C}_f)$ avec $\Delta : y = x$

10) **Exercice n°3** : Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, par f(x) = sin x .

1) Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera .

2) Donner les valeurs de : $\mathbf{f^{-1}}\left(\frac{1}{2}\right)$; $\mathbf{f^{-1}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\mathbf{f^{-1}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\mathbf{f^{-1}(-1)}$.

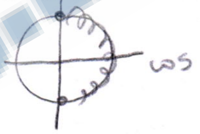
3)Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tracer les courbes représentatives de f et f^{-1}.

Réponses :

1) f est définie cont. et dériv. sur ℝ en particulier sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et f'(x) = cos(x)≥0 sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Donc : f est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

D'où : f réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sur $f\left(\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right) = \mathbf{[-1;1]}$.



2) $\begin{cases} f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = x \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ éq à : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ éq à : $\begin{cases} sin(x) = \frac{1}{2} \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ éq à x = $\frac{\pi}{6}$. Conclusion : $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

$\begin{cases} f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ éq à : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ éq à : $\begin{cases} sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ éq à x = $\frac{\pi}{3}$. Conclusion : $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

$\begin{cases} f^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = x \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ éq à : $\begin{cases} f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ éq à : $\begin{cases} sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ éq à x = $-\frac{\pi}{4}$. Conclusion : $f^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

$\begin{cases} f^{-1}(-1) = x \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ éq à : $\begin{cases} f(x) = -1 \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ éq à : $\begin{cases} sin(x) = -1 \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ éq à x = $-\frac{\pi}{2}$. Conclusion : $f^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

3)

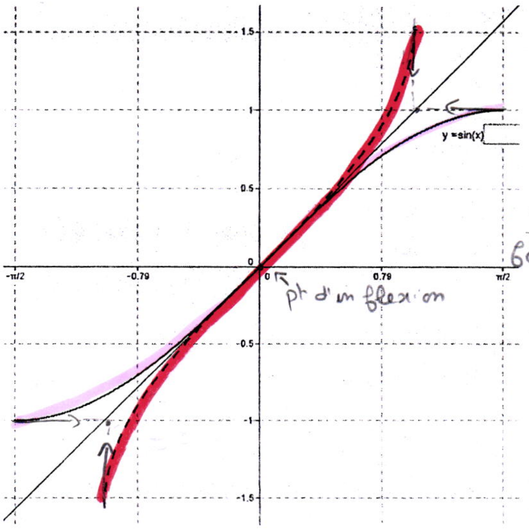
x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
y	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

↑gnte →

f réciproque

y	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$

↑gnte ↓



f'(x) = cos x
f''(x) = - sin x

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
f''(x)		+	0	-	
		$\mathscr{C}_f/\Delta$		$\Delta/\mathscr{C}_f$	

II/ Dérivée d'une fonction réciproque :

1)Théorème :

Soit f une fonction strictement monotone d'un intervalle ouvert I sur f<I>, a un réel de I et b = f(a) .

$$\text{Si}\begin{pmatrix}\text{f est dérivable en a}\\ \text{et}\quad f'(a)\neq 0\end{pmatrix}\text{alors}\begin{pmatrix}f^{-1}\text{ est dérivable en } b=f(a)\\ \text{et}\ (f^{-1})'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}=\dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(b)\right]}\end{pmatrix}$$

2)Corollaire :

Soit f une bijection d'un intervalle I sur f<I> .

$$\text{Si}\begin{pmatrix}\text{f est dérivable sur I}\\ \text{et } \forall x\in I\quad f'(x)\neq 0\end{pmatrix}\text{alors}\begin{pmatrix}f^{-1}\text{ est dérivable sur f(I)}\\ \text{et } \forall y\in f(I),\ (f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}=\dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(y)\right]}\end{pmatrix}$$

varient vers m sens

Remarque :

$$\text{Si}\begin{pmatrix}\text{f est continue}\\ \text{et}\\ \text{strictement monotone sur I}\end{pmatrix}\text{alors}\begin{pmatrix}f^{-1}\text{ est continue , strictement monotone sur f(I)}\\ \text{et}\\ \text{de même sens de variation que f}\end{pmatrix}$$

3)Suite de l'EXERCICE N°3 :

4) Montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{\sqrt{3}}{2}$. et calculer $(f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

5) Étudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en (–1) et à gauche en 1.

6) Expliciter $(f^{-1})'(x)$ pour $x\in[-1;1]$.

Réponses :

4) $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$. $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } \frac{\pi}{3}\\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\neq 0\end{cases}$ donc f^{-1} est dérivable en $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $(f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$

5) i/ $\begin{cases} f \text{ est dérivable à droite en } -\frac{\pi}{2}\\ f'_d\left(\frac{\pi}{2}\right)=cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\end{cases}$ donc f^{-1} n'est pas dérivable à droite en (−1).

$f^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{2} \iff f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$

$f(y)=x \Rightarrow f(x)=y$

$f^{-1}(x)=y$
$f(y)=x$

$f^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ x>-1}}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(-1)}{x-(-1)}=\lim_{\substack{f(y)\to f\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ f(y)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)}}\frac{y-(-\frac{\pi}{2})}{f(y)-f\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\overset{\text{f est croissante sur }\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}{=}\lim_{\substack{y\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+\\ y>\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+}}\frac{1}{\dfrac{f(y)-f\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\underbrace{y-(-\frac{\pi}{2})}_{=0}}}=+\infty .$$

$f(y)=x \ / \ f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$

$f(x)\to f(a)$
f_c en a
$x\to a$

ii/ $\begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche en} \frac{\pi}{2}\\ f'_g\left(\frac{\pi}{2}\right)=cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\end{cases}$ donc f^{-1} n'est pas dérivable à gauche en 1.

$$\text{et}\ \lim_{\substack{x\to-1\\ x<-1}}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(1)}{x-1}=\lim_{\substack{f(y)\to f\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ f(y)<f\left(\frac{\pi}{2}\right)}}\frac{y-\frac{\pi}{2}}{f(y)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}\overset{\text{f est croissante sur }\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}{=}\lim_{\substack{y\to\frac{\pi}{2}\\ y<\frac{\pi}{2}}}\frac{1}{\dfrac{f(y)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{y-\frac{\pi}{2}}}=+\infty .$$

6) $\left.\begin{matrix} \text{f est dérivable sur } \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\\ f'(x)=cos(x)\neq 0 \text{ pour tout } x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\end{matrix}\right\}$ donc f^{-1} est dérivable sur$]-1;1[$.

$$\begin{cases}(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)}\\ f(y)=x\\ x\in]-1;1[\text{ et } y\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}\text{éq à :}\begin{cases}(f^{-1})'(x)=\frac{1}{cos(y)}\\ siny=x\\ x\in]-1;1[\text{ et } y\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}\text{éq à :}\begin{cases}(f^{-1})'(x)=\frac{1}{cos(y)}\\ cosy=\sqrt{1-sin^2y}=\sqrt{1-x^2}\\ x\in]-1;1[\text{ et } y\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

Conclusion : f^{-1} est dérivable sur$]-1;1[$ et pour tout $x\in]-1;1[$, $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4)EXERCICE N°4 :

Soit f la fonction définie sur $[0;\pi]$, par f(x)=cos(x) .

1) Montrer que f réalise une bijection de $[0;\pi]$ sur un intervalle J que l'on précisera .

2)a/ Étudier la dérivabilité de f^{-1} en 0 puis déterminer $f^{-1}(0)$.

b/ Étudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en (−1) et à gauche en 1.

3)Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ tracer les courbes représentatives de f et f^{-1}.

Réponses :

1) x⟼cos(x) est définie cont. et dériv. sur ℝ en particulier sur $[0;\pi]$ et f'(x) = −sin(x)≤0 sur $[0;\pi]$.

Donc : f est continue et strictement décroissante sur $[0;\pi]$.

D'où : f réalise une bijection de $[0;\pi]$ sur $f([0;\pi]) = [-1;1]$

x	0		π
f'(x)	0	−	0
f(x)	①	↘	−1

2)a/ $\mathbf{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

$$\begin{cases} f\ \textit{est dérivable en } \frac{\pi}{2} \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \neq 0 \end{cases} \textit{donc } f^{-1} \text{ est dérivable en } \mathbf{0} \text{ et } (f^{-1})'(\mathbf{0}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f'}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\mathbf{1}}{-\mathbf{1}} = -\mathbf{1}.$$

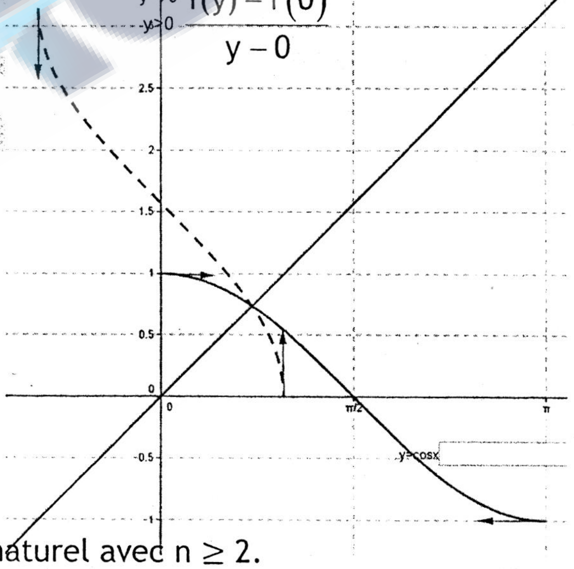
b/ i/ $\begin{cases} f\ \textit{est dérivable à gauche en } \pi \\ f_g'(\pi) = -\sin(\pi) = 0 \end{cases}$ donc f^{-1} n'est pas dérivable à droite en (−1).

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(-1)}{x-(-1)} = \lim_{\substack{f(y)\to f(\pi)\\ f(y)>f(\pi)}} \frac{y-\pi}{f(y)-f(\pi)} \overset{\text{f est décroissante sur } [0;\pi]}{=} \lim_{\substack{y\to\pi\\ y<\pi}} \frac{1}{\frac{f(y)-f(\pi)}{y-\pi}} = -\infty .$$

ii/ $\begin{cases} f\ \textit{est dérivable à droite en } 0 \\ f_d'(0) = -\sin(0) = 0 \end{cases}$ donc : f^{-1} n'est pas dérivable à gauche en 0 .

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(1)}{x-1} = \lim_{\substack{f(y)\to f(0)\\ f(y)<f(0)}} \frac{y-0}{f(y)-f(0)} \overset{\text{f est décroissante sur } [0;\pi]}{=} \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{1}{\frac{f(y)-f(0)}{y-0}} = -\infty .$$

3)



Fonction racine $n^{\text{iéme}}$: $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$

1)Définition et théorème : Soit n un entier naturel avec n ≥ 2.

La fonction : f : x ⟼ x^n est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$

Donc : f : x ⟼ x^n réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $f([0;+\infty[) = [0;+\infty[$.

Sa réciproque est la fonction notée $\sqrt[n]{\ }$ définie continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

$$\begin{array}{rcl} \sqrt[n]{\ } : [0;+\infty[& \longrightarrow & [0;+\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

$\sqrt[n]{x}$: se lit racine $n^{\text{ième}}$ de x.

$\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = \sqrt[4]{16}$
$= 2$

Conséquence① : Soit n un entier naturel avec n ≥ 2.

Pour tous réels positifs x et y . $(y = x^n)\ Ssi\ (x = \sqrt[n]{y})$.

$= x^3$ $x = 2$

Espace

$A(2,-1,0)$ $B(6,2,-4)$

Milieux

$I = A*B \Leftrightarrow$

$I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right) \Rightarrow I(4;\tfrac{1}{2};-2)$

Vecteur

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\\-4\end{pmatrix}$

Distance

$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

$= \sqrt{4^2+3^2+(-4)^2} = \sqrt{41}$

$\vec u\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ $\vec v\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}$ $\vec w\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec z\begin{pmatrix}-6\\3\\-9\end{pmatrix}$

norme

$\|\vec u\| = \sqrt{4^2+(-2)^2+6^2} = \sqrt{56}$ $\|\vec v\| = \sqrt{26}$

déterminant

$\text{dét}(\vec u,\vec v,\vec w) = \begin{array}{c}+\\-\\+\end{array}\begin{vmatrix}4&3&1\\-2&4&-1\\6&-1&-1\end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix}4&-1\\-1&-1\end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix}3&1\\-1&-1\end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix}3&1\\4&-1\end{vmatrix}$

$= 4(-4-1)+2(-3+1)+6(-3-4) = -66$

$\text{dét}(\vec u,\vec v,\vec z) = \begin{vmatrix}4&3&-6\\-2&4&3\\6&-1&-9\end{vmatrix} = 4(-33)+2(-33)+6(33) = 0$

Coplanaires

$\text{dét}(\vec u,\vec v,\vec w) \neq 0 \Rightarrow$ $\vec u, \vec v$ et $\vec w$ ne sont pas coplanaires
$(\vec u,\vec v,\vec w)$ et une base.
$(A,\vec u,\vec v,\vec w)$ et un repère

$\det(\vec u,\vec v,\vec z) = 0 \Rightarrow \vec u, \vec v$ et $\vec z$ sont coplanaire

Colinéarité

* $\vec z = -\frac{3}{2}\vec u \Rightarrow \vec u$ et $\vec v$ sont colinéaires

* $\begin{vmatrix}4&3\\-2&4\end{vmatrix} = 16+6 = 22 \neq 0 \Rightarrow \vec u$ et $\vec v$ ne sont pas colinéaires.

orthogonalité

* $\vec u\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}\cdot\vec w\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = 4\times1+(-2)\times(-1)+6\times(-1) = 0 \Rightarrow \vec u \perp \vec w$

* $\vec u\cdot\vec v = 12-8-6 = -2 \neq 0 \Rightarrow \vec u$ et $\vec v$ ne sont pas orthogonaux.

