Chapitre 4

Les Oscillateurs Mécaniques

Exercice N°1 : *(Principale 2007)*

Un oscillateur mécanique est constitué d'un solide (S) de masse m = 0,400kg et de centre d'inertie G, attaché à l'extrémité d'un ressort (R), à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur K = 28,5 $N.m^{-1}$ (Figure 1).

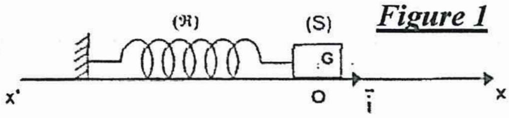


Figure 1

A l'équilibre, le centre d'inertie G de (S) coïncide avec l'origine o du repère $(o,\vec{i})$ d'axe (x'x). On désigne par x l'abscisse de G à un instant de date t, dans le repère $(o,\vec{i})$ et par v la valeur de sa vitesse à cet instant.

1°/ Etablir l'expression de l'énergie mécanique E du système $\{solide, ressort, terre\}$, à un instant t.

2°/ La figure 2 représente la variation de l'élongation de G au cours du temps.

a) Montrer que les oscillations du pendule élastique sont non amorties et que le système $\{solide, ressort, terre\}$ est conservatif.

b) Déduire à partir de l'expression de l'énergie E, l'équation différentielle reliant x à sa dérivée seconde par rapport au temps.

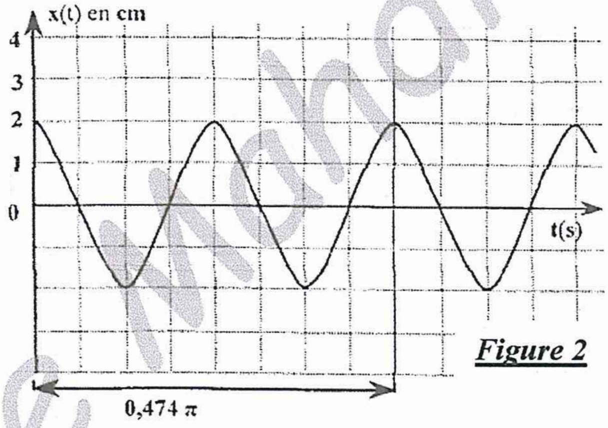


Figure 2

3°/ Vérifier que $x(t) = X_{1m}\sin(w_0 t + \varphi_1)$ est une solution de cette équation et préciser l'expression de w_0.

Déduire à partir du diagramme de la figure 2, les valeurs de l'amplitude X_{1m}, de la pulsation w_0 et de la phase initiale φ_1.

4°/ Montrer que E_p est une fonction périodique de période $T = \frac{T_0}{2}$ puis représenter $E_p = f(t)$.

Exercice N°2 : *(Principale 2005 - Contrôle 2012 Technique)*

Un pendule élastique est constitué d'un ressort à spires non jointives, d'axe horizontal, de masse négligeable et de raideur k = 20$N.m^{-1}$. L'une de ses extrémités est fixée à un support immobile. A l'autre extrémité, est accroché un solide (S) de masse m pouvant osciller librement selon l'axe horizontal.

L'origine O des abscisses est confondue avec la position de G lorsque (S) est au repos (Figure 1).

La position du centre d'inertie G de (S) est repérée par son abscisse x relativement au repère (O, $\vec{i}$).

Les forces de frottement ainsi que l'amortissement du mouvement sont considérés comme négligeables.

On écarte (S) de sa position de repos en le déplaçant, suivant l'axe x'x, de manière à ce que le ressort s'allonge d'une distance a = 3 cm. A un instant de date t = 0, on l'abandonne à lui-même sans vitesse initiale.

La durée de 10 oscillations est : Δt = 6,896 s.

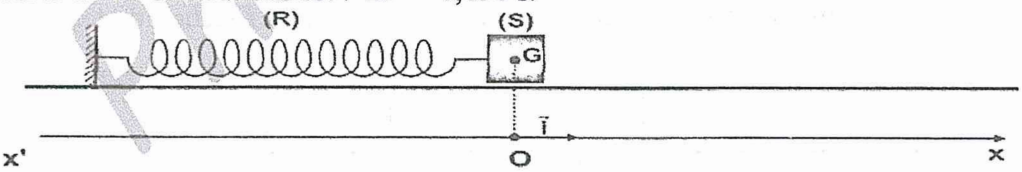


Figure 1

1°/ Etablir l'équation différentielle en x(t) régissant le mouvement de (S).

2°/ a) Vérifier que la valeur de la fréquence propre des oscillations est No = 1,45 Hz.

b) En déduire la valeur de la masse m du solide (S).

3°/ On désigne par E l'énergie mécanique du système oscillant {solide, ressort}.

a) Donner l'expression de E en fonction de x, k, m et de la vitesse instantanée v du centre d'inertie G.

b) Calculer E à l'instant t = 0.

c) Montrer que le système est conservatif. Déterminer, en le justifiant, la valeur de la vitesse de G lors de son premier passage par le point O.

Exercice N°3 : *(Contrôle 2008)*

Au cours d'une séance de TP, un groupe d'élèves étudie le mouvement d'un solide (S) de masse m attaché à un ressort (R) à spires non jointives de raideur K. L'ensemble est posé sur un banc à coussin d'air horizontal comme l'indique la figure -1. A l'équilibre le ressort n'est ni allongé ni comprimé.

Avec un système approprié, on enregistre la position du centre d'inertie G de (S) à chaque instant t, cette position est repérée sur l'axe x'x orienté de gauche à droite par un point d'abscisse x.

L'origine O du repère $(o,\vec{i})$ coincide avec la position du centre d'inertie G lorsque (S) est à l'équilibre.

En écartant (S) de sa position d'équilibre et on l'abandonnant à lui-même à t = 0, le solide (S) effectue des oscillations dont l'enregistrement est schématisé sur la figure -2 qui va servir pour répondre aux questions suivantes :

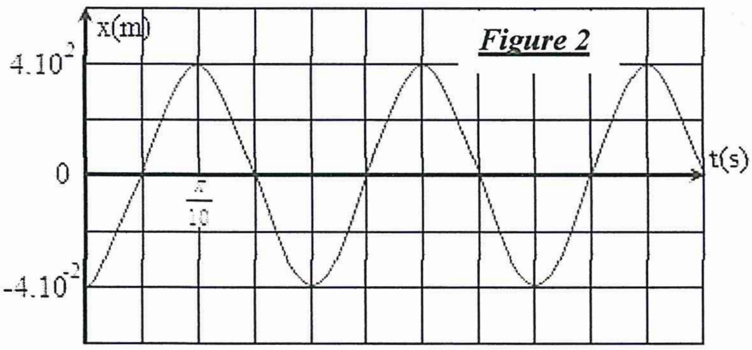


Figure 2

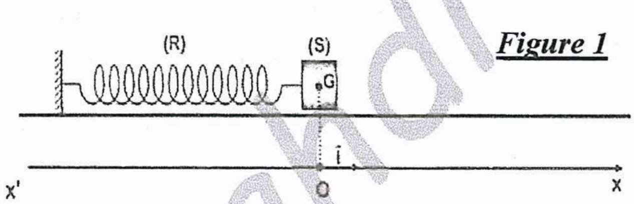


Figure 1

1°/ Préciser en le justifiant si le solide (S) :

a) Est écarté vers la droite ou vers la gauche.
b) Est lancé avec ou sans vitesse initiale.
c) Effectue des oscillations amorties ou non amorties.

