2017/16

281_17

LYCEE 15 NOVEMBRE 1955 SFAX | ISOMETRIES Série1 | Prof : M^{me} TRIKI JOUDA Classe : 4ème M

Exercice n°1

Soit l'application f du plan dans lui même qui à tout pont M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = i\,\overline{z} - 2i + 3$.

1) Montrer que f est une isométrie et qu'elle n'admet aucun point invariant .
2) Montrer que $f \circ f$ est une translation dont on précisera le vecteur $\vec{u}$.
3) Soit $g = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}} \circ f$.

a) Soit A et B les points d'affixes respectives $\left(2 - \frac{1}{2}i\right)$ et $\frac{5}{2}$. Déterminer g (A) et g (B) .

b) En déduire la nature de g .

c) Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice n°2

Dans un plan orienté P , on considère un triangle équilatéral direct ABC.
On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB] et par O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Soit Δ la perpendiculaire à (AB) en B. On désigne par R_1 la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par R_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1)Déterminer la droite D telle que : $R_1 = S_D \circ S_{(OC)}$.

2)Déterminer la droite D' telle que : $R_2 = S_{(OC)} \circ S_D$.

3)En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $R_1 \circ R_2$.

4)Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des applications :
$R_3 = S_\Delta \circ S_{(BC)}$ et $R_3 \circ R_1$.

5)On pose $f = R_1^{-1} \circ R_3 \circ R_1$.

a)Montrer que f est la rotation de centre A et d'angle $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

b)En déduire que $R_1 \circ R_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)} = t_{\overrightarrow{AB}}$.

c)Soit M un point du plan P . On pose $M' = R_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}(M)$ et $M'' = R_1(M)$.

Montrer que $\overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{AB}$.

Exercice n°3

Dans un plan orienté P , on considère un triangle ABC rectangle isocèle en A tel que :
$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On désigne par I le milieu de [BC] et par Ω le point de concours des bissectrices intérieures du triangle ABC.Soit R la rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$ transformant B en C.

1)Montrer que Ω est le centre de R.

2)a)Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r = S_{(AC)} \circ S_{(A\Omega)}$.

b)Soit r' la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

En décomposant convenablement r' en composée de deux symétries orthogonales, caractériser l'application $r' \circ r$.

3)On pose $A' = r'(A)$ .Montrer que $\Omega A' = \Omega A$ et que les droites $(\Omega A')$ et (AB) sont parallèles.

مكتبة 18 جانفي 1
مدرج باب الغربي داخل السور
صفاقس الهاتف 22.740.485
www.BAC.org.tn
Page: BAC-TUNISIE
Tél: 25 361 197 / 53 371 502

LYCEE 15 NOVEMBRE 1955 SFAX	ISOMETRIES *Série2*	Prof : M^{me} TRIKI JOUDA Classe : $4^{ème}$ M

Exercice 1

Le plan est orienté dans le sens direct. OBC est un triangle équilatéral direct inscrit dans un Cercle (Γ), A est le symétrique de C par rapport à O.
J et K sont les points de (Γ) diamétralement opposés respectivement à B et C.

I- 1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $R = S_{(OJ)} \circ S_{(OK)}$.

2) Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
Déterminer la droite Δ telle que $T = S_\Delta \circ S_{(OJ)}$.

3) Montrer que $T \circ R$ est la rotation de centre K et d'angle $(-\frac{2\pi}{3})$.

II- Soit E le point tel que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BO}$.

1) Montrer que le triangle ABE est équilatéral de centre O.

2) Soit f une isométrie du plan qui transforme A en C et O en B.
On pose $g = t_{\overrightarrow{BO}} \circ f$.

a) Déterminer g(O) et g(A).

b) Montrer que g est soit la symétrie orthogonale d'axe (OB), soit la rotation de centre O et d'angle $(-\frac{2\pi}{3})$.

3) Caractériser alors les isométries f du plan qui transforment A en C et O en B.

4) On pose $h = t_{\overrightarrow{OB}} \circ S_{(OB)}$ et $r = R_{(K, -\frac{2\pi}{3})}$

a) Déterminer $r^{-1} \circ h(O)$ et $r^{-1} \circ h(A)$.

b) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $h(M) = r(M)$.