Produit scalaire

$\vec u\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\vec v\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix} = aa'+bb'+cc'$ réel

$\vec u\cdot\vec v = \|\vec u\|\times\|\vec v\|\times\cos(\widehat{\vec u,\vec v})$

$\Rightarrow \boxed{\cos(\widehat{\vec u,\vec v}) = \frac{\vec u\cdot\vec v}{\|\vec u\|\times\|\vec v\|}} = \frac{-2}{\sqrt{56}\times\sqrt{26}} = -\frac{\sqrt{91}}{182}$

$\vec u\cdot\vec v = \vec v\cdot\vec u$.

Produit vectoriel

$\vec u\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\wedge\vec v\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix} = \vec n\begin{pmatrix}bc'-cb'\\ca'-ac'\\ab'-a'b\end{pmatrix}$ vecteur

$\vec u\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}\wedge\vec v\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix} = \vec n\begin{array}{c}+\\-\\+\end{array}\begin{pmatrix}-22\\22\\22\end{pmatrix}$

* $\vec n \perp \vec u$ et $\vec n \perp \vec v$

* $(\vec u,\vec v,\vec n)$ et une base directe.

* $\|\vec n\| = \|\vec u\|\times\|\vec v\|\times|\sin(\widehat{\vec u,\vec v})|$

$\Rightarrow \boxed{|\sin(\widehat{\vec u,\vec v})| = \frac{\|\vec u\wedge\vec v\|}{\|\vec u\|\ \|\vec v\|}} = \frac{22\sqrt3}{\sqrt{56}\sqrt{26}} = \frac{11\sqrt{273}}{182}$

* $\vec u$ et $\vec z$ sont colinéaires $\Rightarrow \vec u\wedge\vec z = \vec 0$

* si $P = \underset{\text{plan}}{\mathcal{P}}(A,\vec u,\vec v)$

$\Rightarrow \vec n = \vec u\wedge\vec v$ et un vecteur normal à P.

* $\vec v\wedge\vec u = -\vec u\wedge\vec v = -\vec n$

Produit mixte

$$
\begin{array}{ccccc}
(\vec u,\vec v,\vec w) = & (\vec u\wedge\vec v)\cdot\vec w & = & \text{dét}(\vec u,\vec v,\vec w) = -66\\
\parallel & \parallel & & \parallel\\
(\vec v,\vec w,\vec u) = & (\vec v\wedge\vec w)\cdot\vec u & = & \text{dét}(\vec v,\vec w,\vec u) = -66\\
\parallel & \parallel & & \parallel\\
(\vec w,\vec u,\vec v) = & (\vec w\wedge\vec u)\cdot\vec v & = & \text{dét}(\vec w,\vec u,\vec v) = -66
\end{array}
$$

Professeur M^{ed} NAIFAR

Résumé Mathématiques

Bac
Sciences
expérimentales
et Techniques

Géométrie dans l'espace

(Calcul de distances, hauteurs, surfaces et volumes)

Distance entre un point I et une droite D(A , $\vec{u}$) :	$d = \dfrac{\|\overrightarrow{IA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.
Distance entre deux droites D(A , $\vec{u}$) et D'(B , $\vec{v}$) :	$d = \dfrac{\lvert\det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})\rvert}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$.
Aire d'un parallélogramme ABCD	$\mathcal{A} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.
Aire d'un triangle ABC :	$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.
Volume du parallélépipède ABCDEFGH :	$V = \lvert\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})\rvert$.
Volume d'un tétraèdre ABCD $V = \frac{1}{6}\lvert(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}\rvert$	$V = \frac{1}{6}\lvert\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\rvert$.
La hauteur du tétraèdre ABCD issue de A : Cette dernière représente exactement la distance entre un point A et un plan (BCD).	$h = \dfrac{\lvert\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\rvert}{\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\|}$.

Et on se rappelle en plus

Aire du triangle	$\mathcal{A} = \dfrac{Base \times hauteur}{2}$
Volume du tétraèdre	$V = \dfrac{Base \times hauteur}{3}$
Aire du parallélogramme	$Base \times hauteur$

Prof. Mᵉᵘ NAIFAR

Equations de droites et de plans

Equation paramétrique d'une droite

$$D = \mathcal{D}\left(A(2,-1,0)\,;\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}\right) : \begin{cases} x = 2+4\alpha \\ y = -1-2\alpha \\ z = 6\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Equations cartésiennes d'une droite

$$D : \begin{cases} \alpha = \frac{x-2}{4} \\ \alpha = \frac{y+1}{-2} \\ \alpha = \frac{z}{6} \end{cases} \Rightarrow D : \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$$

Equation parametrique d'un plan :

$$Q = \mathcal{P}\left(A(2,-1,0)\,;\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix};\vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}\right) : \begin{cases} x = 2+4\alpha+3\beta \\ y = -1-2\alpha+4\beta \\ z = 6\alpha-\beta \end{cases} \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

Equation cartésienne d'un plan

On élimine α dans x et y puis dans y et z.

$$Q : \begin{cases} x+2y = 11\beta \\ 3y+z = -3+11\beta \end{cases}$$

On élimine β.

$$Q : x+2y-3y-z = 3$$

D'où $\boxed{Q : x-y-z-3=0}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Q.

2ème méthode $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix} = \vec{N}\begin{pmatrix}-22\\22\\22\end{pmatrix}$ est un veteur normal à Q

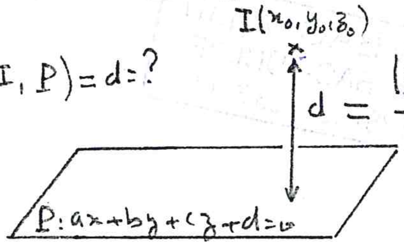
$\vec{n}'\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ ou $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{N}$ donc normal à Q

$$\Rightarrow Q : x-y-z+\overset{?}{d}=0$$

$$A(2,-1,0) \in Q \Rightarrow 2+1-0+d=0 \Rightarrow d=-3$$

$$\Rightarrow \underline{Q : x-y-z-3=0}$$

Distance entre un point et un plan

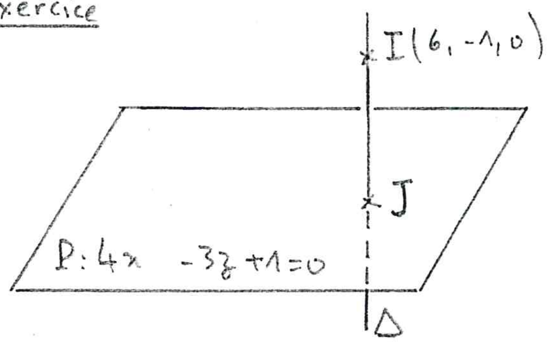


$$d(I,P) = d = ?$$

$$d = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Projeté orthogonal d'un point sur un plan

Exercice



① Ecrire une équation paramétrique de la droite Δ passant par I et $\perp$ à P.

$$\rightarrow \Delta = \mathcal{D}\left(I\,;\vec{n}_P\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}\right) : \begin{cases} x = 6+4\alpha \\ y = -1 \\ z = -3\alpha \end{cases}$$

② Déterminer les coordonnées de J / $\Delta \cap P = \{J\}$.

$$\rightarrow \Delta \cap P : 4(6+4\alpha) -3(-3\alpha)+1=0$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha = -1$$

D'où $\Delta \cap P = \{J(2,-1,3)\}$

③ Que représente le point J par rapport à I et P

$\rightarrow$ $\boxed{J \text{ est le projeté orthogonal de } I \text{ sur } P.}$

④ Calculer la distance IJ

$$IJ = \sqrt{(-4)^2+0^2+3^2} = 5$$

⑤ Que représente la distance IJ pour I et P ?

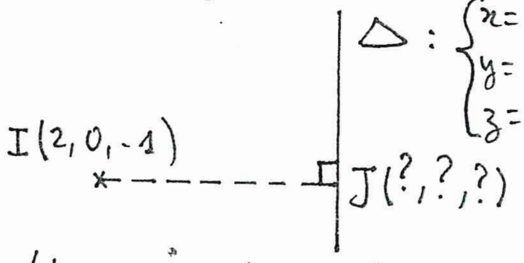
$$\rightarrow IJ = d(I,P).$$

⑥ Retrouver cette distance

$$\rightarrow d(I,P) = \frac{|4(6) -3\times0+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = 5.$$

- $P \parallel P' \Leftrightarrow \vec{N}$ et $\vec{N'}$ sont colinéaires.
- $P \perp P' \Leftrightarrow \vec{N}$ et $\vec{N'}$ sont orthogonaux.
- $D(A,\vec{u}) \parallel P \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{N}$ sont orthogonaux.
- $D(A,\vec{u}) \perp P \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{N}$ sont colinéaires.

Projeté orthogonal d'un point sur une droite

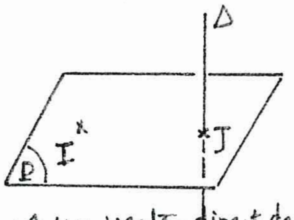


$$\Delta : \begin{cases} x = -\alpha \\ y = 2+\alpha \\ z = 3 \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

(trois méthodes)

1ère méthode:

① Ecrire une equation cartésienne du plan P passant par I et ⊥ à Δ.



→ Le vecteur normale à P est un vecteur direct. de Δ

$\vec{u}_\Delta\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \vec{n}_P \Rightarrow P : -x+y \quad + \overset{?}{d} = 0$

$I(2,0,-1) \in P \Rightarrow -2+0 \quad + d = 0 \Rightarrow d = 2$

D'où $P : -x+y \quad +2 = 0$

② Determiner les cordonnées du point $J / \Delta \cap P = \{J\}$

$\Delta \cap P : -(-\alpha) + (2+\alpha) \quad +2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$

D'où $\Delta \cap P = \{J(2,0,3)\}$

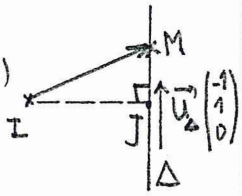
③ Que represente le point J pour I et Δ ?

→ $\boxed{\text{J est le projeté orthogonal de I sur } \Delta.}$

④ Calculer la distance IJ qui est $d(I,\Delta)$.

$d(I,\Delta) = IJ = \sqrt{0^2+0^2+4^2} = 4.$

2ème méthode: (la meilleure)



Soit $M(-\alpha ; 2+\alpha ; 3) \in \Delta$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

① Calculer $\vec{IM} \cdot \vec{u}_\Delta$

$\rightarrow \vec{IM}\begin{pmatrix}-\alpha-2\\2+\alpha\\4\end{pmatrix} \cdot \vec{u}_\Delta\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \alpha+2+2+\alpha+0 = 2\alpha+4$

② Déterminer les coordonnées du point $\boxed{\text{J projeté orthogonal de I sur } \Delta}$

→ J est le point particulier de M qui verifie

$(IJ) \perp \Delta \Leftrightarrow \vec{IJ} \perp \vec{u}_\Delta = 0$

$\Leftrightarrow 2\alpha+4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2 \Rightarrow J(2,0,3)$

③ Calculer alors $d(I,\Delta)$

$d(I,\Delta) = IJ = \sqrt{0^2+0^2+4^2} = 4.$

3ème méthode:

Soit $M(-\alpha ; 2+\alpha ; 3) \in \Delta.$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

① Ecrire en fonction de α IM^2

$\rightarrow IM^2 = (-\alpha-2)^2+(2+\alpha)^2+4^2 = 2\alpha^2+8\alpha+24$

② On note cette fonction de α, $f(\alpha)$ (càd. $f(\alpha) = IM^2$)

Etudier le sens de variation de f.

$f(\alpha) = 2\alpha^2+8\alpha+24 \quad \alpha \in \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(\alpha) = 4\alpha+8$

α	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$f(\alpha)$	$+\infty$	↘	16	↗	$+\infty$

③ Determiner la valeur minimale de $f = IM^2$ en déduire la valeur minimale de IM.

