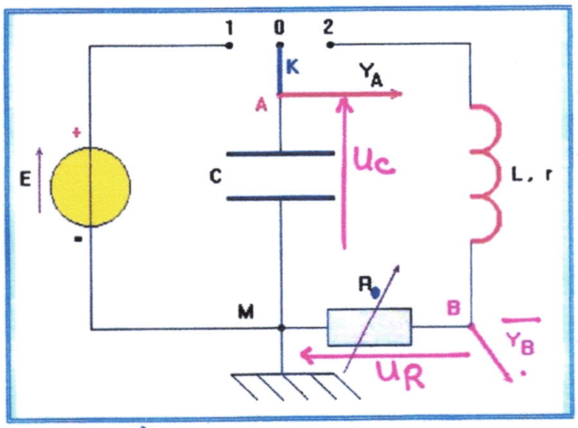
Les oscillations électriques libres amorties

1) Production d'oscillations libres amorties (décharge)



.K en (1) le condensateur se charge
.K en (2) le condensateur se décharge

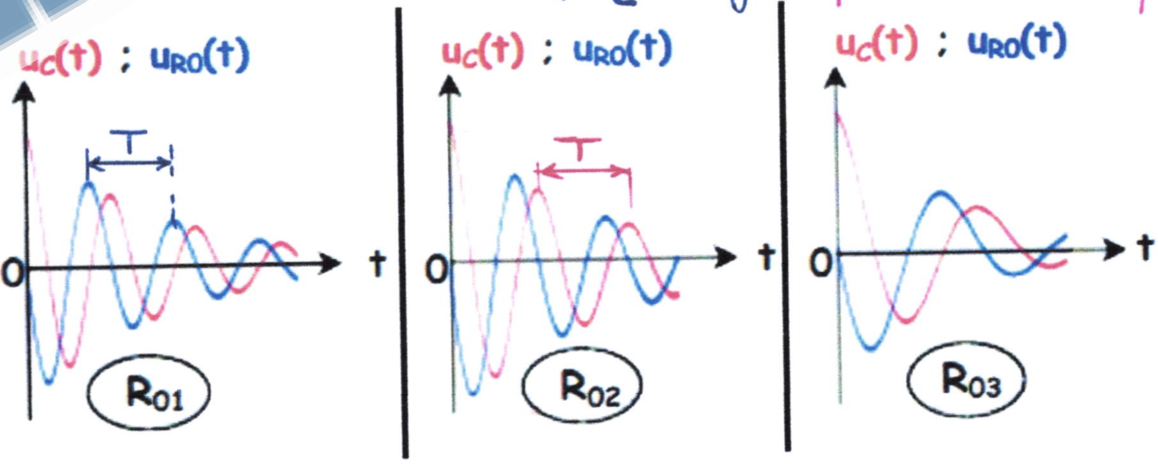
à $t=0$ $\begin{cases} u_C = E \\ Q_0 = C.E \\ i = 0 \end{cases}$

- la tension $u_C = \frac{q}{C}$ oscille d'où $q(t)$ oscille aussi
- la tension $u_R(t) = i(t).R$ oscille d'où $i(t)$ oscille aussi
- Au cours du temps l'amplitude des oscillations diminue : les oscillations sont dites amorties.

* libres : absence de générateur dans le circuit de décharge (oscillations qui s'effectuent d'elles mêmes sans apport d'énergie de l'extérieur).
* Les oscillations libres amorties sont pseudo-périodique de pseudo période T
* selon les valeurs de $R = R_0 + r$ on a plus R augmente plus
  - le nombre d'oscillations diminue
  - l'amplitude des oscillations diminue

Remarque
* si R_T est faible alors $T \simeq T_0$ période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$
si L ↓ ou C ↓ alors T ↓
* R_C : résistance critique
c'est la plus petite valeur élevée de R qui correspond à un régime apériodique

$R < R_C$: régime pseudopériodique



$R_{03} > R_{02} > R_{01}$

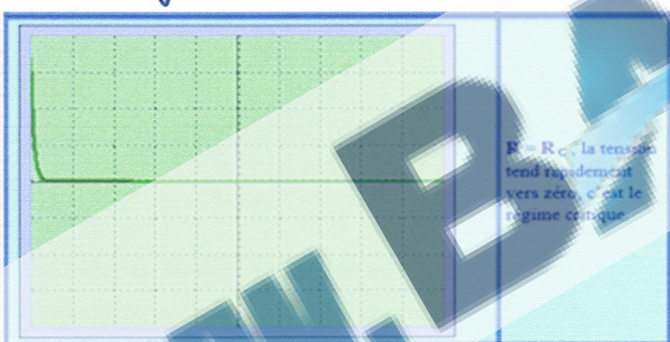
* La diminution de l'amplitude des oscillations est due à la diminution de l'énergie qui est perdue par effet joule dans le résistor.