2°/ Déterminer la valeur de la période T_0 de ces oscillations, en déduire la valeur de la pulsation ω_0 correspondante.

3°/ Déterminer l'amplitude X_m des oscillations et la phase initiale φ à t =0.

4°/ Ecrire l'équation horaire x = f (t).

5°/ En tenant compte de ce qui précède et sachant que $\omega_0^2 = \dfrac{K}{m}$.

a) Exprimer en fonction de t, m, k, X_m et φ, à un instant t quelconque, l'énergie potentielle E_p du système S = (mobile, Ressort, terre) et l'énergie cinétique E_c .
b) En déduire que l'énergie mécanique E_m du système (S), reste constante au cours du temps.
c) Identifier en le justifiant laquelle des deux courbes C_1 et C_2 de la figure -3 correspond à E_c =f (t).
d) Déduire, à partir des courbes, les valeurs de la raideur K et de la masse m.
On donne les courbes de la figure- 3 représentant la variation de E_p et de E_c en fonction du temps.

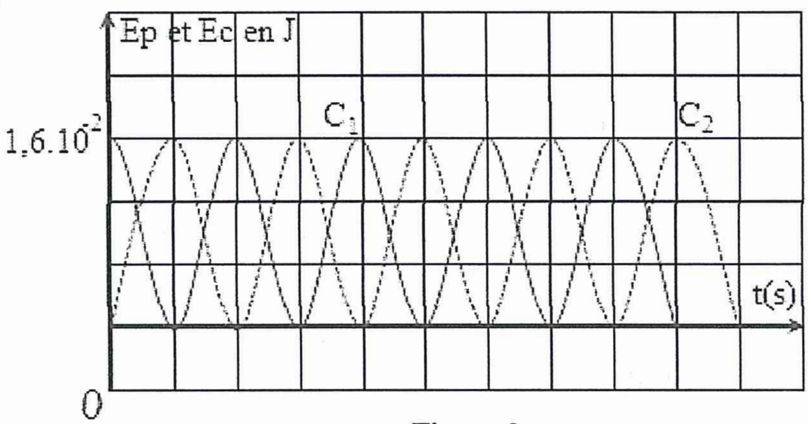


Figure 3

Exercice N°4 : *(Contrôle Science 2011)*

Un pendule élastique est constitué d'un solide (S) de masse m et d'un ressort (R) de raideur $k = 40\ N.m^{-1}$ et de masse négligeable devant celle de (S).

I. Le solide (S), libre de se mouvoir sur un banc à coussin d'air horizontal, est écarté de sa position de repos dans la direction d'un axe $(O,\vec{i})$ parallèle au banc, puis libéré sans vitesse initiale à un instant t_0 qui sera pris comme origine des temps ($t_0 = 0$). Pour étudier les oscillations du pendule, on repère au cours du temps, la position du centre d'inertie G du solide (S) dans le repère $(O,\vec{i})$ (Fig.3).

1°/ a) En désignant par x l'abscisse de G et par y, sa vitesse à un instant t donné, exprimer l'énergie mécanique E du pendule élastique en fonction de m, k, y et x.

b) En admettant que E reste constante au cours des oscillations, établir en x, l'équation différentielle des oscillations de G.

2°/ Un système approprié d'acquisition des données permet d'obtenir les courbes 1 et 2 de la figure 4.

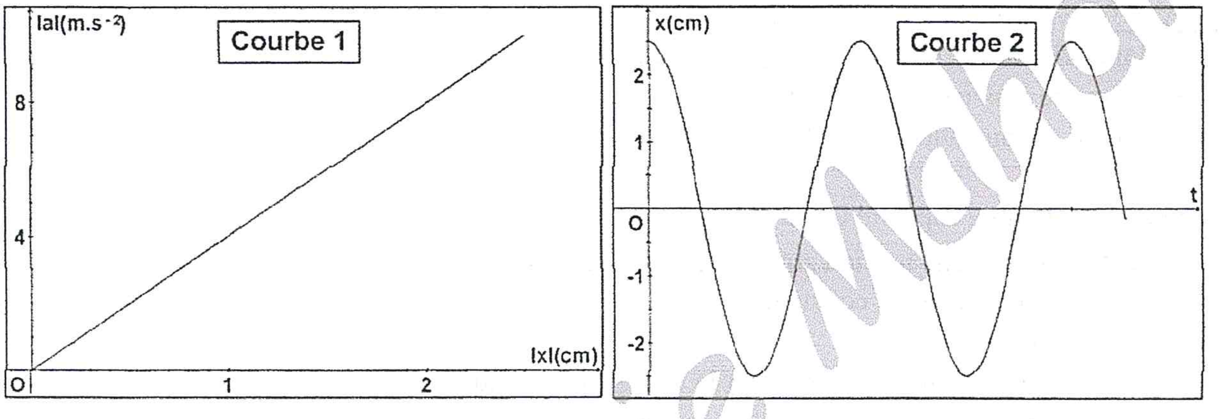


Fig.4

La courbe 1 traduit l'évolution de la valeur absolue de l'accélération a de G en fonction de la valeur absolue de son élongation x ; la courbe 2 représente l'évolution de x au cours du temps t.

a) Montrer que la forme droite de la courbe 1 vérifie l'équation différentielle établie dans 1.b.

b) En déduire la valeur de :
- La pulsation des oscillations,
- La masse m du solide (S).

c) Déterminer :
- Les expressions de x(t) et de v(t),
- Le sens dans lequel le solide (S) a été écarté initialement.

II. Le solide (S) est maintenant soumis, au cours de ses oscillations, à une force excitatrice $\vec{F} = (1,2\sin 18t)\vec{i}$ et à une force de frottement $\vec{f} = -h\vec{v}$, avec $h = 0,8\ N.s.m^{-1}$.

1°/ Sachant que pour un dipôle RLC série soumis à une tension alternative sinusoïdale $u(t) = U_m \sin\omega t$, l'équation différentielle reliant la charge du condensateur q à sa dérivée première et à sa dérivée seconde est : $L\dfrac{d^2q}{dt^2} + R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{C} = u$ et sa solution est de la forme : $q = Q_m \sin(\omega t + \varphi_q)$, avec

$Q_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2\omega^2 + (L\omega^2 - \frac{1}{C})^2}}$: charge maximale et φ_q, phase initiale de q telle que $tg\,\varphi_q = \dfrac{R\omega}{L\omega^2 - \frac{1}{C}}$.

a) En précisant l'analogie utilisée, écrire :
- L'équation différentielle reliant l'abscisse x de G à sa dérivée première et à sa dérivée seconde pour l'oscillateur mécanique.
- L'expression de x(t) en régime permanent, en précisant son amplitude X_m et sa phase initiale φ_x

b) En déduire l'expression de la vitesse v(t) de G.