$\rightarrow f_{min} = IM^2_{min} = 16 \Rightarrow IM_{min} = 4.$

④ Déduire $d(I,\Delta)$

$\rightarrow d(I,\Delta) = IM_{min} = 4.$

⑤ $J(?,?,?)$ le projeté orthogonal J de I sur Δ est le point M / IM est min ⇔ IM^2 est min ⇔ f est min

$\Leftrightarrow \alpha = -2 \Rightarrow J(2,0,3)$

Remarque

$$d\left(I ; \Delta = \mathcal{D}\left\{A(0,2,3) ; \vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\right) = \frac{\|\vec{IA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

$$\vec{IA}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix} \wedge \vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \vec{w}\begin{pmatrix}-4\\-4\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{w}\| = 4\sqrt{2}$$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$

$\Rightarrow d(I,\Delta) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4.$

Lycée Pilote Sfax Le 05 -12- 2012	**Devoir de synthèse N°1** Durée : 2 heures	Classes : 4ème Sc$_{1+2+3}$ Mme : Fakhfakh Mrs : Smaoui et Boukhris

Exercice 1 (4 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^5 = 1$.

2. On se propose dans cette question de déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(E) : (Z-1)^5 = (Z+1)^5$.

   a. Montrer que si Z est une solution de l'équation (E) alors $|Z-1| = |Z+1|$.

   b. En déduire que les solutions de (E) sont des imaginaires.

   c. Soit x un réel et θ un réel différent de $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

   Montrer que $\dfrac{-1+ix}{1+ix} = e^{i\theta}$ si et seulement si $x = \dfrac{1}{\tan\dfrac{\theta}{2}}$.

   d. En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 2 (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O et $\alpha \in [0, 2\pi[$.

On désigne par M le point d'affixe $e^{i\alpha}$ et par A le point d'affixe $1+i$.

1. a. Placer le point A.

   b. A partir d'un point M , construire le point M' d'affixe $-2e^{-i\alpha}$.

2.a. Montrer que $AM' = \left| 2e^{i\alpha} + 1 - i \right|$.

   b. Montrer que $AM \times AM' = \left| 2e^{i2\alpha} - 2 - (1+3i)\, e^{i\alpha} \right|$.

3.a. Montrer que pour tout $\alpha \in [0, 2\pi[$, $2i\, e^{i\alpha} \sin\alpha = e^{i2\alpha} - 1$.

   b. En déduire que $AM \times AM' = \sqrt{1 + (-3 + 4\sin\alpha)^2}$.

   c. Déterminer alors la position du point M de $\mathscr{C}$ pour laquelle le réel $AM \times AM'$ est maximal.

Exercice 3 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$.

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
2. Montrer que f est strictement croissante sur $[0, 1[$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Soit g la fonction définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = f(1 - \sin x)$.

   a. Montrer que g est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer $g'(x)$.

   b. Dresser le tableau de variation de g.

Exercice 4 (7 points)

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2)=2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Dans le graphique ci-dessous $\mathscr{C}'$ est la courbe de la fonction dérivée f' de f dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

L'axe des abscisses est une asymptote à $\mathscr{C}'$.

1.a. Etudier la monotonie de f sur $\mathbb{R}$.

b. Etudier la monotonie de f' sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $\mathscr{C}$ admet exactement deux points d'inflexions dont on précisera leurs abscisses.

3. Montrer que $\mathscr{C}$ admet exactement deux tangentes horizontales.

4. Montrer que la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 passe par le point $A(0,1)$.

5. Montrer que l'équation $f''(x)=\frac{1}{8}$ admet au moins une solution dans $]-2,2[$.

6. Montrer que $f(3)\le\frac{5}{2}$.

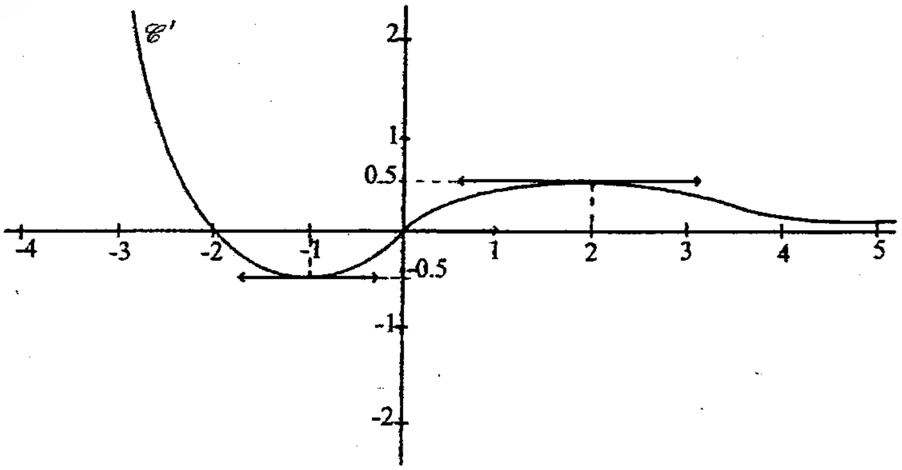
7. Soit la suite U définie par $\begin{cases} U_0=\frac{5}{2} \\ U_{n+1}=f(U_n),\ n\ge 0. \end{cases}$

a. Montrer que pour tout $n\ge 0$, $U_n\ge 2$.

b. Montrer que pour tout $n\ge 0$, $|U_{n+1}-2|\le\frac{1}{2}|U_n-2|$.

c. Montrer que pour tout $n\ge 0$, $|U_n-2|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

d. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.



Ex

Pilote

1°) $z^5 = 1$, $z_k = e^{i\frac{2\pi k}{5}}, k\in\{0,1,2,3,4\}$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{1, e^{\frac{i2\pi}{5}}, e^{\frac{i4\pi}{5}}, e^{\frac{i6\pi}{5}}, e^{\frac{i8\pi}{5}}\right\}$

2°) z solution de (E)

a) $\Leftrightarrow (z-1)^5 = (z+1)^5$

$\Leftrightarrow |z-1|^5 = |z+1|^5$

$\Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{z+1}\right|^5 = 1$ $\in \mathbb{R}_+$

$X^5 = 1$ d'après 1°)

la solution réel est 1 alors

$X = 1$

$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1 \Rightarrow |z-1| = |z+1|$

b) Z solution de (E)

on pose $Z = x+iy$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Z solution alors $|z-1| = |z+1|$

$|x+iy-1| = |x+iy+1|$

$|x-1+iy| = |x+1+iy|$

$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$(x-1)^2+\cancel{y^2} = (x+1)^2+\cancel{y^2}$

$\cancel{x^2}-2x+\cancel{1} = \cancel{x^2}+2x+\cancel{1}$

$4x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$

alors les solution de (E) sont des imaginaires.

c) $\frac{-1+ix}{1+ix} = e^{i\theta}$

$\Leftrightarrow -1+ix = e^{i\theta}+ixe^{i\theta}$

$\Leftrightarrow ix - ixe^{i\theta} = e^{i\theta}+1$

$\Leftrightarrow ix(1-e^{i\theta}) = e^{i\theta}+1$

$x = \frac{e^{i\theta}+1}{i(1-e^{i\theta})}$

$x = \frac{\cancel{e^{i\theta/2}}\left(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2}\right)}{i\,\cancel{e^{i\theta/2}}\left(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}\right)}$

$= \frac{2\cos\theta/2}{i\times -2i\sin\theta/2}$ 2

$= \text{cotan}\,\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\tan\theta/2}$

d) (E) : $(z-1)^5 = (z+1)^5$

$|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 = 1$

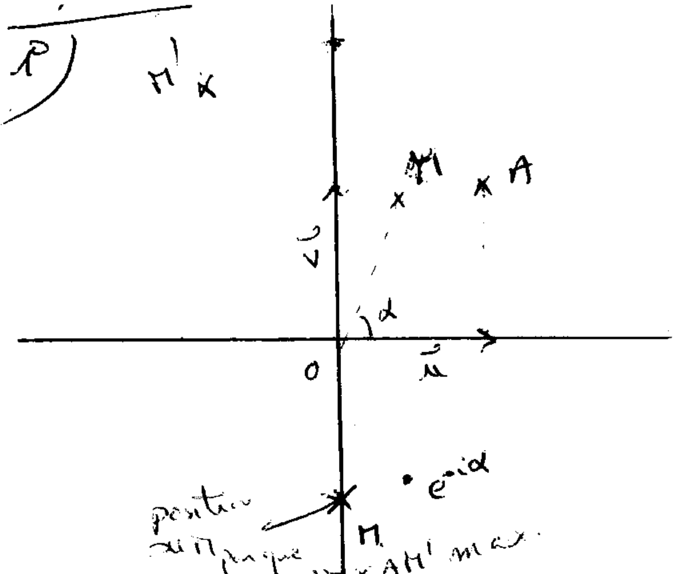
$\Leftrightarrow Z^5 = 1$

alors $\frac{z-1}{z+1} = e^{i\theta}$, $\theta\in\left\{\frac{2\pi}{5},\frac{4\pi}{5},\frac{6\pi}{5},\frac{8\pi}{5}\right\}$

d'autre part $z\in i\mathbb{R} \Rightarrow z = iy$, $y\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{iy-1}{iy+1} = e^{i\theta} \Rightarrow y = \text{Cotan}\,\frac{\theta}{2}$

1°)



$z_M = e^{i\alpha}$ $\Rightarrow$ $M \in \mathcal{C}_{(O,1)}$ et $(\vec{u}, \vec{OM}) \equiv \alpha\,[2\pi]$

$z_{M'} = -2\,e^{-i\alpha} = 2\,e^{i(\pi-\alpha)}$

$\rightarrow$ $M' \in \mathcal{C}_{(O,2)}$ et $\arg(z_{M'}) \equiv \pi - \alpha\,[2\pi]$

$|-z| = |z|$

$|\bar{z}| = |z|$

2°) a) $AM' = |z_{M'} - z_A|$

$= |-2e^{-i\alpha} - 1 - i|$

$= |-(2e^{-i\alpha} + 1 + i)|$

$= |2e^{-i\alpha} + 1 + i|$

$= |\overline{2e^{-i\alpha} + 1 + i}|$

$= |2e^{i\alpha} + 1 - i|$

$|z| \cdot |z'| = |zz'|$

b) $AM \times A'M = |e^{i\alpha} - 1 - i| \times |2e^{i\alpha} + 1 - i|$

$= |(e^{i\alpha} - (1+i))(2e^{i\alpha} + 1 - i)|$

$= |2e^{i2\alpha} + (1-i)e^{i\alpha} - 2(1+i)e^{i\alpha} - 2|$

$= |2e^{i2\alpha} + (1-i \quad 2-2i)e^{i\alpha} - 2|$

$= |2e - (1+3i)e - 2|$

3°) a) $\sin\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$

$2ie^{i\alpha}\sin\alpha = 2i \times e^{i\alpha} \times \dfrac{(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})}{2i}$

$= e^{2i\alpha} - e^{i0}$

$= e^{2i\alpha} - 1$

b) $AM \times AM' = |2e^{i2\alpha} - 2 - (1+3i)e^{i\alpha}|$

$= |2(e^{i2\alpha} - 1) - (1+3i)e^{i\alpha}|$

$= |2 \times (2ie^{i\alpha}\sin\alpha) - (1+3i)e^{i\alpha}|$

$= |4i\sin\alpha\, e^{i\alpha} - (1+3i)e^{i\alpha}|$

$= |(4i\sin\alpha - 1 - 3i)e^{i\alpha}|$

$= |-1 + i(-3 + 4\sin\alpha)| \times \underbrace{|e^{i\alpha}|}_{1}$

$= \sqrt{1 + (-3 + 4\sin\alpha)^2}$

$\alpha \in [0, 2\pi[$

$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$

$-4 \leq 4\sin\alpha \leq 4$

$-7 \leq 4\sin\alpha - 3 \leq 1$

$-7 \qquad\qquad 1$

$(4\sin\alpha - 3)^2$ est maximal si

$4\sin\alpha - 3 = -7$

$\sin\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2}$

$(0,1)$ vérifie l'équation de T

alors $A(0,1) \in T \Rightarrow T$ passe par A

5°) f' est continue sur $[-2,2]$
f' est dérivable sur $]-2,2[$

alors il existe $c \in]-2,2[$

tq $$(f')'(c) = \frac{f'(2) - f'(-2)}{2-(-2)}$$

$$f''(c) = \frac{0,5 - 0}{4} = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}$$

ainsi l'éq $f''(x) = \frac{1}{8}$ admet au moins une solution $c \in]-2,2[$

6°) $\forall x \in [0,+\infty[, 0 \leq f'(x) \leq 0,5$

on a f est continue sur $[2,3]$
f est dérivable sur $]2,3[$
$\forall x \in]2,3[, 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

alors $0 \leq f(3) - f(2) \leq \frac{1}{2}(3-2)$

d'où $f(3) - 2 \leq \frac{1}{2}$

alors $f(3) \leq \frac{5}{2}$

7°) • $u_0 = \frac{5}{2} \geq 2$ vraie

• soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $u_n \geq 2$

mq $u_{n+1} \geq 2$.

or $u_n \geq 2$ et f est croissante sur $[0,+\infty[$

alors $\underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}} \geq f(2)$

$u_{n+1} \geq 2$

conc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 2$.

b) f est dérivable sur $[0,+\infty[$
$\forall x \in [0,+\infty[, |f'(x)| \leq 0,5$

alors $\forall x,y \in [0,+\infty[$
$|f(x) - f(y)| \leq 0,5|x-y|$

or $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 2$

alors $|f(u_n) - f(2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|, \forall n \in \mathbb{N}$

d'où $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|, \forall n \in \mathbb{N}$

c) • $|u_0 - 2| = |\frac{5}{2} - 2| = \frac{1}{2}$
$(\frac{1}{2})^0 = 1$
$|u_0 - 2| \leq (\frac{1}{2})^0$ vraie.

