

Chapitre 6

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

**Les algorithmes d'approximation
Exercices**

Exercice n°1 :

On désire résoudre l'équation $\sin(x) = x - \frac{\cos(x)}{2}$

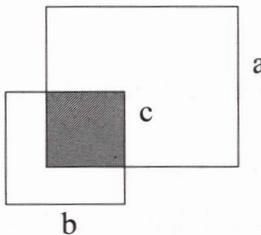
1. Proposer une analyse modulaire du problème,
2. Dédire les algorithmes correspondants.

Exercice n°2 :

Ecrire un programme, en Turbo Pascal, qui permet de retrouver le point fixe de la fonction $f(x) = 1/\sqrt{2x}$

Exercice n°3 :

Soient deux carreaux C1 et C2 de cotés respectifs a et b (a>b). C1 et C2 se croisent pour former un troisième carreau C3 de coté c.



Faire l'analyse et déduire l'algorithme d'un module permettant de déterminer le coté (c) maximal du carreau C3 afin que sa surface soit maximale.

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

Exercice n°4 :

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

L'une des méthodes de calcul de la valeur approchée de π est celle de Wallis dont la formule est la suivante :

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2}{1}\right) * \left(\frac{2}{3}\right) * \left(\frac{4}{3}\right) * \left(\frac{4}{5}\right) * \left(\frac{6}{5}\right) * \left(\frac{6}{7}\right) * \left(\frac{8}{7}\right) * (\dots)$$

Faire l'analyse et déduire l'algorithme d'un module permettant de calculer la valeur approchée de π en utilisant la formule de Wallis sachant que le calcul s'arrête si la différence entre deux termes consécutifs est $< \varepsilon$.

Exercice n°5 :

$$\text{Sachant que } \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Pour x très proche de zéro, Ecrire un programme, en Turbo Pascal, qui permet de calculer $\cos(x)$ en utilisant la formule ci-dessus. Le calcul s'arrête quand la différence entre deux termes consécutifs devient $\leq 10^{-4}$. Le dernier terme calculé est une valeur approchée de $\cos(x)$.

Exercice n°6 :

$$\text{Sachant que } e^x = 1 + (x/1!) + (x^2/2!) + (x^3/3!) + \dots$$

Faire l'analyse et déduire les algorithmes d'un programme qui permet de calculer e^x (pour tout x) en utilisant la formule ci-dessus. Le calcul s'arrête quand la différence entre deux termes consécutifs devient $\leq 10^{-5}$. Le dernier terme calculé est une valeur approchée de e^x .

Exercice n°7 :

Soit U une suite exprimée par la formule, récurrente, suivante :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} (U_n + a/U_n) \end{cases}$$

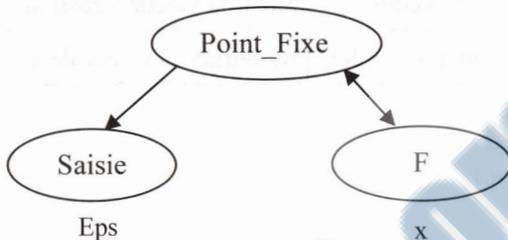
- Faire l'analyse et déduire l'algorithme d'un module qui affiche le premier terme de la suite et son rang vérifiant l'affirmation suivante : $|U_{n+1} - U_n| < 10^{-5}$ (a est un paramètre formel de type réel ≥ 0).
- Ecrire un programme, en Turbo Pascal, exécutant ce module.
- Quel objectif de calcul a cette suite?

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

Corrigés

Exercice n°1 :

I- Découpage



- ✓ **Point_Fixe** : programme principal, qui permet d'afficher le point fixe d'une fonction f.
- ✓ **Saisie** : procédure, permettant de saisir la valeur d'épsilon.
- ✓ **F** : fonction retournant le point fixe d'une équation à une itération donnée.

II- Analyses & Algorithmes

*** Programme principal : Point_Fixe ***

1) Spécification du problème :

Résultat = Afficher (xact)

Traitements =

- ✓ xact = []
- ↻ C'est la valeur actuelle de x calculée en fonction de la fonction F,
- ↻ $xact \leftarrow F(xact)$
- ↻ Répéter cette dernière tâche jusqu'à ce que la différence (en valeur absolue) entre deux calculs devient négligeable : $|xact - xprec| < Eps$
- ↻ $xprec =$ c'est la valeur du dernier x calculé, xact antérieur :
- ↻ $xprec \leftarrow xact$
- ↻ xact = initialement est égal à 1, c'est un choix arbitraire.
- ✓ $Eps =$ Saisie (Eps)
- ✓ Saisie et F = Modules

www.BAC.org.tn
Page: BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

www.BAC.org.tn
Page: BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

T.D.O.U.G

Objet	Nature/Type	Rôle
Eps	Réel	Contenir la valeur d'epsilon.
Xprec	Réel	Contenir la valeur précédente de x.
Xact	Réel	Contenir la valeur actuelle de x.
Saisie	Procédure	Saisir la valeur d'epsilon.
F	Fonction / Réel	Retourner la valeur de x.