2°/ On modifie la pulsation de l'excitateur. Pour une valeur ω_1 de celle-ci, l'amplitude des oscillations devient maximale.

a) Donner le nom du phénomène dont l'oscillateur est le siège à la pulsation ω_1.

b) Dans le cas d'un circuit RLC série, un phénomène analogue peut être observé à une valeur ω_r de la pulsation de la tension excitatrice u(t).
Etablir l'expression de ω_r en fonction de la pulsation propre ω_0, du circuit, de la résistance R et de l'inductance L.

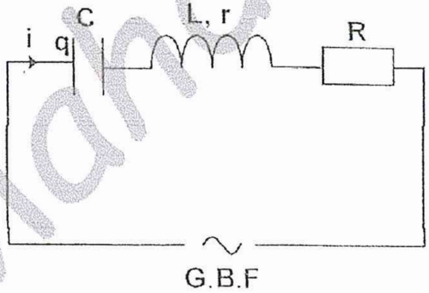
c) • En déduire par analogie, l'expression de ω_1 en fonction de h, m et ω_0, la pulsation propre du pendule élastique.
• Calculer la valeur de ω_1.

d) Calculer la puissance mécanique moyenne du pendule oscillant à la pulsation ω_1.

Exercice N°5 : *(Concours de réorientation – 2012 Sousse)*

I. Le montage schématisé ci-contre comporte en série :

- un résistor de résistance $R = 50\,\Omega$,
- une bobine d'inductance L = 0,2 H et de résistance interne $r = 10\,\Omega$,
- un condensateur de capacité $C = 2\ \mu F$,
- un G.B.F délivrant une tension sinusoïdale u(t) de pulsation ω réglable et d'amplitude U_m constante.
  $u(t) = U_m \sin(\omega t)$



1°/ Etablir l'équation différentielle vérifiée par la charge q du condensateur.

2°/ La solution de cette équation différentielle en régime permanent s'écrit $q(t) = Q_m \sin(\omega_t + \varphi_q)$

a) Exprimer l'amplitude I_m de l'intensité i(t) du courant qui parcourt le circuit en fonction de U_m, R, r, L, C et ω.

On rappelle que : $Z = \sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}$

b) Exprimer Q_m en fonction de ω et I_m et déduire que l'amplitude de la charge s'écrit :

$$Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{(R+r)^2\omega^2 + (1/C - L\omega^2)^2}}$$

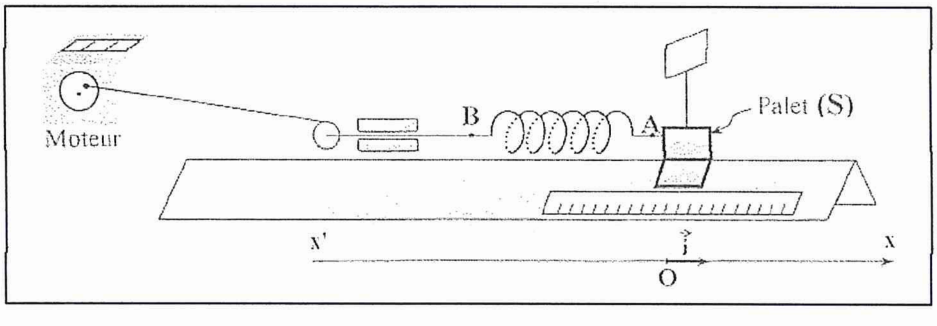
c) C_1- Déduire que la résonance de charge est obtenue pour une valeur ω_r de ω tel que :

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{(R+r)^2}{2L^2}$$

C_2- Calculer ω_0 et ω_r.

3°/ Représenter les allures de chacune des courbes $I_m = f(\omega)$ et $Q_m = g(\omega)$.

II. Un pendule élastique, disposé horizontalement sur un banc à coussin d'air, est constitué d'un palet (S) de masse m = 100g attaché à l'extrémité A d'un ressort (R) de raideur $k = 25\ N.m^{-1}$; l'autre extrémité B du ressort est reliée par l'intermédiaire d'un dispositif de guidage à un excentrique solidaire d'un moteur. Sur le palet (S) est fixé une plaque rectangulaire.



La résistance de l'air exercée sur la plaque rectangulaire de masse négligeable et transmise au palet est *équivalente à une force de frottement* $\vec{f}$ *de type visqueux ayant pour expression :* $\vec{f} = -h\vec{v}$ où

. h est le coefficient de frottement caractérisant l'amortissement.

.$\vec{v}$ est le vecteur vitesse du palet (S).

Le moteur communique au palet une force excitatrice d'amplitude F_m constante et de pulsation ω réglable et égale à celle de rotation du moteur : $\vec{F} = F_m \sin(\omega t)\vec{i}$

Ainsi, au palet (S), sont infligées des oscillations forcées de pulsation ω. En régime permanent l'élongation du centre d'inertie G de (S), dans le repère $(O,\vec{i})$, prend la forme : $x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x)$

(L'origine O du repère étant choisie en coïncidence avec la position de G à l'équilibre)

1°/ Calculer la fréquence propre N_0 de l'oscillateur étudié.

2°/ En utilisant une analogie électrique-mécanique :

a) Ecrire l'équation différentielle régissant les variations de l'élongation x au cours du temps.

b) Donner l'expression de l'amplitude X_m en fonction de F_m, h, ω, k et m.

c) Donner l'expression de la pulsation ω_r pour laquelle on a résonance d'élongation en fonction de ω_0, h et m.

3°/ Pour une valeur N_r = 2,4 Hz de la fréquence N du moteur, l'amplitude X_m, des oscillations prend une valeur maximale X_{mr} = 6 cm.

a) Montrer que $h = \pi.m\sqrt{8(N_0^2 - N_r^2)}$

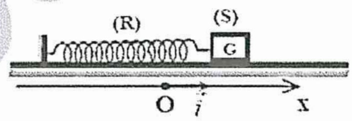
b) En déduire le coefficient de frottement h.

c) Tracer, sur le même graphique, les allures des courbes $X_m = f(N)$ correspondantes aux deux valeurs suivantes du coefficient de frottement h : h_1 et h_2 tel que $h_1 << h_2$.

4°/ Déterminer la valeur de l'amplitude F_m de la force excitatrice.

Exercice N°6 : *(Concours de réorientation – 2015 G1)*

A) Un pendule élastique horizontal est formé d'un ressort (R) à spires non jointives, de masse négligeable, de raideur $K=20N.m^{-1}$ dont l'une de ses extrémités est fixe et à l'autre est accrochée un solide (S) de masse m=50g et de centre d'inertie G. La position de (S) est repérée par son abscisse x dans le repère $(O,\vec{i})$ porté par l'axe du ressort et dirigé dans le sens de l'allongement, O étant la position d'équilibre de (S).