• soit $n \in \mathbb{N}$
On suppose que $|u_n - 2| \leq (\frac{1}{2})^n$
mq $|u_{n+1} - 2| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$

on a $|u_n - 2| \leq (\frac{1}{2})^n$
alors $\frac{1}{2}|u_n - 2| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$
et comme $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$

alors $|u_{n+1} - 2| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$

conc $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 2| \leq (\frac{1}{2})^n$.

d) $|u_n - 2| \leq (\frac{1}{2})^n$
$\lim_{n \to +\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$
alors $\lim_{n \to +\infty} u_n - 2 = 0$

d'où $\lim u_n = 2$

Exn-3

1°) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\frac{x}{1-x}}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{x}{1-x}}{x\sqrt{\frac{x}{1-x}}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}\ 1}{(1-x)\times \cancel{x}\underbrace{\sqrt{\frac{x}{1-x}}}_{\searrow 0^+}} = +\infty$

alors f n'est pas derivable à droite en 0.

2°) $x \longmapsto \frac{x}{1-x}$ rationnelle devable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ en particulier sur $[0,1[$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{x}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

et come elle est strictement positive sur $]0,1[$ alors $x \longmapsto \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ est devable sur $]0,1[$.

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x}{1-x}\right)'}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}$$

$$= \frac{\frac{1(1-x) - x(-1)x}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}$$

$$\frac{1}{\ldots} \times \frac{1}{\ldots}$$

$$\frac{1}{2(1-x)^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}} = \frac{1}{2(1-x)^2}\times\sqrt{\frac{1-x}{x}} > 0$$

$\forall x \in]0,1[$

on a f' est strictement postive sur $]0,1[$ alors f est strictement croissante sur $]0,1[$ et f est continue sur $[0,1[$ alors f est strictement croissante sur $[0,1[$

3°)

x	0		1
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	$\Vert$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

$\lim\limits_{1^-} f = \lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{\frac{x}{1-x}} = +\infty$

		1	
$(1-x)$	$+$	0	$-$

4°) $x \overset{u}{\longmapsto} 1-\sin x$ est devable sur $\underline{]0,\frac{\pi}{2}[} = I$

$x \longmapsto f(x)$ est devable sur $\underset{J}{]0,1[}$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$

$0 < \sin x < 1$

$-1 < -\sin x$ 0

$0 < 1-\sin x < 1$

$\forall x \in \underset{I}{]0,\frac{\pi}{2}[}$, $1-\sin x \in \underset{J}{]0,1[}$

$u(I) \subset J$

alors $g : x \longmapsto f(1-\sin x)$ est derivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$

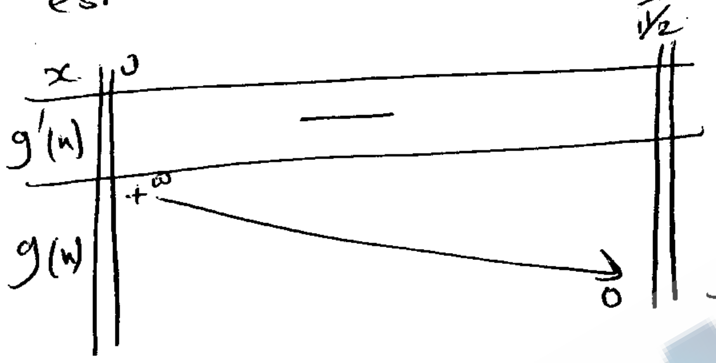
$g'(x) = (1-\sin x) \times f'(1-$

$$= -\cos x \times \frac{1}{2(1-1+\sin)^2\sqrt{\frac{1-\sin x}{1-1+\sin x}}}$$

$$g'(x) = \frac{-\cos x}{2\sin^2 x\sqrt{\frac{1-\sin x}{\sin x}}}$$

b) le signe de $g'(x)$

est celui $-\cos x$



$\lim\limits_{x\to 0^+} 1-\sin x = 1$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{0^+} g = +\infty$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} 1-\sin x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-} g = 0$

Ex n° 4

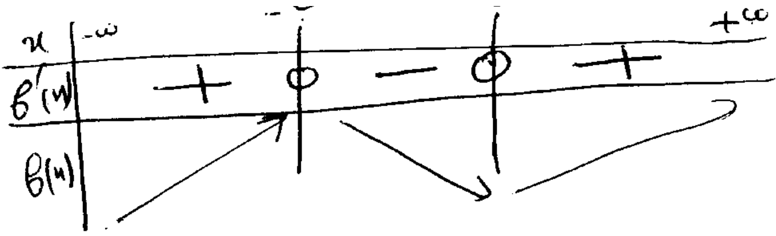
$\mathscr{C}' = \mathscr{C}_{f'}$ au dessus de $(O,\vec{i})$

$f'(x) > 0$

$\mathscr{C}'$ au dessous de $(O,\vec{i})$

$f'(x) < 0$

$\mathscr{C}'$ intercepte $(O,\vec{i})$, f' est nul

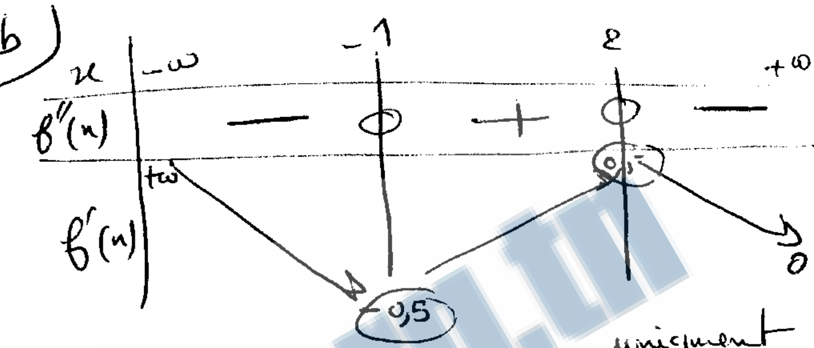


f est st ↗ sur $]-\infty,-2]$

f est st ↘ sur $[-2,0]$

f est st ↗ sur $[0,+\infty[$

b)



2°) d'après b) $f''_{(x)}$ s'annule uniquement en −1 et 2 en changeant de signe chaque fois alors $\mathscr{C} = \mathscr{C}_f$ admet exactement deux points d'inflexion en $I_1(-1, f(-1))$ et en $I_2(2, f(2))$

3°) Comme f' s'annule exactement deux fois en −2 et en 0 alors $\mathscr{C}_f$ admet exactement deux tangente horizontale : (au points $(-2, f(-2))$ et $(0, f(0))$

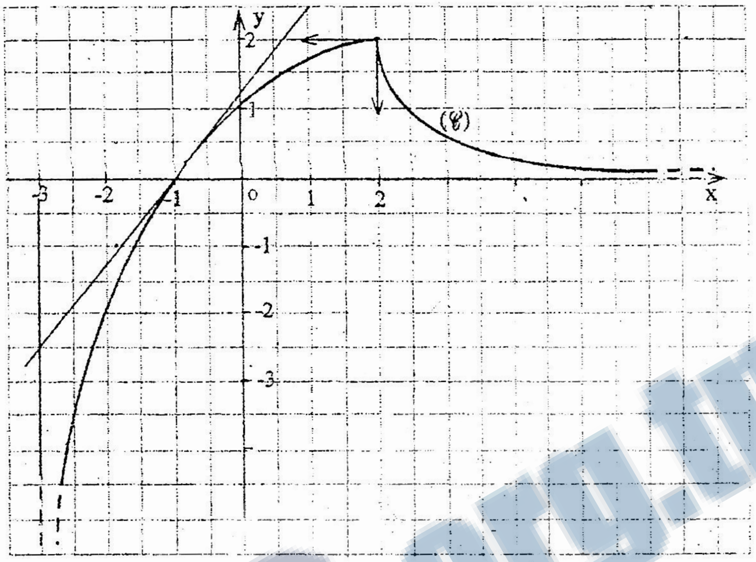
4°) $T : y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$T : y = 0{,}5(x-2) + 2$

Lycée 9 Avril 1938 Sfax ********************** Durée : 2h	Devoir de synthese n° 1 Mathématiques	Classes 4ème Sciences Techniques 2011/2012 07/12/2011

35_8

Exercice 1 (4 points)



On donne ci- contre la courbe (𝒞) d'une fonction f définie et continue sur $]-3,+\infty[$. La courbe 𝒞 présente deux asymptotes d'équations respectives $x=-3$ et y = 0. Par une lecture graphique répondre aux questions suivantes

1. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $f(-1)$ et $f'(-1)$ puis déterminer une équation de la tangente (T) à (𝒞) au point d'abscisse – 1

   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)-2}{x-2}$ et $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)-2}{x-2}$.

   c) Dresser le tableau de variation de f .

2. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-3,2]$.

   a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on précisera son ensemble de définition.

   b) Dresser le tableau de variation de g^{-1} .

   c) Construire sur l'Annexe (1) la courbe représentative (𝒞') de g^{-1} .

Exercice 2 (6 points)

1. a) Vérifier que $(1+3i)^2=-8+6i$.

   b) Résoudre dans ℂ l'équation $z^2+(1-i)z+2(1-i)=0$.

2. On pose pour tout nombre complexe z $P(z)=z^3+(5-i)z^2+6(1-i)z+8(1-i)$.

   a) Vérifier que (-4) est une solution de l'équation P(z) = 0.

   b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que pour tout nombre complexe z on a : $P(z) = (z + 4)(z^2 + az + b)$.

   c) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes ℂ l'équation P(z) = 0. Ecrire les solutions sous forme exponentielle.

3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A ; B ; C et D d'affixes respectives $2i$; $-1-i$; -4 et α , $(\alpha\in\mathbb{C})$.

   a) Montrer que ABC est un triangle isocèle et rectangle.

   b) Déterminer α pour que $ABCD$ soit un carré.

Exercice 3 (4 points) 36

Soit θ un réel de l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout nombre complexe z

$f(z)=z^2-(1+\cos\theta)z-i\sin\theta(1+e^{i\theta})$.

1. a) Vérifier que $f(-i\sin\theta)=0$.
   b) En déduire l'autre solution z_2 de l'équation $f(z)=0$.
   c) Ecrire sous forme exponentielle les solutions z_1 et z_2.
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points M et A d'affixes respectives $z_1=-i\sin\theta$ et $z_A=1-\frac{1}{2}i$.
   a) Déterminer l'ensemble E des points M lorsque θ varie dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.
   b) Calculer AM en fonction de θ.
   c) Déterminer la valeur de θ pour laquelle la distance AM est minimale.

Exercice 4 (points)

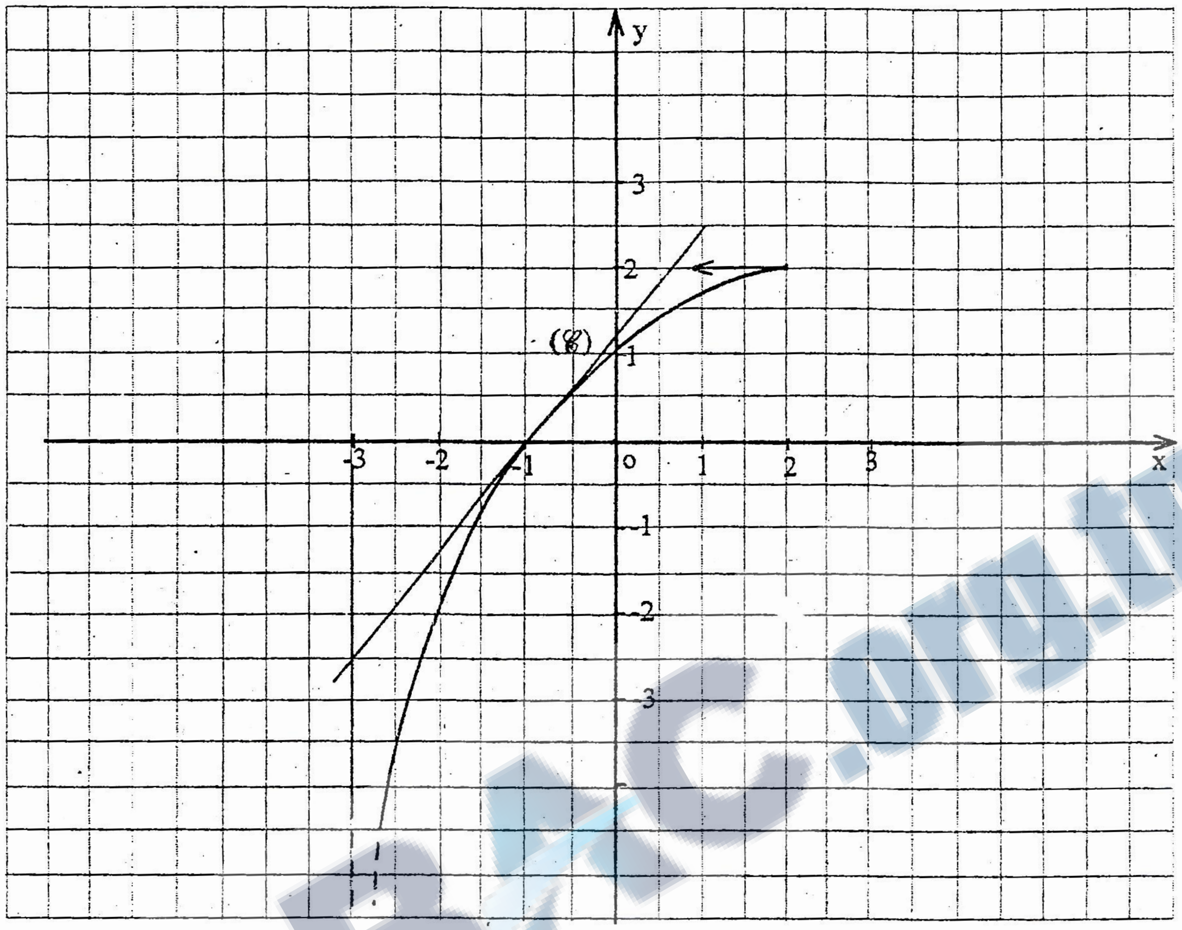
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1$. On désigne par ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f relativement à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Montrer que pour tout réel x $f'(x)=\frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}$
   c) Dresser le tableau de variation de f.
2. a) Montrer que la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,2[$. On note par f^{-1} la fonction réciproque de f.
   b) Etudier la continuité et le sens de variation de f^{-1} sur $]0,2[$.
3. Pour tout $x\in]0,2[$ On pose $g(x)=\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}$ et la fonction h = fog.
   a) Montrer que g est dérivable sur $]0,2[$ et calculer g'(x) et dresser le tableau de variation deg .
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to2^-} h(x)$.
   c) Montrer que h est dérivable sur $]0,2[$ et calculer h'(x).
4. Calculer $fog(x)$ pour tout x∈ $]0,2[$. Déduire l'expression de $f^{-1}(x)$.