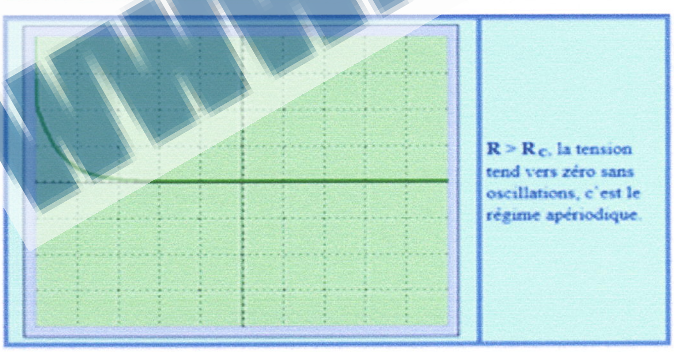
Définition

On appelle oscillations amorties les oscillations dont l'amplitude n'est pas constante, elle diminue au cours du temps.

* Pour des grandes valeurs de R c.à.d pour $R \geq R_c$

le régime devient apériodique, il n'y a plus d'oscillations





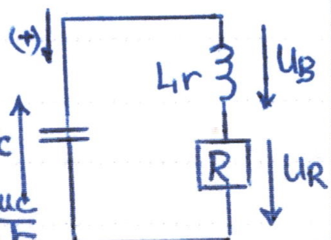
2°) Equation différentielle

Loi des mailles

$u_C + u_R + u_B = 0$

avec

$u_R = Ri = R\frac{dq}{dt} = RC\frac{du_C}{dt}$



* variable $q(t)$

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} + (R+r)i = 0$$

or

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

d'où $L\frac{d^2q}{dt^2} + (R+r)\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{(R+r)}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$$

* variable $u_C(t)$

$$u_C + L\frac{di}{dt} + (R+r)i = 0$$

avec

$$i = C\frac{du_C}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = C\frac{d^2u_C}{dt^2}$$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + (R+r)C\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \left(\frac{R+r}{L}\right)\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = 0$$

* variable $i(t)$

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} + (R+r)i = 0$$

en dérive par rapport au temps

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + (R+r)\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{R+r}{L}\right)\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0$$

* variable $u_R(t)$

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} + (R+r)i = 0$$

on dérive par rapport au temps

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + (R+r)\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = 0$$

or $i = \frac{u_R}{R} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{R}\frac{du_R}{dt}$

$$\frac{d^2i}{dt^2} = \frac{1}{R}\frac{d^2u_R}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{R}\frac{d^2u_R}{dt^2} + \left(\frac{R+r}{R}\right)\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC}u_R = 0$$

$$\frac{d^2u_R}{dt^2} + \left(\frac{R+r}{L}\right)\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{LC}u_R = 0$$

3°) Energie Totale de L'oscillateur

• Energie emmagasinée par la bobine

$$E_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\frac{L}{R^2}u_R^2$$

• Energie emmagasinée par le condensateur

$$E_C = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}C.u_C^2$$

• Energie électromagnétique

* $E = E_C + E_L$

$$E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$$

* $E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}L\left(\frac{dq}{dt}\right)^2$

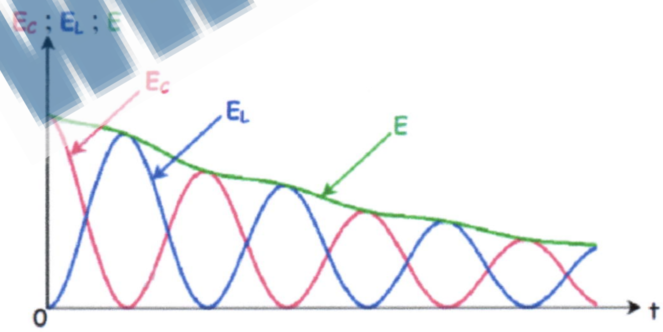
avec

$\frac{dq}{dt}$: represente le coefficient directeur de la tg à la courbe $q = f(t)$ à l'instant t choisi