Exercice 2

Dans le plan orienté dans le sens direct, ABCD est un losange de centre O de sens direct tel que $AC = 2\,BD$. Δ est la droite qui porte la bissectrice intérieure du secteur [OA, OB].
Soit A′, B', C'et D' les images respectives des points A,B,C,D par la symétrie orthogonale d'axe Δ

1) Caractériser chacune des applications suivantes :
$S_\Delta \circ S_O$, $S_\Delta \circ S_{(AC)}$ et $S_\Delta \circ S_{(BD)}$.

2) Déterminer l'ensemble $\mathcal{J}$ des isométries du plan qui laissent globalement invariant l'ensemble { A , B , C , D }.

3) Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des isométries du plan qui transforment { A , B , C , D } en { A' , B' , C' , D' }.
On pose $g = S_\Delta \circ f$.

a) Montrer que g appartient à $\mathcal{G}$ si et seulement si f appartient à $\mathcal{J}$.

b) En déduire l'ensemble $\mathcal{G}$.

Exercice 3

ABCD est un losange de centre O, de sens direct, tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

I, J et K sont les milieux respectifs de [BC], [DC] et [ID].
Δ est la médiatrice de [AB], Δ' est la médiatrice de [DC].
Soit f l'isométrie du plan qui envoie A sur B, B sur D et D sur C.

1) a) Montrer que f n'admet aucun point fixe.
b) En déduire la nature de f.

2) Soit R la rotation de centre B et d'angle $(-\frac{\pi}{3})$.
Montrer que $f = R \circ S_\Delta$.

3) En déduire les éléments caractéristiques de f.

1

283

LYCEE 15 NOVEMBRE 1955 SFAX	Isométries *Série n°3*	Prof : M^{me} TRIKI JOUDA Classe : 4ème M

Exercice-1-

Le plan est orienté dans le sens direct. ABCD est un losange tel que $\left(\overrightarrow{AB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. On désigne par E le symétrique de B par rapport à C et par I , J et K les milieux respectifs de [AC] , [BC], et [CE].

1) a)Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des applications :
$f = S_{(DB)} \circ S_{(AB)}$ et $T = S_{(DA)} \circ S_{(CB)}$.
b) Soit F = f(D) ; Montrer que F est le symétrique de D par rapport à (BC).

2) Soit R = Tof
a) Déterminer R(D).
b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de R.

3) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g tel que g(A) = C et g(C) = E
b) Montrer que g est une symétrie glissante dont on donnera la forme réduite.
c) Soit $h = S_{(IK)} \circ t_{\overrightarrow{AC}} \circ t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{(IK)}$. Montrer que $h = t_{\overrightarrow{AE}}$.

4) Soit φ l'isométrie du plan qui transforme D en B , C en A et E en C
a) Montrer que $\varphi = g^{-1}$.
b) En déduire alors la nature et les éléments caractéristiques de φ.

Exercice2

On considère , dans un plan orienté , un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB}\,\widehat{;}\,\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et le cercle (C) de centre O circonscrit à ce triangle .
On construit les cercles (C') et (C'') de même rayon , de centres respectifs B et C et tangents extérieurement l'un à l'autre .

1) Soit M un point du cercle (C') et M' le point du cercle (C'') tel que $(\overrightarrow{BM}\,\widehat{;}\,\overrightarrow{CM'}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
Montrer que la médiatrice du segment [MM'] passe par un point fixe que l'on précisera .

2) Soit D le point du cercle (C) diamétralement opposé à A et M'' l'image du point M' par la rotation de centre D et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
Montrer que M et M'' sont deux points diamétralement opposés du cercle (C') .

Exercice3

P , on considère un carré OABC de centre I tel que $(\overrightarrow{OA}\,\widehat{;}\,\overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Soit E un point de [OA] distinct de O et A . La parallèle à (OC) passant par E coupe [BC] en M et la parallèle à (OB) passant par E coupe [AB]en N .

1) a)Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie C en B et M en N . Déterminer sa nature.
b)Montrer que f(B) = A . Caractériser alors f .
2) Montrer que $f \circ S_{(AC)}$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ que l'on déterminera .
3) Montrer que $S_{(AB)} \circ f \circ S_{(AC)}$ est une translation et déterminer son vecteur .
4) Soit g l'antidéplacement qui envoie C en B et M en N .
a) Montrer que g(B) = A . En déduire que g est une symétrie glissante .
b) Déterminer l'axe et le vecteur de g .
5) Montrer que $f \circ g$ est une symétrie glissante dont on déterminera les éléments caractéristiques .