A l'instant de date t=0, on écarte le solide (S) de sa position d'équilibre de x_0=2,5 cm à partir de O, dans le sens positif puis on le lance avec une vitesse initiale v_0= 0,866m.s^{-1} dans le sens des élongations croissantes. Le solide (S) n'est soumis à aucune force de frottement. Il effectue alors des oscillations d'amplitude constante, avec une période propre T_0.

1) a- Donner l'analogue électrique de l'oscillateur mécanique libre non amorti considéré.

b- Etablir l'équation différentielle des oscillations du solide (S).

2) Déterminer l'amplitude et la phase initiale de l'élongation x(t). Déduire les expressions de x(t) et de v(t).

3) Montrer que l'énergie mécanique totale E du pendule élastique est constante. Calculer sa valeur.

B) *Le pendule élastique précédent est soumis d'une part à une force de frottement visqueux* $\vec{f} = -h\vec{v}$

où $\vec{v}$ est la vitesse du centre d'inertie G du solide (S) et h un coefficient positif (h=0,2kg.s^{-1}) ;

d'autre part à une force excitatrice $\vec{F} = F_m \sin \omega t.\vec{i}$ exercée par un excitateur approprié tel que F_m=0.8N.

Le solide (S) est alors animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal de même pulsation ω=16 rad.s^{-1} que la force excitatrice et d'élongation $x(t)=X_m \sin(\omega t+\varphi)$.

Sachant que pour un dipôle RLC série soumis à une tension alternative sinusoïdale

$u(t) = U_m \sin(\omega t)$. l'équation différentielle reliant la charge du condensateur q à sa dérivée première et à sa dérivée seconde est $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = u(t)$ et sa solution est de la forme : $q(t)=Q_m \sin(\omega t+\varphi_q)$ avec

$Q_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2\omega^2 + (\frac{1}{C} - L\omega^2)^2}}$ la charge maximale et φ_q la phase initiale de q(t).

1) *De quel régime d'oscillation s'agit-il ? Justifier la réponse.*

2) a- Par recours à l'analogie formelle électrique-mécanique, écrire l'équation différentielle régissant les oscillations du centre d'inertie G de (S).

b- Écrire l'expression de l'amplitude X_m des élongations x du centre d'inertie G de (S).
En déduire l'expression de l'amplitude V_m de la vitesse du solide (S).

3) a- Donner l'expression de l'impédance électrique Z de l'oscillateur forcé RLC puis exprimer par analogie l'impédance mécanique $Z_{méc}$ du pendule élastique considéré.

b- Calculer X_m et V_m lorsque $\omega=16 rad.s^{-1}$.

4) En faisant varier la pulsation ω de l'excitateur mécanique, mais en maintenant constante la valeur de F_m, V_m varie.

a- Déterminer la valeur de ω pour laquelle V_m est maximale que l'on calculera. Préciser l'état de l'oscillateur.

b-Préciser alors le déphasage entre la vitesse v(t) et la force F(t).

c- Montrer que l'énergie totale de l'oscillateur est constante. Calculer sa valeur.

Exercice N°7 : *(Concours de Réorientation 2015 Monastir)*

Un solide (S) de masse m est attaché à l'extrémité libre d'un ressort à spires non jointives de masse négligeable et de raideur **K**=20 N.m^{-1}. L'autre extrémité du ressort est attachée à un point fixe. Le système {(S) + ressort} est placé sur un plan horizontal (figure-1-).

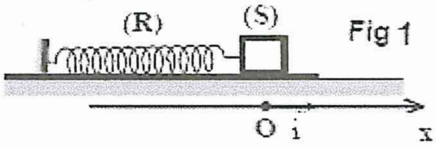


Fig 1

Au repos, le centre d'inertie G du solide est au point O, origine d'un repère $(O, \vec{i})$ horizontal. À partir de O, on écarte le solide (S) d'une certaine distance dans le sens positif et on le lâche avec vitesse initiale.

A- Les frottements sont négligeables.

1°/ a) Établir l'équation différentielle qui régit l'évolution de l'abscisse x(t) du centre d'inertie G du solide et déduire l'expression de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur.

b) On donne le graphe représentant les variations de l'accélération du solide (S) en fonction de l'élongation x (**figure-2-**).
Déterminer graphiquement ω_0. *Montrer que la masse du* solide est **m = 200 g**.

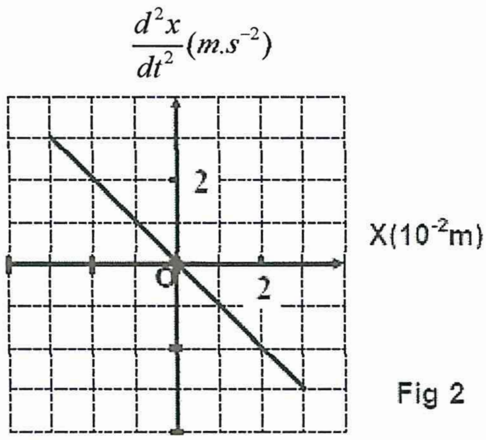
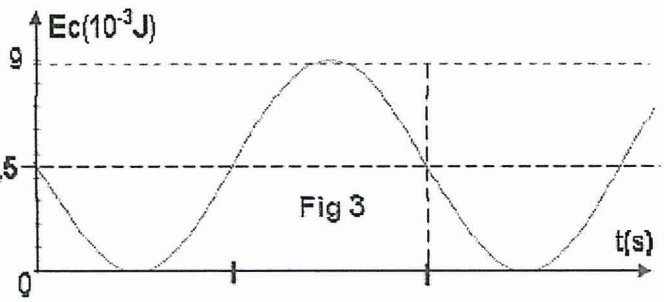


Fig 2

2°/ a) Au passage du solide (S) par une position d'abscisse x sa vitesse est v. Donner l'expression de l'énergie mécanique totale E du système en fonction de m, v, K et x.

b) Montrer que l'énergie **E** est constante.

3°/ On donne le graphe représentant les variations de l'énergie cinétique Ec du solide en fonction du temps (figure-3-). La loi horaire du mouvement est donnée par $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$.



a) Montrer que l'énergie cinétique E_C s'écrit sous la forme $E_C = \frac{1}{4}KX_m^2(1+\cos(2\omega_0 t + 2\varphi))$.

b) Déduire, à partir du graphe, les valeurs de X_m et φ .

4°/ Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $\|\vec{V}\| = 0,2\sqrt{2}m.s^{-1}$.

B- Les frottements ne sont plus négligeables.

Le solide (S) est maintenant soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h\vec{v}$ (h = constante > 0), le graphe de la figure-4- représente les variations de son abscisse x en fonction du temps. (Les conditions initiales sont les mêmes que dans la partie A).

1°/ Établir l'équation différentielle régissant les variations de l'élongation x(t) du solide (S).