2) Algorithme :

0) Début Point_Fixe

1) Saisie (Eps)

2) $xact \leftarrow 1$

Répéter

$Xprec \leftarrow xact$

$Xact \leftarrow F(xact)$

Jusu'à $Abs(xact-xprec) < Eps$

3) Ecrire ("Le point fixe est = ", xact)

4) Fin Point_Fixe

***** Procédure : Saisie *****

1) Spécification du problème :

Résultat = Eps

Traitements =

✓ Eps = Donnée avec Eps un petit réel $\in [10^{-6}..10^{-7}]$

✓ Eps = Paramètre formel

2) Algorithme :

0) Procédure Saisie (Var Eps : Réel)

1) Répéter

Ecrire ("Saisir un réel entre 1E-6 et 1E-4 :")

Lire (Eps)

Jusqu'à $(Eps \geq 1 E-6)$ ET $(Eps \leq 1 E-4)$

2) Fin Saisie



*** Fonction : F ***

1) Spécification du problème :

$$\text{Résultat} = F \leftarrow \sin(x) + \frac{\cos(x)}{2}$$

Traitements =

✓ x = Paramètre formel

2) Algorithmme :

0) Fonction F (x : Réel) : Réel

1) $F \leftarrow \sin(x) + \cos(x)/2$

2) Fin F

Exercice n°2 :

```

Program Equation;
Uses WinCRT;
Var xact, xprec, Eps : Real;

```

```

Procedure Saisie (VAR Eps : Real);
Begin

```

```

    Repeat

```

```

        Write ('Saisir un réel entre 1E-6 et 1E-4 : ');

```

```

        Readln (Eps);

```

```

    Until (Eps >= 1E-6) And (Eps <= 1E-4);

```

```

End;

```

```

    Function F (x: Real) : Real;

```

```

Begin

```

```

    F := 1/(SQRT(2*x));

```

```

End;

```

```

    {Programme principal}

```

```

Begin

```

```

    Saisie (Eps);

```

```

    xact := 1 ;

```

```

    Repeat

```

```

        xprec := xact;

```

```

        xact := F (xact);

```

```

    Until ABS(xact-xprec) < Eps;

```

```

    Write ('La fonction 1/Racine(2x) admet comme solution = ', xact:10:6);

```

```

End.

```

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

Exercice n°3 :**Analyse**

Idée de résolution : À l'état initial le côté c de $C3$ est nul, ce qui donne une surface de $C3 = 0$. La suite du traitement consiste à incrémenter c par un pas de variation de c (une petite valeur donnée par l'utilisateur). La valeur de c retenue est celle qui donne une surface de $C3$ **maximale** avec $c < b$, b est le côté de $C2$ inférieur à celui de $C1$.

*** Procédure : Cote ***

1) Spécification du problème :

Résultat = Afficher (S_{max})

Traitements =

- ✓ $S_{max} = [c \leftarrow 0 ; S_{max} \leftarrow 0]$
 - a) $S_{max} \leftarrow S$ Si $S > S_{max}$
 - b) $S =$ la surface de $C3 = c^2$
 - c) $c \nearrow +pas$ et $b \leftarrow b - c$
- ↳ Répéter les étapes a, b et c jusqu'à $b \leq c$.
- ✓ pas, a et b = Paramètres formels

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

T.D.O.U.L

Objet	Nature/Type	Rôle
S_{max}	Réel	Contenir la surface maximale de $C3$.
S	Réel	Contenir la surface actuelle de $C3$.
c	Réel	Contenir le côté de $C3$

2) Algorithme :

0) Procédure Cote (Pas, a, b : Réel)

1) $S_{max} \leftarrow 0 ; C \leftarrow 0$

Répéter

$c \leftarrow c + pas$

$S \leftarrow Carrée(c)$

Si $S > S_{max}$ Alors $S_{max} \leftarrow S$ FinSi

$b \leftarrow b - c$

Jusqu'à $b \leq c$

Ecrire ("Le côté de $C3 = "$, c , " $"$ et d'une surface = " $"$, S_{max})

2) Fin Cote

Exercice n°4 :

Analyse

Idee de résolution : un terme de la suite est une fraction numérique dépendant d'un numérateur N (initialement = 2) et d'un dénominateur D (initialement = 1). La progression d'un terme dépend, alors, de la valeur de N et celle de D, si $N > D$ alors D s'incrémentera de 2 sinon à N de s'incrémenter de 2.