ANNEXE (1)

37

Nom et prénom...Classe..........................



Corrigé du devoir de synthèse 1
4e Tech – 4e Sc Exp. (2011 – 2012)

38

Exercice 1.

1) a) $\lim\limits_{(-3)^+} f = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = 0$; $f(-1) = 0$

$f'(-1) = \dfrac{-\frac{5}{2} - 0}{-3+1} = \dfrac{5}{4}$ car la tangente passe par les points $M(-3, -\frac{5}{2})$ et $M'(-1, 0)$

$y = \frac{5}{4}(x+1)$ est une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse (-1)

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x)-2}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = 0$; $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x)-2}{x-2} = -\infty$

c)

x	-3		2	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	‖ $-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	2 ↘	0

2) a) g est continue et <u>strictement</u> croissante sur $]-3, 2]$ donc g réalise une bijection de $]-3, 2]$ sur $g(]-3, 2]) = f(]-3, 2]) =]-\infty, 2[$ donc g admet une réciproque g^{-1}

b)

x	$-\infty$	2
$g^{-1}(x)$	-3 ↗	2

$C_{g^{-1}} = S_\Delta(C_g)$ où $\Delta : y = x$ qui passe par $O(0,0)$ et $A(1,1)$. (Voir annexe)

Ex2 :

1) a) $(1+3i)^2 = 1 - 9 + 6i = -8+6i$

$-8+6i = (1+3i)^2$. Soit $\delta = 1+3i$ une racine

b) $\Delta = (1-i)^2 - 8(1-i) = -2i - 8 + 8i = -8+6i$ carrée de Δ ainsi $z' = \dfrac{-1+i-1-3i}{2} = -1-i$, $z'' = \dfrac{-1+i+1+3i}{2} = 2i$; $S_\mathbb{C} = \{-1-i ; 2i\}$

2) $P(-4) = (-4)^3 + (5-i)(-4)^2 + 6(1-i)(-4) + 8(1-i) = -64 + 80 - 16i - 24 + 24i + 8 - 8i$

$= (80 - 64 - 24 + 8) + i(-16 - 8 + 24) = 0$. ainsi (-4) une solution de : $P(z) = 0$

b) $\forall z \in \mathbb{C}$ $P(z) = (z+4)(z^2+az+b) = (z^3 + az^2 + bz + 4z^2 + 4az + 4b)$

$= z^2 + z^2(a+4) + z(b+4a) + 4b$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+4 = 5-i \\ b+4a = 6-6i \\ 4b = 8(1-i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1-i \\ 2(1-i)+4(1-i) = 6-6i \text{ vrai} \\ b = 2(1-i) \end{cases}$

ainsi $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z+4)(z^2 + (1-i)z + 2(1-i))$

c) $P(z) = 0 \Leftrightarrow z+4 = 0$ ou $z^2 + (1-i)z + 2(1-i) = 0 \Leftrightarrow z = -4$ ou $z = 2i$ ou $z = -1-i$

$S_\mathbb{C} = \{-4, 2i, -1-i\}$

S

$-4 = 4e$; $2i = 2e$

$\begin{cases} |-1-i| = \sqrt{2} \\ \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \alpha = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$ $\quad -1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

<u>ou encore</u> $-1-i = -(1+i) = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi)} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

3.)a) $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = \frac{-1-i-2i}{-1-i+4} = \frac{-1-3i}{3-i} = \frac{i^2-3i}{3-i} = \frac{i(i-3)}{3-i} = -i$ est un imaginaire pur de module 1 donc $\frac{|z_B - z_A|}{|z_B - z_C|} = \frac{AB}{BC} = 1$ et $(AB) \perp (BC)$.

<u>concl</u>. ABC est un triangle rectangle en B.

b) Comme ABC est un triangle rectangle et isocèle en B alors ABCD est un carré ssi $\vec{AB} = \vec{DC}$ ssi $z_C - z_D = z_B - z_A \Leftrightarrow \alpha = z_D = z_A + z_C - z_B = 2i + 4i - 4 = -3+3i$

$\boxed{\alpha = -3+3i = z_D}$

<u>Exercice 3</u> :

1)a) $f(-i\sin\theta) = (-i\sin\theta)^2 + i\sin\theta - i\sin\theta\cos\theta - i\sin\theta(1+e^{i\theta})$

$= -i\sin\theta\,[-i\sin\theta + 1 - \cos\theta + 1 + e^{i\theta}] = -i\sin\theta\,[\underbrace{\cos\theta - i\sin\theta}_{-e^{i\theta}} + e^{i\theta}] = 0$

donc $-i\sin\theta$ est une solution de l'équation $f(z) = 0$

b) $z' = -i\sin\theta$, $z' \times z'' = \frac{c}{a} = -i\sin\theta(1+e^{i\theta}) \Leftrightarrow (-i\sin\theta)z'' = -i\sin\theta(1+e^{i\theta})$

$\Rightarrow z'' = 1+e^{i\theta}$ (on peut utiliser la somme $z'+z'' = -\frac{b}{a}$)

c) $z' = -i\sin\theta$ et $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\sin\theta > 0$ d'où $z' = \sin\theta\, e^{-i\frac{\pi}{2}}$ (F. Expo)

$z'' = 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$ or $\cos\frac{\theta}{2} > 0\ \forall \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

donc $z'' = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$ (F. Expo)

2)a) M d'affixe $\begin{cases} z' = -i\sin\theta \\ \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M(0; -\sin\theta) \\ \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = -\sin\theta \in]~~-1~~, 0[\end{cases}$

M décrit le segment $[OB] - \{O, B\}$ où $O(0,0)$ et $B(0;-1)$.

b) on peut utiliser deux méthodes pour déterminer la valeur de θ pour laquelle AM est minimale. <u>1^e méthode</u> : on a $AM = |z_M - z_A| = \sqrt{1 + (\frac{1}{2} - \sin\theta)^2}$ et on pose $f(\theta) = \sqrt{1+(\frac{1}{2} - \sin\theta)^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - \sin\theta + \sin^2\theta}$. on dresse le tableau de variation de f sur $]0; \frac{\pi}{2}[$: $f'(\theta) = \frac{-\cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{2\sqrt{\frac{5}{4} - \sin\theta + \sin^2\theta}} = \frac{\cos\theta(2\sin\theta - 1)}{2\sqrt{\frac{5}{4} - \sin\theta + \sin^2\theta}}$

θ	0		$\boxed{\pi/6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$	$\frac{5}{4}$	↘	1	↗	$\frac{5}{4}$

…/…

$AM = \sqrt{1+(\frac{1}{2}-\sin\theta)^2}$ $= |z_M - z_A| = |-i\sin\theta - i + \frac{i}{2}|$

$AM = \sqrt{\frac{5}{4} - \sin\theta + \sin^2\theta}$

40

c) $AM \geq 1$ donc AM est minimale si $AM = 1 \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

<u>Exercice 4 ;</u>

1) a) $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to -\infty}\left[\frac{x}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} + 1\right] = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{x}{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} + 1\right) = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} + 1\right) = 0$

$\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} + 1\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} + 1\right) = 2.$

b) $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \dfrac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2)} = \dfrac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}$

c) $f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2

2) a) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]0;2[$

b) f^{-1} est continue et strictement croissante sur $]0;2[$. En effet f^{-1} a le même sens de variation que celui de f, chacune sur son domaine.

3) $g(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}$

$x \longmapsto 2x - x^2$ est dérivable et strict positive sur $]0,2[$ donc $x \overset{u}{\longmapsto} \sqrt{2x-x^2}$ est dérivable sur $]0,2[$, $x \overset{v}{\longmapsto} x-1$ est dérivable sur $]0,2[$ et donc g est dérivable sur $]0,2[$ comme quotient $\frac{v}{u}$ de deux fonctions dérivables sur $]0,2[$ et $u(x) \neq 0$

et $\forall x \in]0,2[$ $g'(x) = \dfrac{\sqrt{2x-x^2} - (x-1)\frac{(2-2x)}{2\sqrt{2x-x^2}}}{(2x-x^2)} = \dfrac{2x-x^2+(x-1)^2}{(\sqrt{2x-x^2})^3}$

$= \dfrac{1}{(\sqrt{2x-x^2})^3}$

x	0		2
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{0^+} g = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-1 \to -1}{\sqrt{2x-x^2} \to 0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{2^-} g = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(x-1) \to 1}{\sqrt{2x-x^2} \to 0^+} = +\infty$

b) $\lim\limits_{0^+} h = \lim\limits_{x\to 0^+} f\circ g(x) = 0^+$ car $\begin{cases}\lim\limits_{0^+} g = -\infty \text{ et} \\ \lim\limits_{-\infty} f = 0\end{cases}$

$\lim\limits_{2^-} h = \lim\limits_{x\to 2^-} f\circ g(x) = 2$ car $\begin{cases}\lim\limits_{2^-} g = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} f = 2\end{cases}$

c) g est dérivable sur]0, 2[, g(]0,2[) = IR, f est dérivable sur IR donc h = fog est dérivable sur]0, 2[(4,1) ③

$h'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$, on calcule d'abord $f'(g(x))$.

$$f'(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+(g(x))^2}^3} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(x-1)^2}{2x-x^2}}^3} = \frac{(\sqrt{2x-x^2})^3}{\sqrt{2x-x^2+x^2-2x+1}^3} = \sqrt{2x-x^2}^3$$

$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}^3}$ d'où $g'(x) \times f'(g(x)) = h'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}^3} \times \sqrt{2x-x^2}^3 = 1$.

4) $$f\circ g(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)}{\sqrt{1+(g(x))^2}} + 1 = \frac{\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{(x-1)^2}{2x-x^2}}} + 1 = \frac{\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}} + 1 = x$$

$\forall x \in]0;2[$.

$f\circ g(x) = x = f\circ f^{-1}(x)$ $\forall x \in]0, 2[$ $\Rightarrow g(x) = f^{-1}(x)$.