2°/ Montrer que l'énergie totale du système diminue au cours du temps.

3°/ Calculer la variation de l'énergie totale du système entre les instants de dates t_1 et t_2.

4°/ Déterminer la valeur du coefficient du frottement h sachant que le solide à la date t_3 à pour accélération $a = -64.10^{-2}m.s^{-2}$ est à pour vitesse $v = -0,255\ m.s^{-1}$.

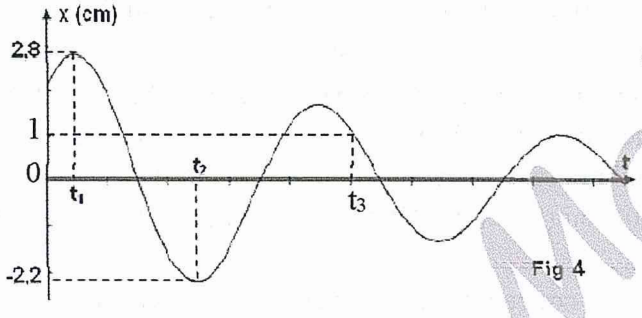


Fig 4

EX N°1 (Principale 2007)

1°)

$E = E_c + E_p$

$= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$

2°) a) $x = f(t)$ montre que L'amplitude des oscillations est constante ⇒ il n'y a pas perte d'energie : le système est conservatif ⇒ E = Constant

b) E = constante $\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$

$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} m . 2v \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2} k \, 2x \frac{dx}{dt}$

$= v\left(m \frac{d^2x}{dt^2} + kx\right) = 0$

or $v \neq 0$ d'où

$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$

$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (1)$

3°) a) $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$

$\frac{dx}{dt} = \omega_0 . X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x + \frac{\pi}{2})$

$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega_0^2 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x + \pi)$

$= -\omega_0^2 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$

on remplace dans (1)

$-\omega_0^2 . x(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0$

$x(t)\left[-\omega_0^2 + \frac{k}{m}\right] = 0$

or $x(t) \neq 0$

d'où

$-\omega_0^2 + \frac{k}{m} = 0$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

d'où $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$ est une solution de l'eq diff si $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

b) • $X_m = 2.10^{-2}$ m

• $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0{,}237\pi} = 8{,}44$ rad

• à t = 0 ; $x = X_m$

$X_m = X_m \sin \varphi_x$

$\sin \varphi_x = 1 \Rightarrow \varphi_x = \frac{\pi}{2}$ rad

d'où $x(t) = 2.10^{-2} \sin(8{,}44 t + \frac{\pi}{2})$ (m)

4°) $E_p = \frac{1}{2} k x^2$

$= \frac{1}{2} k . X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_x)$

$= \frac{1}{2} k X_m^2 \left(\frac{1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_x)}{2}\right)$

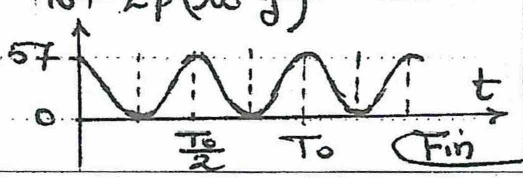
$= 28{,}5 . 10^{-4}(1 - \cos(16{,}88 t + \pi))$

Ep est une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2 . \omega_0}$

$= \frac{2\pi . T_0}{2 . 2\pi}$

$T = \frac{T_0}{2}$

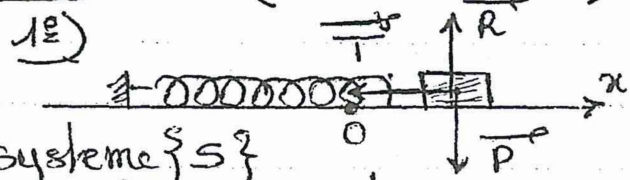
t	0	$T_0/4$	$T_0/2$
Ep (J)	57.10^{-4}	0	57.10^{-4}



Fin

EX N°2 (2005 - 2012 T)

1°)



système {S}

bilan des forces extérieures

$\vec{P}, \vec{R}, \vec{T}$

RFD: $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m.\vec{a}$

proj sur $x'x$:

$T = m.a \Rightarrow -K.x = ma$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

2°) a) $\Delta t = 10.T_0$

$$T_0 = \frac{\Delta t}{10} = \frac{6{,}896}{10}$$

$T_0 = 0{,}6896\,s$

$$N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{0{,}6896} = 1{,}45\,Hz$$

b) $N_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$

$$N_0^2 = \frac{1}{4\pi^2}\frac{K}{m} \Rightarrow m = \frac{k}{4\pi^2 N_0^2}$$

$$m = \frac{20}{4\times10\times(1{,}45)^2} = 0{,}242\,kg$$

3°/ a) $E = E_c + E_p$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

b) à $t = 0$; $\begin{cases} x_0 = a = 3cm \\ v_0 = 0 \end{cases}$

$$E_0 = \frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}.20.(0{,}03)^2$$

$E_0 = 9.10^{-3}\,J$

c) • $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}m.2v\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}k.2x\frac{dx}{dt}$$

$$= v\underbrace{\left(m\frac{d^2x}{dt^2} + kx\right)}_{0 \text{ éq diff}}$$

d'où $\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = cte$

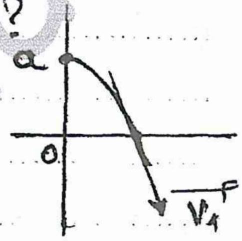
le système est conservatif

• au 1er passage par le point O:

$x_1 = 0$ et $v_1 = ?$

$E_0 = \frac{1}{2}mV_1^2 + 0$

$V_1 = -\sqrt{\frac{2E_0}{m}} < 0$



$$V_1 = -\sqrt{\frac{2\times0{,}009}{0{,}242}} = -0{,}27\,ms^{-1}$$

Fin

EX N°3 (Contrôle 2008)

1°/ a) d'après la courbe à $t=0$ on a $x=-X_m$ c.à.d $x<0$: d'où le solide est écarté vers (les $x<0$) la gauche.

b/ à $t=0 \Rightarrow x=-X_m$ (sig)

$V=\frac{dx}{dt}=0$;

$\Rightarrow$ (S) est lancé sans vitesse initiale.

c/ Le solide effectue des oscillations non amorties car leur amplitude ne diminue pas au cours du temps (pas de perte d'énergie)

2°/ $T_0=\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}$ s

$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{2\pi}{\pi}\times 5=10\ rad.s^{-1}$

3°/ $X_m=4.10^{-2}$ m

à $t=0$ s $\Rightarrow x=-X_m$

$\sin\varphi_x=-1$

$\varphi_x=-\frac{\pi}{2}$ rad

4°/ $x(t)=X_m\sin(\omega_0 t+\varphi_x)$

$=4.10^{-2}\sin(10t-\frac{\pi}{2})$

5/a/ $E_p=\frac{1}{2}kx^2$

$=\frac{1}{2}kX_m^2\sin^2(\sqrt{\frac{k}{m}}.t+\varphi_x)$

• $E_c=\frac{1}{2}mV^2$ or $V=\frac{dx}{dt}$

$=\frac{1}{2}m.\frac{k}{m}X_m^2.\cos^2(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_x)$