*** Procédure : Wallis ***

1) Spécification du problème :

Résultat = Afficher (Pact)

Traitements :

✓ Pact = [Pact ← 1 ; N ← 2 ; D ← 1]

a) Pact ← Pprec*N/D

b) Pprec ← Pact

c) $D \uparrow + 2$ Si $N > D$ Sinon $N \uparrow + 2$

↳ Répéter les étapes (a, b et c) jusqu'à $|Pact - Pprec| < Eps$

✓ Eps = Paramètre formel

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

T.D.O.U.L

Objet	Nature/Type	Rôle
Pprec	Réel	Contenir la valeur d'un terme précédent de la suite.
Pact	Réel	Contenir la valeur d'un terme actuel de la suite.
N	Entier	Numérateur.
D	Entier	Dénominateur.

2) Algorithme :

0) Procédure Wallis (Eps : Réel)

1) Pact ← 1

N ← 2

D ← 1

Répéter

Pprec ← Pact

Pact ← Pprec*N/D

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

```

Si N>D
  Alors D ← D+2
  Sinon N ← N+ 2
FinSi
Jusqu'à Abs(Pact-Pprec)<Eps
2) Ecrire ("La valeur de Pi = ", Pact)
3) Fin Wallis

```

Exercice n°5 :

www.BAC.org.tn
Page: BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

```

Program Cosinus;
Uses WinCRT;
Var x : Real;

Procedure Saisie (VAR x : Real);
Begin
  Repeat
    Write ('Saisir l'angle (en Radians) : ');
    Readln (x) ;
  Until (x>=0) And (x<=1);
End;

Function Puiss (x : Real ; n: Integer) : Real;
Var
  i : Integer ; P : Real ;
Begin
  P:=1;
  For i := 1 To n Do
    P:=P * x;
  Puiss := P;
End;

Function Fact (x: Integer) : LongInt;
Var
  i : Integer ;
  F : LongInt ;
Begin
  F:=1;
  For i := 1 To x Do
    F:=F*i;
  Fact := F;
End;

```

Function Calcul (x: Real): Real ;

Var

i, signe : Integer ;
Sact, Sprec : Real;

Begin

Sact :=1;

i :=0;

signe :=1;

Repeat

i:=i+2;

signe := -signe;

Sprec := Sact;

Sact := Sprec + signe*(Puiss(x,i) / Fact (i));

Until ABS(Sact-Sprec)<1E-4;

Calcul := Sact;

End ;

signe := -signe;

Chaque itération la variable
signe change de signe !!!

{Programme principal}

Begin

Saisie (x);

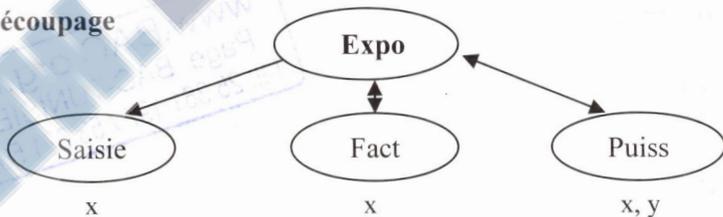
Write ('Cos('x:2:3,') =', Calcul (x):2:5);

End.

Exercice n°6 :

www.BAC.org.tn
Page: BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

I- Découpage



- ✓ **Expo** : programme principal, qui permet d'afficher la valeur approchée de e^x .
- ✓ **Saisie** : procédure, permettant de saisir un réel x.
- ✓ **Fact** : fonction retournant la valeur de $x!$.
- ✓ **Puiss** : fonction retournant la valeur de x^y .

II- Analyses & Algorithmes

*** Programme principal : Expo ***

2) Spécification du problème :

Résultat = Afficher (eact)

Traitements =

- ✓ eact = []
- ↪ C'est la valeur actuelle de e^x ,
- ↪ eact \leftarrow eprec + Puiss(x, i)/Fact (i)
- ↪ i = Compteur allant de 1 jusqu'à $|eact-eprec| < 10^{-5}$
- ↪ eprec = c'est la valeur de la dernière e^x calculée, eact antérieure :
eprec \leftarrow eact
- ↪ eact = initialement est égale à 1,
- ✓ x = Saisie (x)
- ✓ Saisie, Puiss et Fact = Modules

T.D.O.U.G

Objet	Nature/Type	Rôle
x	Réel	Contenir un réel.
eact	Réel	Contenir la valeur de e^x actuelle.
eprec	Réel	Contenir la valeur de e^x précédente.
i	Entier	Compteur.
Saisie	Procédure	Saisir la valeur de x.
Puiss	Fonction / Réel	Retourner la valeur de x^i .
Fact	Fonction / Entier Long	Retourner la valeur de $i!$.