* $E = \frac{1}{2}C u_C^2 + \frac{1}{2}LC^2\left(\frac{du_C}{dt}\right)^2$

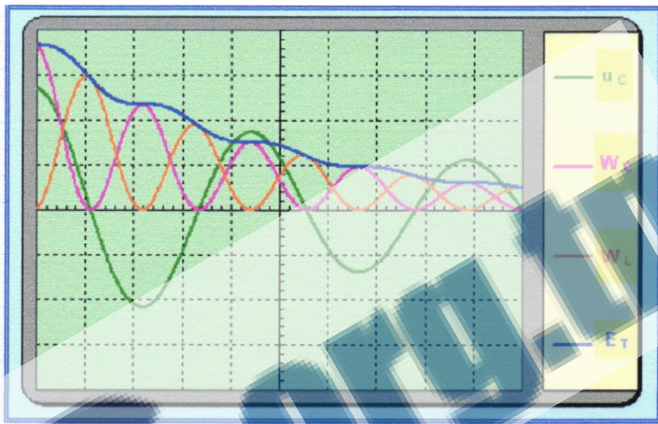
avec

$\frac{du_C}{dt}$: represente le coefficient directeur de la tg à la courbe $u_C = f(t)$ à L'instant t choisi



• L'energie totale decroit en fonction du temps, elle se dissipe par effet joule dans le resistor. En regime pseudopériodique, la décharge est oscillante, il y a transfert d'energie du condensateur vers la bobine et réciproquement de façon alternative.

En regime apériodique, il y a seulement transfert du condensateur vers la bobine lors de la décharge.



4°) La non conservation de L'energie totale du circuit RLC

• $\frac{d}{dt}(q^2) = 2q\frac{dq}{dt}$

• $\frac{d}{dt}(i^2) = 2i\frac{di}{dt}$

$$E = \frac{1}{2C}q^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\cancel{2}C}\cancel{2}q\frac{dq}{dt} + \frac{1}{\cancel{2}}L\cancel{2}i\frac{di}{dt}$$

$$= i\left(\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt}\right)$$

d'après L'eq diff :

$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = -(R+r)i$$

donc $\frac{dE}{dt} = -(R+r)i^2 \neq 0$

• L'energie de L'oscillateur n'est pas constante

• $\frac{dE}{dt} < 0$: L'energie de L'oscillateur diminue au cours du temps. (le système est non conservatif)

Remarques

* $E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$

• si $|i|$ est max alors $|u_R|$ est max
$\Rightarrow q = 0$ et $u_C = 0$
$E = \frac{1}{2}Li^2 = E_L$
L'énergie de l'oscillateur est purement magnétique

• si $|q|$ est max alors $|u_C|$ est max
$\Rightarrow i = 0$ et $u_R = 0$
$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = E_C$
L'énergie de l'oscillateur est purement électrique

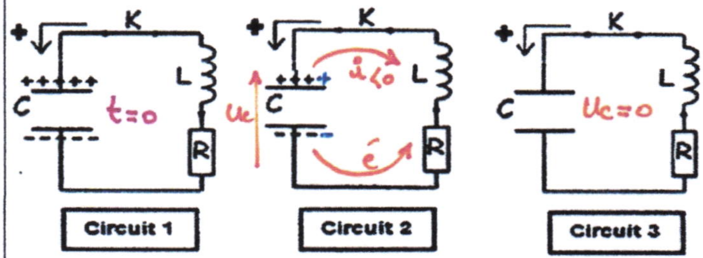
*• $\left|\frac{dE}{dt}\right| = (R+r)i^2$ puissance instantanée dissipée par effet joule dans la résistance totale du circuit

• $\frac{|\Delta E|}{\Delta t} = P_{moy}$ dissipée par effet joule dans le circuit

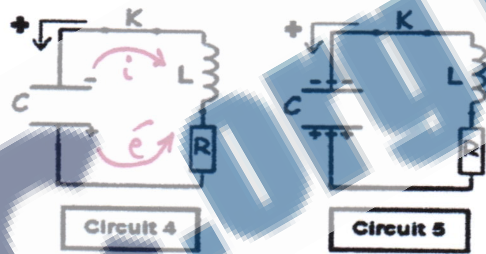
Remarque

Pour expliquer les oscillations, associer les circuits suivants aux instants ou aux intervalles de temps correspondants

t = 0 ; t∈] 0,T/4 [; t = T/4 ; t∈] T/4, T/2 [; t = T/2



$t = 0$	$t \in]0, \frac{T}{4}[$	$t = \frac{T}{4}$
• u_C max	$u_C > 0$ mais ↓	$u_C = 0$
• $i = 0$	$i = C\frac{du_C}{dt} < 0$ car $\frac{du_C}{dt}$ diminue	$i = -I_{max}$



$t \in]\frac{T}{4}, \frac{T}{2}[$	$t = \frac{T}{2}$
$u_C < 0$ mais $|u_C|$ ↑	$u_C = -U_{Cmax}$
$i = C\frac{du_C}{dt} < 0$	$i = 0$

Fin