• $E=E_c+E_p$

$=\frac{1}{2}kX_m^2\sin^2(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_x)+\frac{1}{2}kX_m^2\cos^2(\sqrt{\frac{k}{m}}.t+\varphi_x)$

$=\frac{1}{2}kX_m^2\underbrace{(\sin^2(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_x)+\cos^2(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_x))}_{1}$

$E=\frac{1}{2}kX_m^2=cte$

c/ à $t=0$ $\begin{cases} E_c=0 \\ E_p=E=cte \end{cases}$

d'où la courbe $\mathcal{C}_2$ correspond à $E_c(t)$ et la courbe $\mathcal{C}_1$ correspond à $E_p(t)$

d/ à $t=0$

$E_p=\frac{1}{2}kX_m^2$

$k=\frac{2E_p}{X_m^2}=\frac{2\times1,6.10^{-2}}{(4.10^{-2})^2}$

$k=20\ N.m^{-1}$

• on a $\omega_0^2=\frac{k}{m}$

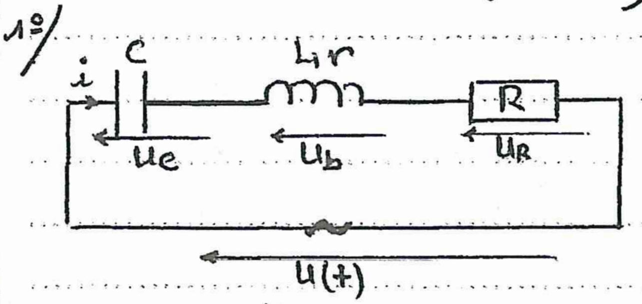
$\Leftrightarrow m=\frac{k}{\omega_0^2}=\frac{20}{100}=0,2$ kg

Fin

Corrigé	Barème
Exercice 4 (4,5 points)	
I-1. a) $E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$	0,25
b) $\frac{dE}{dt}=mv\frac{dv}{dt}+kx\frac{dx}{dt}=0 \Rightarrow m\frac{dv}{dt}+kx=0$ $\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0$, avec $\omega_0^2=\frac{k}{m}$	0,25
2.a) On a : $a=-\omega_0^2 x \Rightarrow \lvert a\rvert=\omega_0^2\lvert x\rvert$. Donc $\lvert a\rvert= f(\lvert x\rvert)$ est une portion de droite qui passe par l'origine.	0,25
b) La pente de la droite donne $\omega_o = 20$ rad.s^{-1} $\omega_o^2=\frac{k}{m} \Rightarrow m = 0,1$kg.	0,5(0,25x2)
c) - On a : $a+\omega_0^2x=0 \Leftrightarrow x=X_m\sin(\omega t+\varphi)$. La courbe 2 est une sinusoïde d'amplitude X_m = 2,5 cm. A t = 0, $x=X_m\sin(\varphi)=X_m \Rightarrow \sin\varphi=1 \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{2}$ rad Il vient donc : $\mathbf{x=2,5.10^{-2}\sin(20t+\frac{\pi}{2})}$ et : $\mathbf{v(t)=0,5\sin(20t+\pi)}$. - À t = 0, $x(t)=X_m$ $\Rightarrow$ Le solide (S) est écarté dans le sens des élongations positives.	0,75(0,25x3)
II-1. a) Avec les analogies : $q\rightarrow x$, $u\rightarrow F$, $L\rightarrow m$ et $1/C\rightarrow k$, on écrit : * $m\frac{d^2x}{dt^2}+h\frac{dx}{dt}+kx=f(t)$ * $x=X_m\sin(\omega t+\varphi_x)$, $X_m=\frac{F_m}{\sqrt{(h\omega)^2+(m\omega^2-k)^2}}$ et φ_x telle que $tg\varphi_x=\frac{h\omega}{m\omega^2-k}$ A.N : $x(t)=7,37.10^{-2}\sin(18t-1,08)$	0,75(0,25x3)
b) $v(t)=X_m\omega\sin(\omega t+\varphi_x+\frac{\pi}{2})=V_m\sin(\omega t+\varphi_V)$ avec : $V_m=X_m\omega=\frac{F_m\omega}{\sqrt{(h\omega)^2+(m\omega^2-k)^2}}$ et $\varphi_V=\varphi_x+\frac{\pi}{2}$ d'où : $v(t)=1,32\sin(18t+0,49)$	0,25
2- a) Il s'agit du phénomène de résonance d'élongation (d'amplitude).	0,25
b) $Q_m=\frac{U_m}{\sqrt{(R\omega)^2+(L\omega^2-\frac{1}{C})^2}}=\frac{U_m}{\sqrt{f(\omega)}}$. $\Rightarrow Q_m$ max pour $f(\omega)$ min. $\frac{df(\omega)}{d\omega}=2R^2\omega_r+2(L\omega_r^2-\frac{1}{C})2L\omega_r=0 \Rightarrow \omega_r^2=\omega_0^2-\frac{R^2}{2L^2}$	0,5(0,25x2)
c) $\omega_1^2=\omega_0^2-\frac{h^2}{2m^2}$ AN : ω_1 =19,18rad.s^{-1}	0,5(0,25x2)
d) $P=\frac{1}{2}hv_m^2=\frac{1}{2}hX_{1m}^2\omega_1^2$; $X_{1m}=\frac{F_m}{\sqrt{(h\omega_1)^2+(m\omega_1^2-k)^2}}=6,87.10^{-2}$m $\Rightarrow$ **P = 0,695 W**	0,25

EX N°5 (Concours 2012 Sousse)

1°/



Loi des mailles

$u_C + u_b + u_R - u(t) = 0$

$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} + ri + Ri = u(t)$

or $i = \frac{dq}{dt}$

$\Rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + (R+r)\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = u(t)$

2°/a/ $I_m = \frac{U_m}{Z}$

$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$

b/ $Q_m = \frac{I_m}{\omega}$

$Q_m = \frac{U_m}{\omega\sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$

$Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{(R+r)^2\omega^2 + (L\omega^2 - \frac{1}{C})^2}}$

c/c₁/ $Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{f(\omega)}}$

à la résonance de charge

- Q_m est maximale $\Rightarrow$
- $f(\omega)$ est minimale $\rightarrow$
- $\frac{df(\omega)}{d\omega} = 0$

$(R+r)^2 \cdot 2\omega r + 2(L\omega_r^2 - \frac{1}{C}) \cdot 2L\omega r = 0$

$2\omega_r\left((R+r)^2 + 2L(L\omega_r^2 - \frac{1}{C})\right) = 0$

or $2\omega_r \neq 0$

d'où $(R+r)^2 + 2L^2\omega_r^2 - \frac{2L}{C} = 0$

$2L^2\omega_r^2 = \frac{2L}{C} - (R+r)^2$

$\omega_r^2 = \frac{2L}{2L^2C} - \frac{(R+r)^2}{2L^2}$

$\omega_r^2 = \frac{1}{LC} - \frac{(R+r)^2}{2L^2}$ avec $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{(R+r)^2}{2L^2}$