284

Lycée 15 Novembre 1955 Sfax — 4ème Math

Isométrie : Série 1

Exercice n°1

1) $f(M)=M' \Leftrightarrow z_{M'} = i\bar{z}_M - 2i+3$; $f(N)=N' \Leftrightarrow z_{N'} = i\bar{z}_N - 2i+3$

$M'N' = |z_{N'} - z_{M'}| = |(i\bar{z}_N - 2i+3) - (i\bar{z}_M - 2i+3)| = |i(\bar{z}_N - \bar{z}_M)| = |i|\,|\bar{z}_N - \bar{z}_M|$

$M'N' = 1 \times |z_N - z_M| = MN$ donc f est une isométrie du plan

$f(z)=z \Leftrightarrow z = i\bar{z} - 2i+3 = i(\overline{i\bar{z} - 2i+3}) - 2i+3 = i(-iz+2i+3) - 2i+3$

$\Leftrightarrow z = z - 2 + 3i - 2i + 3 \Leftrightarrow i+1=0$ impossible donc f n'admet aucun point invariant

2) $(f\circ f)(M)=M' \Leftrightarrow z_{M'} = i(\overline{i\bar{z}_M - 2i+3}) - 2i+3 = i(-iz_M+2i+3) - 2i+3$

$\Leftrightarrow z_{M'} = z_M - 2 + 3i - 2i + 3 \Leftrightarrow z_{M'} - z_M = 1+i \Leftrightarrow \vec{MM'} = \vec{u}(1+i)$

$f\circ f = t_{\vec{u}}$; $\vec{u}(1+i)$

3) $t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow z_{M'} = z_M - \frac{1}{2}(1+i)$

a) $g(A) = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}} \circ f(A) = A' \Leftrightarrow z_{A'} = (i\bar{z}_A - 2i+3) - \frac{1}{2}(1+i)$

$z_{A'} = i(2+\frac{1}{2}i) - 2i + 3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = 2i - \frac{1}{2} - 2i + 3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = 2 - \frac{1}{2}i = z_A$

$g(A) = A$

$g(B) = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}} \circ f(B) = B' \Leftrightarrow z_{B'} = (i\bar{z}_B - 2i+3) - \frac{1}{2}(1+i)$

$z_{B'} = i(\frac{5}{2}) - 2i + 3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{5}{2} = z_B$

$g(B) = B$

b) $g = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}} \circ f$ est la composée de deux isométries ; $g(A)=A$; $g(B)=B$