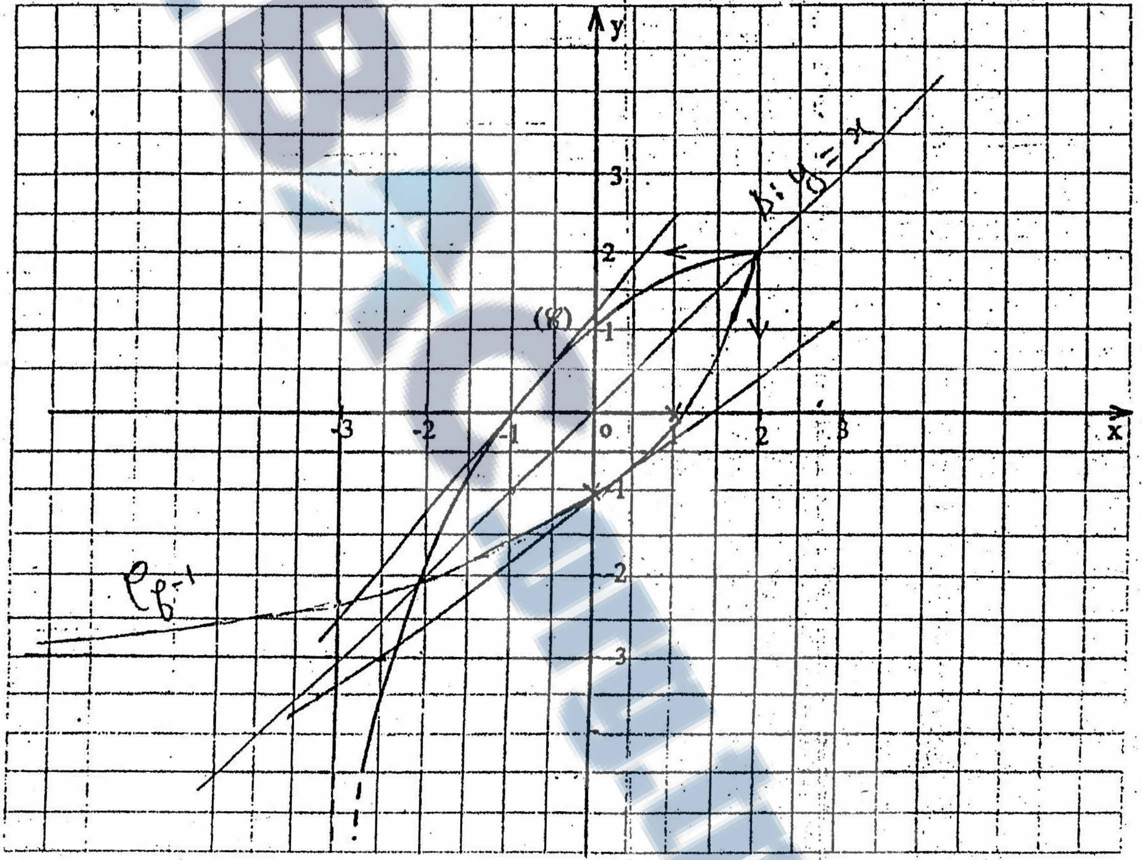
$\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}$

④

42

ANNEXE (1)

Nom et prénom……………………………………………………Classe…………………………



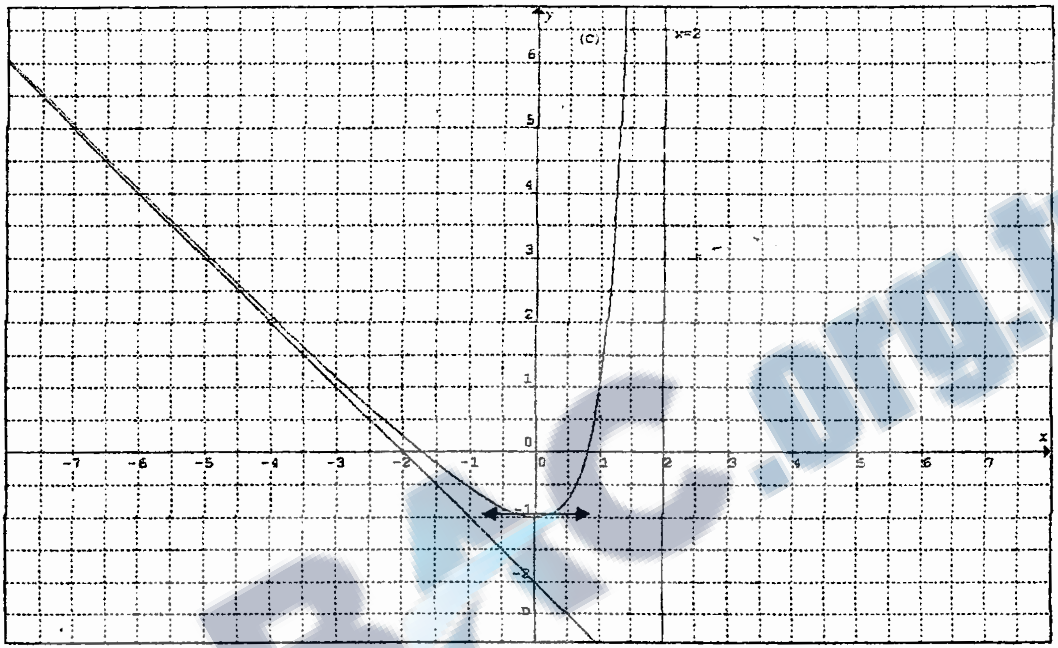
Lycée Habib Thameur. Sfax	A.S :2014/2015 - Durée : 2h
Prof : Elloumi Abdallah	Classe : $4^{ème}$SC 3

Devoir de contrôle N°2

3165

EXERCICE N°1 (4 points)

La courbe (C) ci-dessous est la représentation graphique d'une primitive F d'une fonction f définie , continue et dérivable sur $]-\infty\ ,\ 2[$. La droite $\Delta: x = 2$ est une asymptote verticale à (C) et la droite $D: y = -x - 2$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.



1)Déterminer :

a) $\lim_{x\to 2^-} F(x)$; $\lim_{x\to -\infty} F(x)$; $\lim_{x\to -\infty} \frac{F(x)}{x}$ et $\lim_{x\to -\infty}(F(x) + x)$

b) $F(0)$ et $f(0)$.

2)Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout $x \in]-\infty\ ,\ 2[$.

3)On admet que $f(x) = -1 - \frac{8}{(x-2)^3}$. Déterminer $F(x)$.

4)Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0\ \ et\ \ x = 1$.

EXERCICE N°2 (6points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ,\vec{i}\ ,\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(-1,1,1)$, $B(1,-1,0)$, $C(1,0,1)$et $D(3,3,-1)$

1)a) Calculer les composantes du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points A , B et C ne sont pas alignés.

c) Calculer l'aire du triangle ABC.

2)a)Montrer que les points A , B , C et D sont les sommets d'un tétraèdre. det

b)On note v le volume du tétraèdre $ABCD$. Montrer que $v = 2$.

c)En déduire la distance du point D au plan (ABC).

317

3)On donne le point $H(3,-2,0)$.

a)Montrer que $\vec{AB}\vec{HC}$ est un parallélogramme.

b)Calculer le volume de la pyramide DABHC.

EXERCICE N°3 (4 points)

Soit la fonction f définie sur $[1,+\infty[$par $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

1)Montrer que f admet des primitives sur$[1,+\infty[$.

2)Soit F la primitive de f sur $[1,+\infty[$ qui s'annule en 1 . $F(1)=0$

Soit G la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $G(x)=F\left(\frac{1}{cosx}\right)$.

a)Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et que $G'(x)=tan^2x$.

b)En déduire que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $G(x)=tanx-x$.

3) a)Calculer $F(2)$ *et* $F(\sqrt{2})$

b)Déduire la valeur de l'intégrale $I=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$.

EXERCICE N°4 6 points)

Soit la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)Calculer $\lim_{x\to-1^+}f(x)$ *et* $\lim_{x\to+\infty}f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) a)Montrer que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et que pour tout $x\in]-1,+\infty[$

on a : $f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{x+1}^3}$.

b)Dresser le tableau de variation de f .

3) a)Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $]-1,+\infty[$ une unique solution α et que $\alpha\in]1,2[$.

b)*Montrer que f réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera .*

On note f^{-1} la fonction réciproque de f et on désigne par $(C_{f^{-1}})$ sa courbe représentative dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

c)Montrer que f^{-1} est dérivable en 2 et calculer $(f^{-1})'(2)$.

d)Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $\in I$.

4)Construire (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.

5)Calculer ,en u.a , l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , $(C_{f^{-1}})$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. en fonction de α

318

Lycée Habib Thameur Sfax $4^{\text{éme}}$ Sc exp

Devoir de contrôle N°2

Exercice N°1

1) a) $\lim\limits_{x\to 2^-} F(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{F(x)}{x}=-1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)+x=-2$

b) $F(0)=-1$; $f(0)=0$

2) on a : $f(x)=F'(x)$; $x\in]-\infty,2[$

x	$-\infty$		0		2
$f(x)$		$-$	0	$+$	

3) $f(x)=F'(x)=-1-\frac{8}{(x-2)^3}$ donc $F(x)=-x+\frac{4}{(x-2)^2}+k$; $x\in]-\infty,2[$

$F(0)=-1 \Leftrightarrow k=-2$ d'où $F(x)=-x-2+\frac{4}{(x-2)^2}$; $x\in]-\infty,2[$

4) $\mathcal{A}=\int_0^1 f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_0^1=F(1)-F(0)=1+1=2$ unités d'aire

Exercice N°2

1) a) $\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}\wedge\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\vec{u}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-2&-1\\-1&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}-1&0\\2&2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&2\\-2&-1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\neq\vec{0}$ donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires d'où A, B et C ne sont pas alignés

c) $\mathcal{A}_{ABC}=\frac{1}{2}\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|=\frac{1}{2}\|\vec{u}\|=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+2^2+2^2}=\frac{3}{2}$

2) a) $\vec{AD}\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}$; $\det(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})=\begin{vmatrix}2&2&4\\-2&-1&2\\-1&0&-2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1&2\\0&-2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-2&2\\-1&-2\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}-2&-1\\-1&0\end{vmatrix}$

$=2\times2-2\times6+4\times(1)=-12\neq0$ donc A, B, C et D ne sont pas coplanaires d'où ils sont les sommets d'un tétraèdre.

b) $\mathcal{V}=\frac{1}{6}\left|\det(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})\right|=\frac{|-12|}{6}=2$

c) $\mathcal{V}=\frac{\mathcal{A}_{ABC}\times d(D;(ABC))}{3}=2$ donc $d(D,(ABC))=\frac{6}{\frac{3}{2}}=\frac{12}{3}=4$

3) a) $\vec{CH}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}=\vec{AB}$ donc ABHC est un parallélogramme

b)

$\mathcal{A}_{ABHC}=\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|=\|\vec{u}\|=3$ donc $\mathcal{V}_{DABHC}=\frac{\mathcal{A}_{ABHC}\times d(D;(ABC))}{3}=\frac{3\times4}{3}=4$

Exercice N°3

1) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$; $x\in[1,+\infty[$ f est continue sur $[1,+\infty[$ donc f admet des primitives sur $[1,+\infty[$

2) a) F est une primitive de f avec $F(1)=0$ donc F est dérivable sur $[1,+\infty[$ la fonction $\varphi : x\mapsto \frac{1}{\cos x}$; $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$ est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ de plus $\frac{1}{\cos x}\geq 1$ pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$ donc $G=F\circ\varphi$ est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et on a : $G'(x)=F'(\varphi(x))\times\varphi'(x)=f(\varphi(x))\times\varphi'(x)=\frac{\sqrt{(\frac{1}{\cos x})^2-1}}{(\frac{1}{\cos x})}\times\frac{\sin x}{\cos^2 x}$

$=\left|\frac{\sin x}{\cos x}\right|\times\cos x\times\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\tan^2 x$; $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$;

b) $G'(x)=(1+\tan^2 x)-1$; $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$ donc $G(x)=\tan x-x+k$ or $G(0)=F(1)=0$ donc $k=0$ d'où $G(x)=\tan x-x$; $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$

3) a) $F(2)=F(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}})=G(\frac{\pi}{3})=\tan(\frac{\pi}{3})-\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

$F(\sqrt{2})=F(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}})=G(\frac{\pi}{4})=\tan(\frac{\pi}{4})-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$

b) $I=\int_{\sqrt{2}}^{2}f(t)\,dt=\left[F(t)\right]_{\sqrt{2}}^{2}=F(2)-F(\sqrt{2})=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}-1+\frac{\pi}{4}$

$I=\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$

Exercice N°4

1) $\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}=1$ donc $\Delta : x=-1$ et $\Delta' : y=1$ sont deux asymptotes à $\mathscr{C}_f$.