2) Algorithme :

- 0) Début Expo
- 1) Saisie (x)
- 2) eact \leftarrow 1
i \leftarrow 0
Répéter
 i \leftarrow i + 1
 eprec \leftarrow eact
 eact \leftarrow eprec + Puiss(x,i) / Fact(i)
Jusqu'à Abs (eact-eprec) < 1E-5
- 5) Ecrire ("e ^ ", x, " = ", eact)
- 6) Fin Expo

www.BAC.org.tn
Page: BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

*** Procédure : Saisie ***

1) Spécification du problème :

Résultat = x

Traitements =

- ✓ x = Donnée
- ✓ x = Paramètre formel

2) Algorithme :

0) Procédure Saisie (Var x : Réel)

- 1) Ecrire ("Saisir un réel : ")
Lire (x)
- 2) Fin Saisie

www.BAC.org.tn
Page: BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

*** Fonction : Puiss ***

1) Spécification du problème :Résultat = Puiss \leftarrow P

Traitements =

- ✓ P = [p \leftarrow 1]
- ↳ P = x*x*x*...*x un nombre de fois = y
- ✓ Ce traitement nécessite un compteur i allant de 1 à y
- ✓ x et y = Paramètres formels

T.D.O.U

Objet	Nature/type	Rôle
p	Réel	Contenir la puissance.
i	Entier	Compteur.

2) Algorithme :

0) Fonction Puiss (x: Réel ; y : Entier) : Réel

- 1) P \leftarrow 1
Pour i de 1 à y faire
P \leftarrow P*x
FinPour
- 2) Puiss \leftarrow P
- 3) Fin Puiss

*** Fonction : Fact ***

1) Spécification du problème :Résultat = Fact \leftarrow F

Traitements =

- ✓ $F = 1 * 2 * i * \dots * x$
- ✓ $i =$ Compteur allant de 1 à x
- ✓ $x =$ Paramètre formel

T.D.O.U

Objet	Nature/type	Rôle
F	Entier long	Contenir la valeur de la factorielle.
i	Entier	Compteur.

2) Algorithme :0) Fonction Fact ($x : \text{Entier}$) : Entier Long1) $F \leftarrow 1$ Pour i de 1 à x faire $F \leftarrow F * i$

FinPour

2) Fact $\leftarrow F$

3) Fin Fact

www.BAC.org.tn
Page: BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

Exercice n°7 :

a) Analyse et Algorithme de la procédure Suite :

1) Spécification du problème :Résultat = Afficher (Uact, i)

Traitements :

- ✓ Uact = [Uact \leftarrow 1; $i \leftarrow$ 0]
- ↳ Uact \leftarrow $\frac{1}{2}(U_{\text{prec}} + a/U_{\text{prec}})$
- ↳ $U_{\text{prec}} \leftarrow$ Uact
- ↳ $i =$ Compteur avec $i \uparrow + 1$ jusqu'à $|U_{\text{act}} - U_{\text{prec}}| < 10^{-5}$
- ✓ $a =$ Paramètre formel

T.D.O.U.L

Objet	Nature/Type	Rôle
Uprec	Réel	Contenir la valeur d'un terme précédent de la suite U.
Uact	Réel	Contenir la valeur d'un terme actuel de la suite U.
i	Entier	Compteur.

2) **Algorithme :**

0) Procédure Suite (a : Réel)

1) $Uact \leftarrow 1$ $i \leftarrow 0$

Répéter

 $i \leftarrow i + 1$ $Uprec \leftarrow Uact$ $Uact \leftarrow 1/2 * (Uprec + a/Uprec)$ Jusqu'à $Abs(Uact - Uprec) < 1 E-5$

2) Ecrire ("U", i, "=", Uact)

3) Fin Suite

b) **Traduction en Turbo Pascal :****Program** Calcul;

Uses WinCRT;

Var

a: Real;

Procedure Saisie (Var x : Real);

Begin

Repeat

Write ('Saisir un réel ≥ 0 :');

Readln(x);

Until $x \geq 0$;**End;**

www.BAC.org.tn
Page BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

```

Procedure Suite (a : Real);
Var
  Uprec, Uact: Real;
  i : Integer;
Begin
  Uact := 1;
  i := 0;
  Repeat
    i := i + 1;
    Uprec := Uact;
    Uact := 1/2*(Uprec + a/Uprec);
  Until Abs(Uact - Uprec) < 1E-5;
  Write ('U', i, ' = ', Uact:2:5);
End;

```

{Programme Principal}

```

Begin
  Saisie (a);
  Suite (a);
End.

```

c) L'objectif de cette suite est de calculer \sqrt{a} .

www.BAC.org.tn
Page: BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502



"حَمِّ التَّكَاثُلِ فِيهِ الْخَيْرَاتِ تَطْلُبُهُمَا فَلَيْسَ يَسْعَدُ بِالْخَيْرَاتِ كَسَلَانٌ"
البوسني