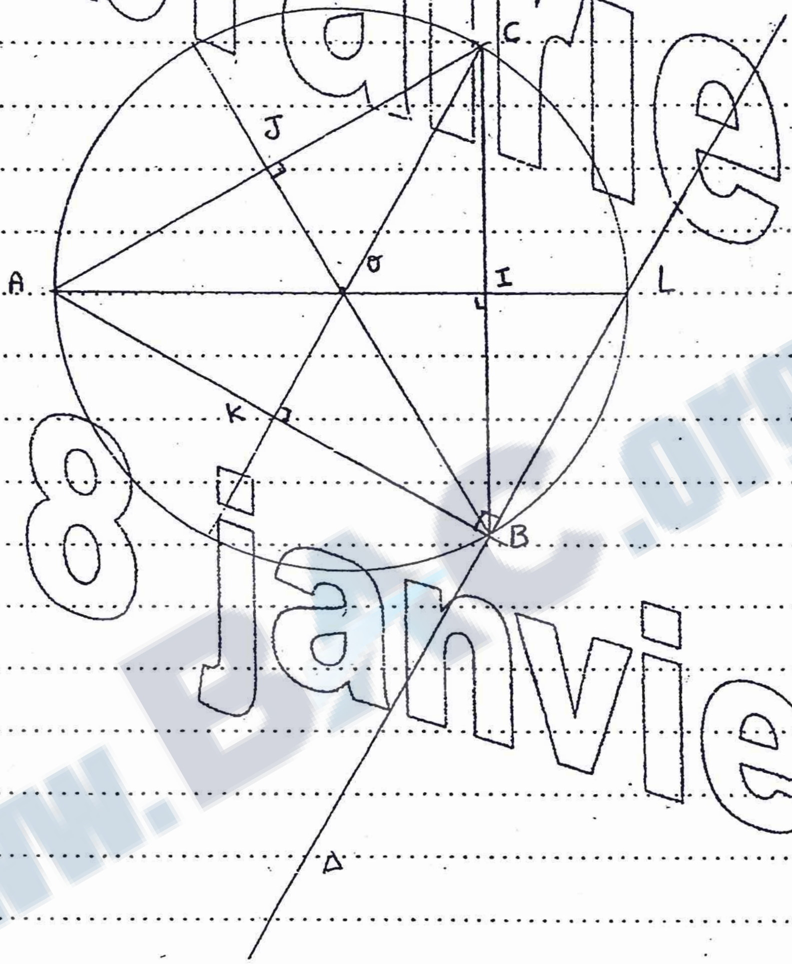
donc $g = S_{(AB)}$

c) $g\circ t_{-\frac{1}{2}\vec{u}} = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}} \circ g = f$ d'où $f = t_{\frac{1}{2}\vec{u}} \circ S_{(AB)} = S_{(AB)} \circ t_{\frac{1}{2}\vec{u}}$

$\vec{AB} = z_B - z_A = \frac{5}{2} - (2 - \frac{1}{2}i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}\vec{u}$; $\vec{AB}$ et $\frac{1}{2}\vec{u}$ sont colinéaires

Exercice n°2

285



1) $R_1 = R_{(C,\frac{\pi}{3})} = S_D \circ S_{(OC)}$ D passe par C de vecteur directeur $\vec{u}$ tel que $(\widehat{\vec{CO},\vec{u}}) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ ABC est équilatérale et O est le centre du cercle circonscrit de ABC donc (CO) est la bissectrice de $[\vec{CA},\vec{CB}]$ d'où $(\vec{CO},\vec{CB}) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ d'où D = (CB)

$R_1 = R_{(C,\frac{\pi}{3})} = S_{(CB)} \circ S_{(CO)}$

2) $R_2 = R_{(O,\frac{2\pi}{3})} = S_{(OC)} \circ S_{D'}$; D' passe par O de vecteur directeur $\vec{u}$ telque $(\widehat{\vec{u},\vec{OC}}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ or $(\widehat{\vec{OI},\vec{OC}}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ d'où

$D' = (OI)$; $R_2 = S_{(OC)} \circ S_{(OI)}$

3) $R_1 \circ R_2 = S_{(CB)} \circ \underbrace{S_{(OC)} \circ S_{(OC)}}_{id_P} \circ S_{(OI)} = S_{(CB)} \circ S_{(OI)} = S_I$

car $(CB) \perp (OI)$ et $(CB) \cap (OI) = \{I\}$

4) $R_3 = S_\Delta \circ S_{(BC)}$; $(BC) \cap \Delta = B$ donc R_3 est une rotation de centre B et d'angle $\theta = 2(\widehat{\vec{BC},\vec{BL}}) \equiv \frac{-\pi}{3}\,[2\pi]$ $R_3 = R_{(B,\frac{-\pi}{3})}$

$R_3 \circ R_1 = S_\Delta \circ \underbrace{S_{(BC)} \circ S_{(BC)}}_{id_P} \circ S_{(OC)} = S_\Delta \circ S_{(OC)}$

$\Delta \perp (AB)$; $(OC) \perp (AB)$ donc $\Delta // (OC)$ et par suite $R_3 \circ R_1$ est une translation de vecteur $\vec{u} = 2\vec{KB} = \vec{AB}$

5) a) $f = R_1^{-1} \circ R_3 \circ R_1$ est la composée de trois rotations donc f est une rotation d'angle $\theta = \frac{-\pi}{3} + \frac{-\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{-\pi}{3}$; $R_3(B) = B$

$R_1(A) = R_{(C,\frac{\pi}{3})}(A) = B$ car $CA = CB$ et $(\widehat{\vec{CA},\vec{CB}}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

$R_1^{-1}(B) = A$ donc $f(A) = R_1^{-1} \circ R_3 \circ R_1(A) = R_1^{-1} \circ R_3(B) = R_1^{-1}(B) = A$