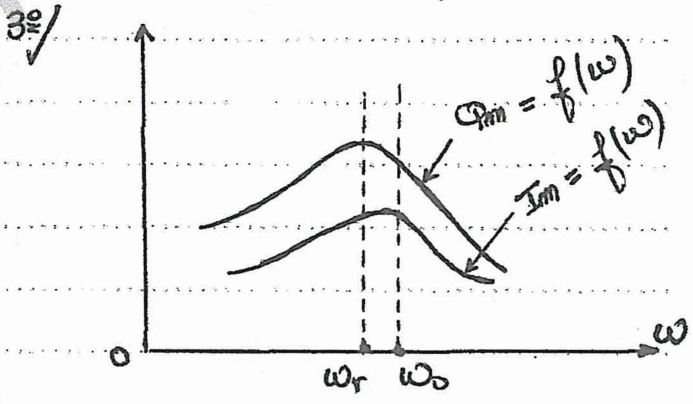
c₂/ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,2 \times 2.10^{-6}}}$

$\omega_0 = 1581,1 \text{ rad.s}^{-1}$

- $\omega_r = \sqrt{(1581,1)^2 - \frac{(60)^2}{2\cdot(0,2)^2}}$

$\omega_r = 1566,8 \text{ rad.s}^{-1}$

3°/



II/1/ $N_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{25}{0,1}}$

$N_0 = 2,52 \text{ Hz}$.

2°/a/ Analogie

électrique	$\rightarrow$ mécanique
L	m
q	x
R+r	h

$e \rightarrow \frac{1}{k}$

$u(t) \rightarrow F(t)$

$\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$

b)

$$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega^2 + (m\omega^2 - k)^2}}$$

c/ Analogie

électrique → mécanique

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}$$

3°/a/ on a $\omega_r = 2\pi N_r$

$\omega_0 = 2\pi N_0$

$$\frac{h^2}{2m^2} = 4\pi^2 N_0^2 - 4\pi^2 N_r^2$$

$$h^2 = m^2\pi^2(8N_0^2 - 8N_r^2)$$

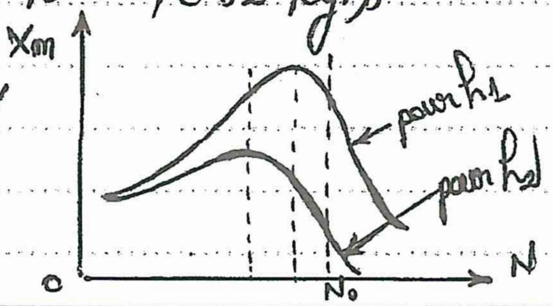
$$h^2 = m^2\pi^2 . 8(N_0^2 - N_r^2)$$

$$h = \pi . m . \sqrt{8(N_0^2 - N_r^2)}$$

b/ $h = \pi . 0{,}1 . \sqrt{8[(2{,}52)^2 - (2{,}4)^2]}$

$h = 0{,}682\ kg.s^{-1}$

c/



4°/ D'après 3°/ b/ :

$$F_m = \sqrt{h^2\omega^2 + (m\omega^2 - k)^2} . X_m$$

pour $\omega = \omega_r = 2\pi N_r = 15\ Hz$

$X_m = X_{mr} = 0{,}06\ cm$

on a

$$F_m = 0{,}06 . \sqrt{(0{,}682)^2(15)^2 + (0{,}1 \times (15)^2 - 25)^2}$$

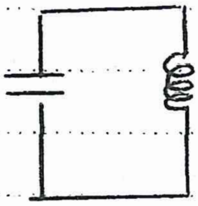
$F_m = 0{,}63\ N$

Fin

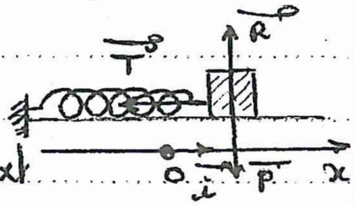
EX N°6 (C: 2015)

1°) a)

Circuit LC



b)



• système {solide S}

bilan des forces ext

$\vec{T}$; $\vec{P}$; $\vec{R}$

RFD $\vec{P}+\vec{R}+\vec{T}=m\vec{a}$

projection sur $(O,\vec{i})$

$T = m.a$

$-k.x = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

$m\dfrac{d^2x}{dt^2}+kx=0$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{k}{m}x=0$

2°) $x(t)=X_m\sin(\omega_0 t+\varphi_x)$

à $t=0$; $x=x_0=X_m\sin\varphi_x$

$V_0=X_m\omega_0\cos\varphi_x$

• $\sin\varphi_x=\dfrac{x_0}{X_m}$

$\cos\varphi_x=\dfrac{V_0}{X_m\omega_0}$ $\tan\varphi_x=\dfrac{\omega_0 . x_0}{V_0}$ avec $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=20\,rad\,s^{-1}$

$\Rightarrow \tan\varphi_x=\dfrac{20\times 2,5.10^{-2}}{0,866}=0,577$

$\varphi_x=\dfrac{\pi}{6}$ rad

• $X_m=\dfrac{x_0}{\sin\varphi_x}=\dfrac{2,5.10^{-2}}{\sin\pi/6}=5.10^{-2}$ m

• $x(t)=5.10^{-2}\sin(20t+\pi/6)$ (m)

• $V(t)=5.10^{-2}\times 20.\sin(20t+\pi/6+\pi/2)$

$V(t)=1.\sin\left(20t+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ $(m.s^{-1})$

3°) $E=E_p+E_c$

$E=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mV^2$

• $E=\frac{1}{2}k\left(X_m\sin(\omega_0t+\varphi_x)\right)^2+\frac{1}{2}m\left(\omega_0X_m\cos(\omega_0t+\varphi_x)\right)^2$ k

$E=\frac{1}{2}kX_m^2\left(\underbrace{\sin^2(\omega_0t+\varphi_x)+\cos^2(\omega_0t+\varphi_x)}_{1}\right)$

$E=\frac{1}{2}kX_m^2$ = Constante

AN $E=25.10^{-3}$ J

B) 1) a) il s'agit des oscillations forcées car la pulsation ω du résonateur est imposé par l'excitateur

2) a) analogie électrique – mécanique

$L \longrightarrow m$

$q(t) \longrightarrow x(t)$

$R \longrightarrow h$

$\frac{1}{C} \longrightarrow k$

$u(t) \longrightarrow F(t)$

$\Rightarrow m\dfrac{d^2x}{dt^2}+h\dfrac{dx}{dt}+kx=F(t)$

b) $X_m=\dfrac{F_m}{\sqrt{h^2\omega^2+(k-m\omega^2)^2}}$

• $V_m=\omega . X_m$

$V_m=\dfrac{F_m}{\sqrt{h^2+\left(\frac{k}{\omega}-m\omega\right)^2}}$

3°) a)