2) a) $x\mapsto\sqrt{x+1}$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ donc f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ (car $\sqrt{x+1}\neq 0$) et $f'(x)=(\frac{-1}{2\sqrt{x+1}})\times\frac{1}{\sqrt{x+1}^2}=\frac{-1}{2\sqrt{x+1}^3}$

b)

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	$+\infty$ ↘	1

3) a) soit $g(x)=f(x)-x$; $x\in]-1,+\infty[$; $g'(x)=f'(x)-1<0$; $x\in]-1,+\infty[$ g est continue et strictement décroissante sur $]-1,+\infty[$ donc g réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$ $0\in]-\infty,+\infty[$ donc l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α

$g(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $g(2)=\frac{1}{\sqrt{3}}-1$; $g(1)\times g(2)<0$ donc $\alpha\in]1,2[$

D'où l'équation $f(x)=x$ admet dans $]-1,+\infty[$ une unique solution α et $\alpha\in]1,2[$

b) f est continue et strictement décroissante sur $]-1,+\infty[$ donc f réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur $]1,+\infty[$

c) f est dérivable en 0 et $f'(0)=-\frac{1}{2}\neq 0$; $f(0)=2$ donc f^{-1} est dérivable en 2 et $(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(f^{-1}(2))}=\frac{1}{f'(0)}=-2$

3/9

d) $f^{-1}(x)=y$; $x\in]1,+\infty[$; $y\in]-1,+\infty[$

$\Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{y+1}}=x \Leftrightarrow x-1=\frac{1}{\sqrt{y+1}} \Leftrightarrow y+1=\frac{1}{(x-1)^2} \Leftrightarrow y=\frac{1}{(x-1)^2}-1$

$f^{-1}(x)=\frac{-x^2+2x}{(x-1)^2}$

4) $\mathscr{C}_{f^{-1}}=S_{\Delta_1}(\mathscr{C}_{f})$; $\Delta_1 : y=x$

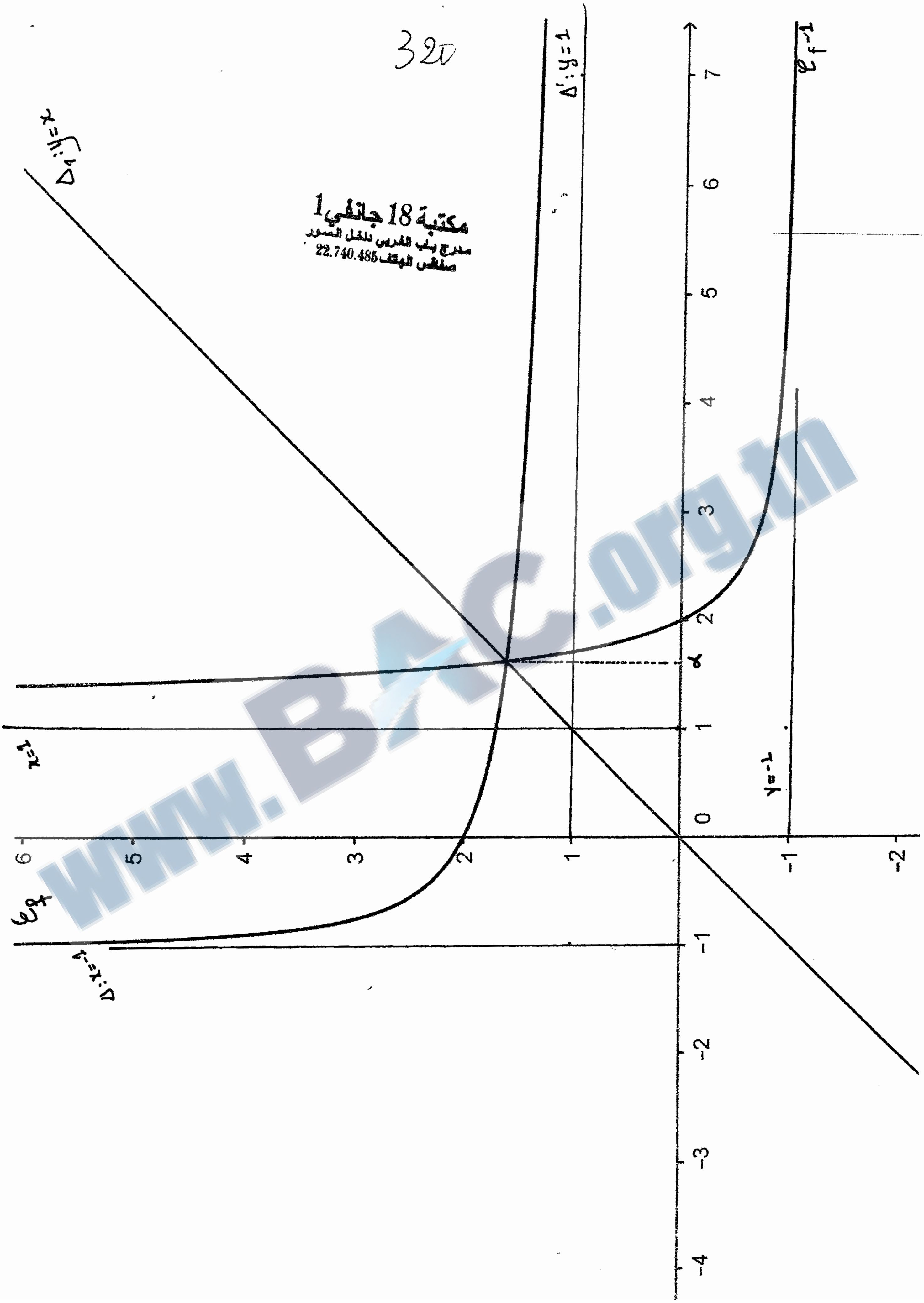
5) on a : $f(\alpha)=\alpha$ donc $1+\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}}=\alpha$ d'où $\sqrt{\alpha+1}=\frac{1}{\alpha-1}$

Par raison de symétrie $\mathcal{A}=2\times\int_0^{\alpha}1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}-x\,dx$

$\mathcal{A}=2\left[x+2\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\alpha}=2\left[\alpha+2\sqrt{\alpha+1}-\frac{1}{2}\alpha^2-2\right]=2\left[\alpha+\frac{2}{\alpha-1}-\frac{1}{2}\alpha^2-2\right]$

$\mathcal{A}=2\times\left[\frac{2\alpha(\alpha-1)+2-\alpha^2(\alpha-1)-4(\alpha-1)}{2(\alpha-1)}\right]=\frac{-\alpha^3+3\alpha^2-6\alpha+6}{(\alpha-1)}=-\alpha^2+2\alpha+\frac{4}{\alpha-1}-4$ u.a

320


Δ₁ : y = x
Δ' : y = 1
$\mathcal{C}_{f^{-1}}$
$\mathcal{C}_f$
Δ : x = −1
x = 1
y = −1
α
0
1
2
3
4
5
6
7
−1
−2
−3
−4
1
2
3
4
5
6
−1
−2

Lycée Pilote Sfax
Le 13 -02- 2013

Devoir de contrôle N°2
Durée : 2 heures

Classes : $4^{ème}$ Sc_{1+2+3}
Mme : Fakhfakh
Mrs : Smaoui et Boukhris

Exercice 1 (7pts)

20
7

L'annexe représente un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On désigne par $A(2,0,0)$, $B(1,2,0)$, $C(0,3,0)$, $S(0,0,2)$, $E(3,0,0)$ et $F(0,4,0)$.

1.a. Placer ces points dans l'annexe ci-jointe.

b. Calculer les volumes des tétraèdres SOAB et SOBC.

c. En déduire le volume de la pyramide SOABC.

2.a. Déterminer une équation cartésienne du plan (SEF).

b. Soit A' le point tel que $\overrightarrow{AA'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AS}$ et P le plan parallèle à (SEF) et passant par A'.

Montrer qu'une équation cartésienne de P est $4x+3y+6z-11=0$.

3. P coupe les arêtes $[SO]$, $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$ de la pyramide SOABC respectivement aux points O', A', B' et C'.

a. Déterminer les coordonnées de O'.

b. Vérifier que C' a pour coordonnées $\left(0, 1, \frac{4}{3}\right)$.

c. Déterminer les coordonnées de B'.

d. Vérifier que $O'A'B'C'$ est un parallélogramme et calculer son aire.

Exercice 2 (7pts)

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Dresser le tableau de variation de f.

2. Etudier la position de C_f par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

3. Tracer Δ et C_f.

4. Soit $I = \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{2x+1}}dx$.

a. Donner une interprétation graphique de I.

b. Calculer I.

5.a. Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b. Tracer dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $\mathscr{C}'$ de la fonction réciproque de f.

c. Déterminer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par C_f et $\mathscr{C}'$.

Exercice 3 (6pts)

21

Soit la fonction f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x)=\tan x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ sur $[0,1]$.

2. On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f.

   a. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0,1]$ et que pour tout $x\in[0,1]$, $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

   b. Vérifier que $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}$.

3. On considère la suite (J_n) définie par $J_0=\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}dt$ et $J_n=\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt$, $n\geq 1$.

   a. Montrer que pour tout $n\geq 1$ et pour tout $t\in[0,1]$, $0\leq \frac{t^{2n}}{1+t^2}\leq t^{2n}$.

   b. En déduire que pour tout $n\geq 1$, $0\leq J_n\leq \frac{1}{1+2n}$.

   c. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

4. On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{1+2k}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots+\frac{(-1)^n}{1+2n}$.

   a. Montrer que pour tout $n\geq 0$, $J_{n+1}+J_n=\frac{1}{1+2n}$.

   b. Montrer par récurrence que pour tout $n\geq 0$, $J_{n+1}=(-1)^n\left(U_n-J_0\right)$.

   c. En déduire la limite de (U_n).

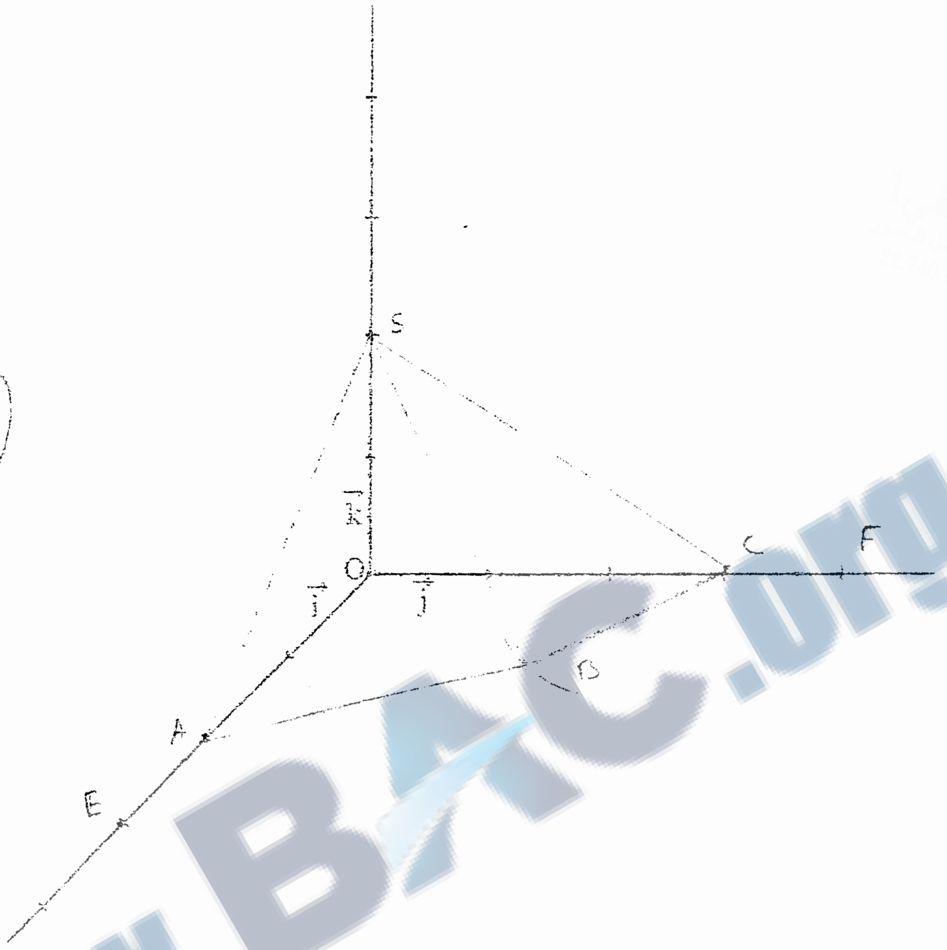
Annexe

Nom et prénom :

22 + 23

Classe : 4S3

①

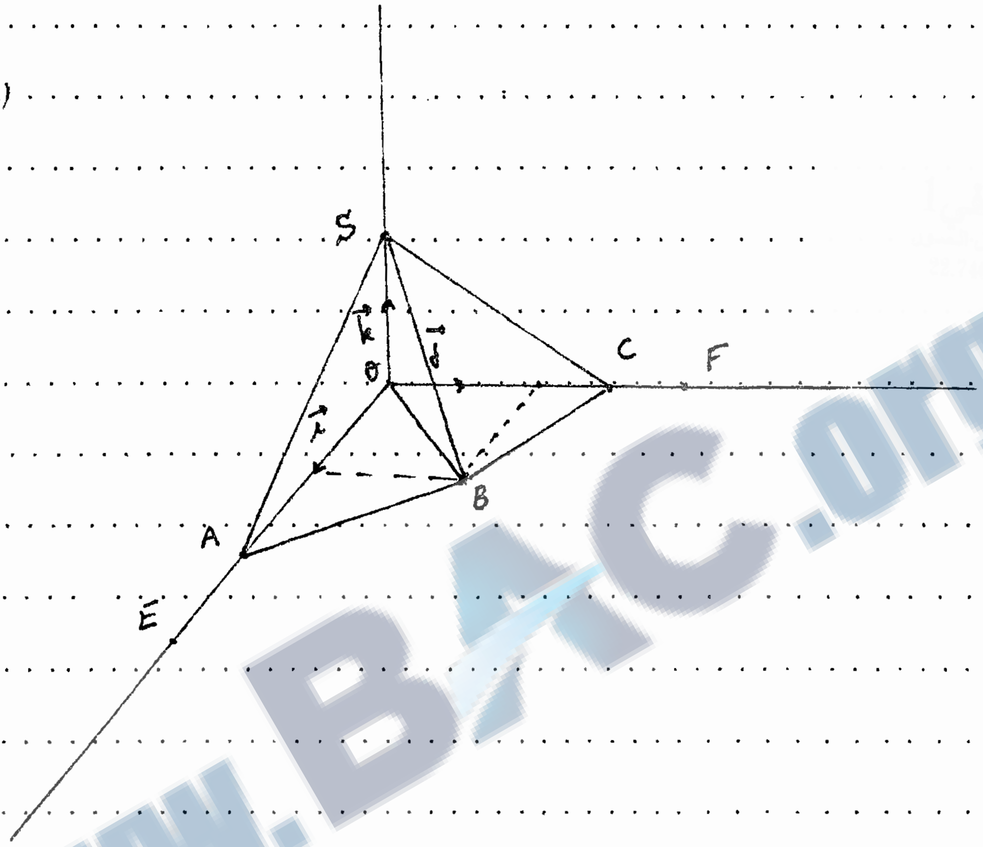


Lycée Pilote Sfax 24 $4^{ème}$ SC.exp

Devoir de contrôle n°2

Exercice 1

1) a)



b) $\vec{OA}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$; $\vec{OB}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$; $\vec{OS}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$; $\vec{OC}\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$

$$v_1 = v(SOAB) = \frac{1}{6}\left|\det(\vec{OA},\vec{OB},\vec{OS})\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|2\times\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\times 8 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$v_2 = v(SOBC) = \frac{1}{6}\left|\det(\vec{OB},\vec{OC},\vec{OS})\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}1&0&0\\2&3&0\\0&0&2\end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\times\left|2\times\begin{vmatrix}1&0\\2&3\end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\times 6 = 1$$

c) $v_3 = v(SOABC) = v_1 + v_2 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$