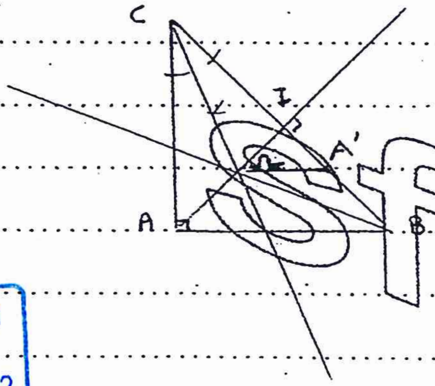
A est le centre de f.

b) $R_1 \circ f = R_3 \circ R_1$ donc $R_1 \circ R_{(A;-\frac{\pi}{3})} = t_{\vec{AB}}$

c) $R_{(A;\frac{\pi}{3})}(M) = M' \iff R_{(A;-\frac{\pi}{3})}(M') = M$

$R_1 \circ R_{(A;-\frac{\pi}{3})}(M') = R_1(M) = M''$ d'où $t_{\vec{AB}}(M') = M''$ et par suite $\vec{M'M''} = \vec{AB}$

Exercice n°3



1) $[C\Omega)$ est la bissectrice de $[\widehat{\vec{CA},\vec{CB}}]$ donc $(\widehat{\vec{C\Omega},\vec{CB}}) \equiv \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$

(car ABC isocèle et rectangle en A ; $(\widehat{\vec{CA},\vec{CB}}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $(\vec{BC},\vec{BA}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$)

$[B\Omega)$ est la bissectrice de $[\vec{BC},\vec{BA}]$ donc $(\widehat{\vec{BC},\vec{B\Omega}}) \equiv \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$

d'où le triangle ΩBC est isocèle en Ω et $(\widehat{\vec{\Omega B},\vec{\Omega C}}) \equiv \pi - 2\times\frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

$\Omega B = \Omega C$ et $(\widehat{\vec{\Omega B},\vec{\Omega C}}) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$ d'où Ω est le centre de R ; $R(B) = C$

2) a) $r = S_{(AC)} \circ S_{(A\Omega)}$; $(AC) \cap (A\Omega) = A$ donc r est une rotation de centre A et d'angle $2(\vec{A\Omega},\vec{AC})$

$[A\Omega)$ est la bissectrice de $[\vec{AB},\vec{AC}]$ donc $2(\vec{A\Omega},\vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$r = R(A;\frac{\pi}{2})$

b) $r' = R(C;\frac{\pi}{4}) = S_{(C\Omega)} \circ S_{(CA)}$ car $(CA)\cap(C\Omega) = C$ et $2(\vec{CA},\vec{C\Omega}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

$r' \circ r = S_{(C\Omega)} \circ \underbrace{S_{(CA)} \circ S_{(CA)}}_{Idp} \circ S_{(A\Omega)} = S_{(C\Omega)} \circ S_{(A\Omega)}$

$(C\Omega)\cap(A\Omega) = \Omega$ et par suite $r' \circ r$ est une rotation de centre Ω et d'angle $\theta = 2(\vec{\Omega A},\vec{\Omega C}) = 2\times(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}-\pi) \equiv -\frac{5\pi}{4}\ [2\pi]$

$r' \circ r = R(\Omega;-\frac{5\pi}{4})$

3) $r' \circ r(A) = r'(A) = A'$ car $r(A) = A$ donc $R(\Omega;-\frac{5\pi}{4})(A) = A'$

d'où $\Omega A = \Omega A'$ et $(\vec{\Omega A},\vec{\Omega A'}) \equiv -\frac{5\pi}{4}\ [2\pi]$

$(\widehat{\vec{\Omega A'},\vec{AB}}) = (\widehat{\vec{\Omega A'},\vec{\Omega A}}) + (\vec{\Omega A},\vec{AB}) \equiv \frac{5\pi}{4} + \pi - \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