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2}$$

$$Z_{méc} = \frac{F_m}{V_m} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{k}{\omega} - m\omega\right)^2}$$

b) $$X_m = \frac{0{,}8}{\sqrt{(0{,}2\cdot 16)^2 + \left(\frac{20}{16} - 0{,}05\cdot 16\right)^2}}$$

$$= 0{,}101\ m$$

$$V_m = \omega . X_m$$

$$= 16 . 0{,}101$$

$$= 1{,}62\ m s^{-1}$$

3) a) à la résonance de vitesse

on a : $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20\ rad s^{-1}$

et $V_{0m} = \frac{F_m}{h} = \frac{0{,}8}{0{,}2} = 4\ m s^{-1}$

b) à la résonance de vitesse

$F(t)$ et $v(t)$ sont en phase

c à d $\varphi_F = \varphi_v$

d'où $\Delta\varphi = \varphi_F - \varphi_v = 0$

c) $E = E_c + E_p$

$$= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{dE}{dt} = m v a + k x v$$

$$= v\,(ma + kx)$$

$$= v\left(F(t) - h \frac{dx}{dt}\right)$$

or à la résonance de vitesse

on a $F(t) = h . V$

d'où $\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = \text{Constante}$

AN $E = \frac{1}{2} k X_m^2 = \frac{1}{2} m V_{0m}^2$

avec $V_{0m} = 4\ m s^{-1}$

AN $E = \frac{1}{2} \cdot 0{,}05 \cdot (4)^2$

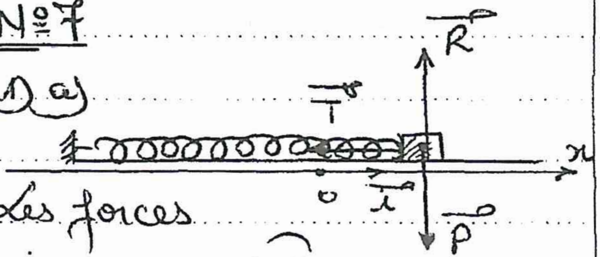
$E = 0{,}4\ J$

Fin

Page : BAC – TUNISIE Site : www.BAC.org.tn Tél : 28.355.106 / 53.371.502

EX N°7

A) 1) a)



a) Les forces extérieures exercées sur le solide en mvt sont : $\vec{P}, \vec{T}, \vec{R}$

RFD : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\,\vec{a}$

projection sur $(o, \vec{i})$

$T = m\,a$

$-k\,x = m\,\dfrac{d^2x}{dt^2}$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x = 0$. de la forme

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$

donc $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

b). $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x$

or $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ est une fonction linéaire d'équation $\dfrac{d^2x}{dt^2} = cte\,.\,x$

$\Rightarrow -\omega_0^2 = cte$: pente de la droite

$\Rightarrow -\omega_0^2 = \dfrac{2-0}{-2\,10^{-2}-0} = -100$

$\omega_0 = 10\ rad\,s^{-1}$

• $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m} \Rightarrow m = \dfrac{k}{\omega_0^2} = \dfrac{20}{100}$

$m = 0{,}2\ kg$

2°) a) $E = E_c + E_p$

$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

b)

$E = \frac{1}{2}kX_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_x) + \frac{1}{2}\underbrace{m\,\omega_0^2}_{k} X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_x)$

$= \frac{1}{2}kX_m^2\,\underbrace{\left(\sin^2(\omega_0 t+\varphi_x) + \cos^2(\omega_0 t+\varphi_x)\right)}_{1}$

$E = \frac{1}{2}kX_m^2 = \text{Constante}$

3°) a)

$E_c = \frac{1}{2}mv^2$

$= \frac{1}{2}m\,\omega_0^2 X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_x)$

$= \frac{1}{2}kX_m^2\left(\dfrac{1+\cos(2\omega_0 t + 2\varphi_x)}{2}\right)$

$E_c = \frac{1}{4}kX_m^2\left(1+\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)\right)$

b). $E = \frac{1}{2}kX_m^2 \Rightarrow X_m = \sqrt{\dfrac{2E}{k}}$

$X_m = \sqrt{\dfrac{2\times 9\,10^{-3}}{20}} = 3.10^{-2}\,m$

• à $t=0$ on a $E_c = \dfrac{E}{2}$

$\frac{1}{4}kX_m^2\left(1+\cos(2\varphi)\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}kX_m^2$

$1+\cos(2\varphi) = 1 \Rightarrow \cos(2\varphi) = 0$

$2\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \pm\dfrac{\pi}{4}$ rad

or le solide est écarté dans le sens positif $\Rightarrow \varphi = +\dfrac{\pi}{4}$

4°) $E = E_c + E_p$

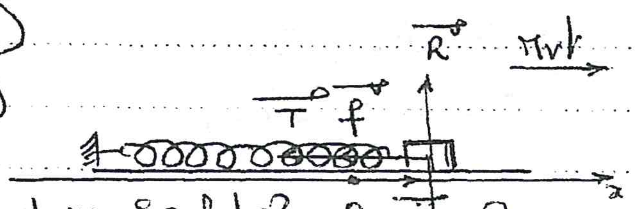
$\frac{1}{2}kX_m^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$x^2 = X_m^2 - \dfrac{v^2}{\omega_0^2}$

$x = \pm\sqrt{X_m^2 - \dfrac{v^2}{\omega_0^2}} = \pm 10^{-2}\,m$

B)

1°)



système {solide}

bilan des forces extérieures

$\vec{P}$, $\vec{R}$, $\vec{T}$, $\vec{f}$

RFD :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$$

proj sur $(O,\vec{i})$

$$T + f = m.a$$

$$-kx - hv = m.a$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

2) $E = E_p + E_c$

$$= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{dE}{dt} = kxv + mv.a$$

$$= v(kx + ma)$$

$$= v(-h.v)$$

$$= -hv^2 < 0$$

donc l'énergie mécanique diminue au cours du temps.

3°) à t_1 $\begin{cases} x_1 = 2,8.10^{-2}\,m \\ v_1 = 0 \end{cases}$

$$E_1 = \frac{1}{2}kx_1^2$$

à t_2 $\begin{cases} x_2 = -2,2.10^{-2}\,m \\ v_2 = 0 \end{cases}$

$$E_2 = \frac{1}{2}kx_2^2$$

la variation de l'énergie est

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}.20\left((-2,2.10^{-2})^2 - (2,8.10^{-2})^2\right)$$

$$\Delta E = -3.10^{-3}\,J$$

4°) on a :

$$m.a + h.v + kx = 0.$$

$$h.v = -m.a - kx$$

$$h = \frac{-m.a - k.x}{v}$$

$$h = \frac{-0,2\cdot(-64.10^{-2}) - 20.10^{-2}}{-0,255}$$

$h =$