2) a)

$$\vec{SE}\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} \wedge \vec{SF}\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix} = \vec{N}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&4\\-2&-2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-2&-2\\3&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3&0\\0&4\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \vec{N}\begin{pmatrix}8\\6\\12\end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ donc}$$

25

$\vec{N}'=\frac{1}{2}\vec{N}=\begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan $(SEF): ax+by+cz+d=0$.

Soit $(SEF): 4x+3y+6z+d=0$; $S(0;0;2)\in(SEF)$ donc $4\times0+3\times0+6\times2+d=0$ d'où $d=-12$ ...... $(SEF): 4x+3y+6z-12=0$

b) $\vec{AA'}=\frac{3}{4}\vec{AS}$ donc $\begin{cases} x_{A'}-2=\frac{3}{4}\times(0-2)=-\frac{3}{2}\\ y_{A'}-0=\frac{3}{4}(0-0)=0\\ z_{A'}-0=\frac{3}{4}(2-0)=\frac{3}{2}\end{cases}$

d'où $\begin{cases} x_{A'}=\frac{1}{2}\\ y_{A'}=0\\ z_{A'}=\frac{3}{2}\end{cases}$ soit $A'(\frac{1}{2};0;\frac{3}{2})$.

$P \parallel (SEF)$ donc $\vec{N}'\begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan $P: ax+by+cz+d=0$

Soit $P: 4x+3y+6z+d=0$; $A'(\frac{1}{2};0;\frac{3}{2})\in P$ donc $4\times\frac{1}{2}+3\times0+6\times\frac{3}{2}+d=0$ d'où $d=-11$ ... $P: 4x+3y+6z-11=0$.

3) a) $P\cap[SO]=\{O'\}$; $\vec{OO'}$ et $\vec{OS}$ sont colinéaires donc il existe $k\in\mathbb{R}$ telque $\vec{OO'}=k\vec{OS}$ donc $x_{O'}=k\times0=0$

$y_{O'}=k\times0=0$ et $z_{O'}=k\times(2-0)=2k$; $O'(0;0;2k)$

$O'(0;0;2k)\in P$ donc $4\times0+3\times0+6\times2k-11=0$. Soit $k=\frac{11}{12}$

d'où $O'(0;0;\frac{11}{6})$

b) $P\cap[SC]=\{C'\}$; $\vec{SC'}$ et $\vec{SC}$ sont colinéaires donc il existe $k\in\mathbb{R}$ telque $\vec{SC'}=k.\vec{SC}$ donc $x_{C'}-0=k(0-0)=0$

$y_{C'}-0=k(3-0)=3k$ et $z_{C'}-2=k(0-2)=-2k$

$C'(0;3k;2-2k)\in P$ donc $4\times0+3\times3k+6\times(2-2k)-11=0$.

d'où $k=\frac{1}{3}$ et par suite $C'(0;1;\frac{4}{3})$

c) $P\cap[SB]=\{B'\}$; $\vec{SB'}$ et $\vec{SB}$ sont colinéaires donc il existe $k\in\mathbb{R}$ telque $x_{B'}-0=k(1-0)=k$; $y_{B'}-0=k(2-0)=2k$ et $z_{B'}-2=k(0-2)=-2k$; $B'(k;2k;2-2k)\in P$

26

donc $4k+3\times2k+6(2-2k)-11=0$ d'où $k=\frac{1}{2}$ et par suite $B'(\frac{1}{2},1,1)$

d) $\vec{O'A'}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$; $\vec{C'B'}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ donc $\vec{O'A'}=\vec{C'B'}$ d'où $O'A'B'C'$ est un parallélogramme

$\vec{O'A'}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\wedge\vec{O'C'}\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\vec{u}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&1\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}-\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$S(O'A'B'C')=\|\vec{O'A'}\wedge\vec{O'C'}\|=\|\vec{u}\|=\sqrt{(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{4})^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{61}}{12}$

Exercice 2

1) $f(x)=1+\frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}$; $x\in]-\frac{1}{2},+\infty[$

$f'(x)=\frac{1\times\sqrt{2x+1}-(x-1)\times\frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}^2}=\frac{2x+1-x+1}{\sqrt{2x+1}^3}=\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}^3}>0 ; x\in]-\frac{1}{2},$

$\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^+}1+\frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}=+\infty$

25

x	$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

2) $f(x)-x=1+\frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}-x=(x-1)\left[\frac{1}{\sqrt{2x+1}}-1\right]=\frac{(x-1)(1-\sqrt{2x+1})}{\sqrt{2x+1}}$

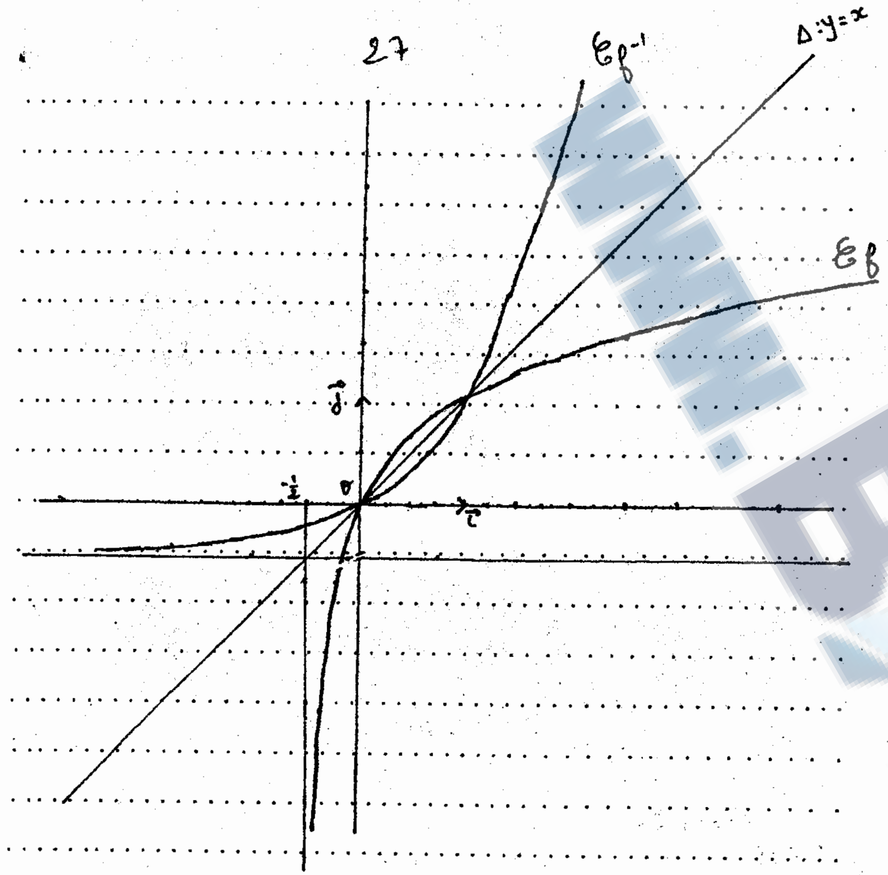
Si $x\geq0$ alors $2x+1\geq1$ donc $\sqrt{2x+1}\geq1$

Si $-\frac{1}{2}<x\leq0$ alors $0<2x+1\leq1$ donc $\sqrt{2x+1}\leq1$

x	$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$(x-1)$		−		−	0	+	
$1-\sqrt{2x+1}$		+	0	−		−	
$f(x)-x$		−	0	+	0	−	

Si $x\in]-\frac{1}{2},0]\cup[1,+\infty[$; $\mathcal{C}_f$ au dess de

Si $x\in[0,1]$; $\mathcal{C}_f$ au dessus de $\Delta: y=$



4) a) $-I + 1 = \int_0^1 f(x)\,dx$ c'est l'aire de la partie du plan limité par $\mathscr{C}_f$, la droite $x = 0$ et $x = 1$ donc $I = 1 - \int_0^1 f(x)dx$ est l'aire de la partie du plan limité par $\mathscr{C}_f$, la droite $y = 0$ et $y = 1$.

b). $I = \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$: intégration par partie

$\left.\begin{array}{l} u = 1 - x \;;\; u' = -1 \\ v' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \;,\; v = \sqrt{2x+1} \end{array}\right\} \quad I = \left[(1-x)\sqrt{2x+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \sqrt{2x+1}\,dx$

$I = -1 + \left[\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}\right]_0^1 = -1 + \sqrt{3} - \frac{1}{3} = \sqrt{3} - \frac{4}{3}$

5) a) f est continue et strictement croissante sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ donc f réalise une bijection de $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ sur $J = f(]-\frac{1}{2}, +\infty[) = \mathbb{R}$

b). $\mathscr{C}' = S_\Delta(\mathscr{C})$

c) $\mathcal{A} = 1 - 2I = 1 - 2\times(\sqrt{3} - \frac{4}{3}) = 1 - 2\sqrt{3} + \frac{8}{3} = \frac{11}{3} - 2\sqrt{3}$

Exercice 3

1) $f(x) = \tan x \;;\; x \in [0, \frac{\pi}{4}] \;;\; f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0 \;; x \in [0; \frac{\pi}{4}]$.
f est continue, strictement croissante sur $[0; \frac{\pi}{4}]$ donc f réalise une bijection de $[0; \frac{\pi}{4}]$ sur $f([0; \frac{\pi}{4}]) = [0; 1]$

2). a). $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ donc f^{-1} est dérivable sur $[0; 1]$ et pour tout $x \in [0, 1]$; $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(f^{-1}(x))}$

26

$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \tan y = x$ d'où $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

b). $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 (f^{-1})'(t)\,dt = \left[f^{-1}(t)\right]_0^1 = f^{-1}(1) - f^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

3). a). Pour tout $t \in [0, 1]$; $1 \leq 1 + t^2 \leq 2$ d'où $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$
Pour tout $n \geq 1$; $0 \leq t^{2n}$ donc $0 \leq \frac{t^{2n}}{1+t^2} \leq t^{2n}$

b). on a : pour tout $t \in [0, 1]$ et $n \geq 1$ $0 \leq \frac{t^{2n}}{1+t^2} < t^{2n}$
donc $\int_0^1 0\,dt \leq \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt \leq \int_0^1 t^{2n}dt = \left[\frac{1}{2n+1} t^{2n+1}\right]_0^1$
d'où $0 \leq J_n \leq \frac{1}{2n+1}$

c). $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$

4). a) $J_{n+1} + J_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt + \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{t^{2n}(t^2+1)}{t^2+1}dt = \int_0^1 t^{2n}dt = \frac{1}{1+2n}$

b). $J_1 + J_0 = \frac{1}{1+2\times0} = 1$ d'où $J_1 = 1 - J_0 = (-1)^0(U_0 - J_0)$

suite d'ex n° 3

D'où la propriété P est vrai pour $n=0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que $J_{n+1} = (-1)^n (u_n - J_0)$

$$J_{n+2} = \frac{1}{1+2(n+1)} - J_{n+1} = \frac{1}{2n+3} - (-1)^n (U_n - J_0) = (-1)^{n+1} (U_n - J_0) + \frac{1}{2n+3}$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{(-1)^{n+1}}{1+2n+2} = u_n + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} \quad \text{d'où } J_{n+1} = (-1)^{n+1} (U_{n+1} - J_0)$$

c) on a : $U_n = \frac{J_{n+1}}{(-1)^n} + J_0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{J_{n+1}}{(-1)^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = J_0 = \frac{\pi}{4}$