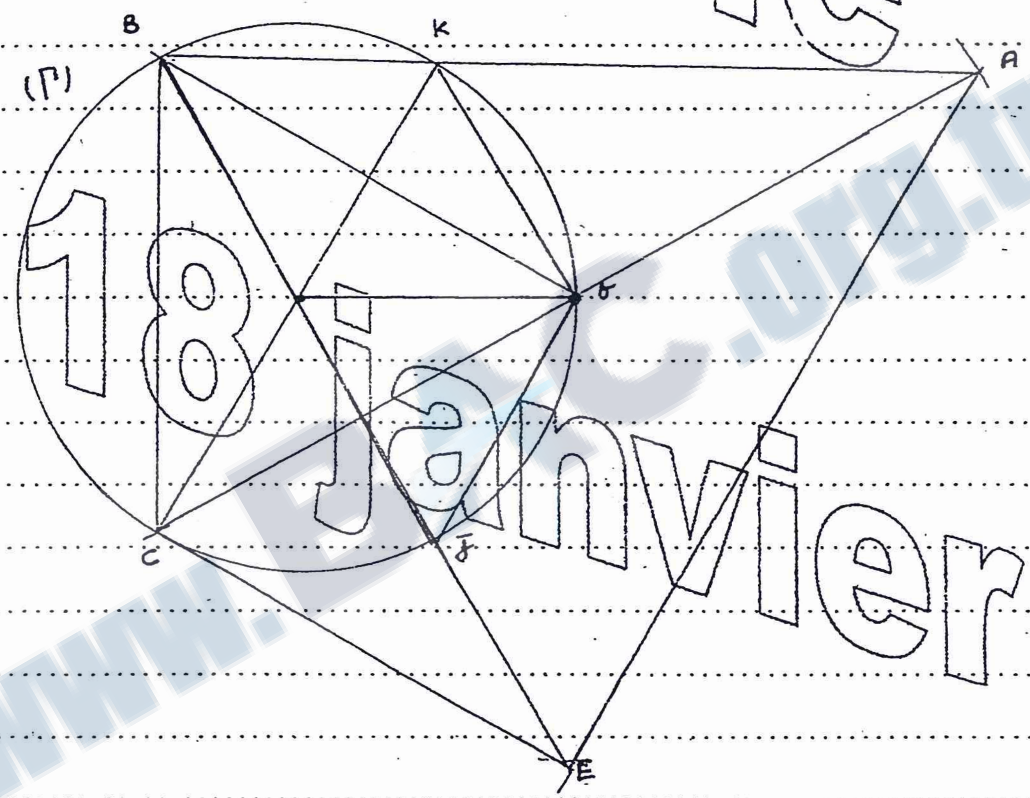
$(\vec{\Omega A'},\vec{AB}) \equiv 0\ [2\pi]$ donc $\vec{\Omega A'}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires et par suite $(\Omega A') // (AB)$

288

Lycée 15 Novembre 1955 Sfax — 4ème Math

Isométrie — Serie 2

Exercice 1



I/ 1) $(OJ) \cap (OK) = O$ donc $R = S_{(OJ)} \circ S_{(OK)}$ est une rotation de centre O et d'angle $\theta = 2(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OJ})$.

$[BJ]$ est un diamètre de (Γ) et $O \in \Gamma$ donc OBJ est un triangle rectangle en O d'où $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OJ}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ or $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ car OBC est équilatéral d'où $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OJ}) \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et par suite $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OJ}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

$[CK]$ est un diamètre de (Γ) et $O \in \Gamma$, donc OKC est un triangle rectangle en O d'où $(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$\theta = 2(\vec{OK},\vec{OJ}) = 2(\vec{OK},\vec{OC}) + 2(\vec{OC},\vec{OJ}) \equiv 2\times\frac{\pi}{2} + 2\times\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

$\theta \equiv \frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$ $\quad R = S_{(OJ)} \circ S_{(OK)} = R_{(O,\frac{4\pi}{3})} = R_{(O,-\frac{2\pi}{3})}$

2) $T = t_{\vec{OB}} = S_{\Delta} \circ S_{(OJ)}$ donc $S_{\Delta}(O) = t_{\vec{OB}} \circ S_{(OJ)}(O) = B$ et par suite

Δ est la médiatrice de $[OB]$; le centre de $(\mathcal{C})$ est un point de Δ ; $C \in \Delta$

car OBC est équilatéral donc $\Delta = (CK)$ d'où $T = t_{\vec{OB}} = S_{(CK)} \circ S_{(OJ)}$

3) $T \circ R = S_{(CK)} \circ \underbrace{S_{(OJ)} \circ S_{(OJ)}}_{id_P} \circ S_{(OK)} = S_{(CK)} \circ S_{(OK)}$

$(CK) \cap (OK) = K$ donc $T \circ R$ est une rotation de centre K et d'angle

$\theta' = 2(\vec{KO},\vec{KC}) \equiv \frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$ d'où $T \circ R = R'_{(K,\frac{4\pi}{3})} = R'_{(K,-\frac{2\pi}{3})}$

II/ 1) $\vec{CE} = \vec{BO}$ donc $OBCE$ est un parallélogramme comme $BO = BC$

d'où $OBCE$ est un losange et par suite $OA = OB = OC = OE$ et ABC

et AEC sont isométriques (rectangles) d'où $AB = AE$ et $(\widehat{\vec{BE},\vec{BA}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

car $(\vec{BC},\vec{BE}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ d'où ABE est équilatéral de centre O.

2) f est une isométrie telle que $f(A) = C$ et $f(O) = B$; $g = t_{\vec{BO}} \circ f$

a) $g(O) = t_{\vec{BO}} \circ f(O) = t_{\vec{BO}}(f(O)) = t_{\vec{BO}}(B) = O$

$g(A) = t_{\vec{BO}} \circ f(A) = t_{\vec{BO}}(f(A)) = t_{\vec{BO}}(C) = E$

b) g est la composée de deux isométries donc g est une isométrie qui admet un point invariant d'où g est la symétrie orthogonale d'axe (OB) la médiatrice de (CE) ou bien g est une rotation de centre O et d'angle $\theta'' = (\widehat{\vec{OA},\vec{OE}}) \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

3) $f = t_{\vec{OB}} \circ g = t_{\vec{OB}} \circ S_{(OB)}$ ou $f = t_{\vec{OB}} \circ R_{(O,-\frac{2\pi}{3})}$

f est une symétrie glissante ou f est une rotation de centre K et d'angle $(-\frac{2\pi}{3})$.

4) $h = t_{\vec{OB}} \circ S_{(OB)}$ et $r = R_{(K,-\frac{2\pi}{3})}$

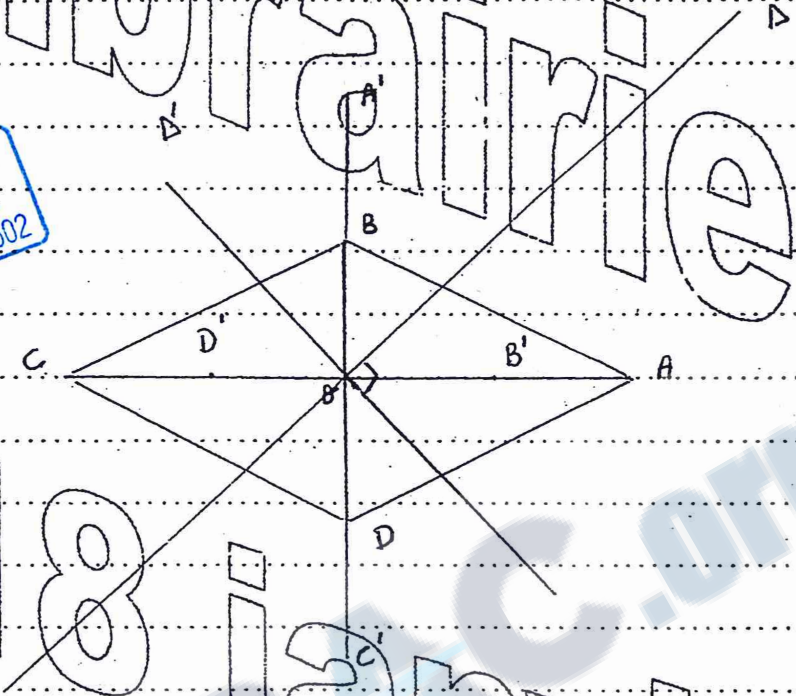
a) $r^{-1} \circ h(O) = r^{-1}(h(O)) = r^{-1}(B) = O$

$r^{-1} \circ h(A) = r^{-1}(h(A)) = r^{-1}(C) = A$

b) $r^{-1} \circ h(O) = O$; $r^{-1} \circ h(A) = A$; $r^{-1} \circ h \neq id_P$ donc $r^{-1} \circ h = S_{(OA)}$

$h(M) = r(M) \Leftrightarrow r^{-1}\circ h(M) = M \Leftrightarrow S_{(OA)}(M) = M \Leftrightarrow M \in (OM)$

Exercice 2



1) • Soit Δ' la perpendiculaire à Δ en O. $S_O = S_\Delta \circ S_{\Delta'}$

$S_\Delta \circ S_O = S_\Delta \circ S_\Delta \circ S_{\Delta'} = S_{\Delta'}$

• $\Delta \cap (AC) = \{O\}$ donc $S_\Delta \circ S_{(AC)}$ est une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ car $S_\Delta \circ S_{(AC)}(A) = A'$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. ($\Delta$ la médiatrice de $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]$ et $(OA) \perp (OB)$.)

• $\Delta \cap (BD) = \{O\}$ donc $S_\Delta \circ S_{(BD)}$ est une rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

Car $S_\Delta \circ S_{(BD)}(B) = B'$ et $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

2) $\mathcal{F} = \{ f \,/\, f$ est une isométrie telque $f(\{A,B,C,D\}) = \{A,B,C,D\}\}$

on a : $O = \text{bary}((A,1),(B,1);(C,1),(D,1))$ car $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

Soit $f \in \mathcal{F}$ donc $f(O) = \text{bary}((f(A),1),(f(B),1),(f(C),1),(f(D),1)) = O$.

d'où f admet un point invariant O ; supposons que $f \neq id$

• Si O est le seule point invariant de f alors f est une rotation.

on a $OA \neq OB$; $OA \neq OD$ donc $f(A) = A$ ou $f(A) = C$ or f admet un seule point fixe donc $f(A) = C$ et par suite f d'angle π càd $f = S_O$

• Si f admet deux points fixes alors f est une symétrie orthogonal.

on a $f(A) = A$ ou $f(A) = C$

• Si $f(A) = A$ alors f est une symétrie orthogonal d'axe (OA).

$f = S_{(AC)}$

• Si $f(A) = C$ alors $f(C) = A$ d'où f est la symétrie orthogonal d'axe (BD) car $ABCD$ est un losange d'où (BD) est la médiatrice de $[AC]$

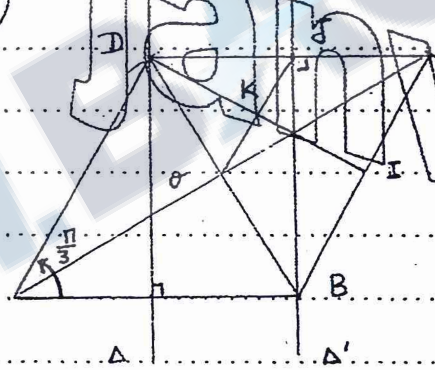
Conclusion $\mathcal{F} = \{id_{\mathcal{P}}; S_O; S_{(AC)}; S_{(BD)}\}$

3) a) $g \in G \Leftrightarrow g(\{A,B,C,D\}) = \{A',B',C',D'\} \Leftrightarrow S_\Delta \circ f(\{A,B,C,D\}) = \{A',B',C',D'\}$

$\Leftrightarrow f(\{A,B,C,D\}) = S(\{A',B',C',D'\}) = \{A,B,C,D\} \Leftrightarrow f \in \mathcal{F}$

b) $G = \{S_\Delta; S_\Delta \circ S_O; S_\Delta \circ S_{(BD)}; S_\Delta \circ S_{(AC)}\} = \{S_\Delta; S_{D'}; R(O,\frac{-\pi}{2}), R(O,\frac{\pi}{2})\}$

Exercice 3



1) f est l'isométrie du plan ; $f(A) = B$; $f(B) = D$ et $f(D) = C$

a) Si f admet un point fixe M alors $f(M) = M$ d'où $AM = BM$ et $DM = DC$

d'où $M \in \Delta$ la médiatrice de $[AB]$ et $M \in \Delta'$ la médiatrice de $[DC]$

or $\Delta \perp (AB)$; $\Delta' \perp (DC)$ et $(AB) // (DC)$ car $ABCD$ est un losange d'où $\Delta // \Delta'$

et $\Delta \cap \Delta' = \phi$ d'où f n'admet pas un point fixe

b) $\vec{AB} \neq \vec{BD}$ et f n'admet un point fixe donc f est une symétrie glissante

2) R est la rotation de centre B et d'angle $\left(\frac{-\pi}{3}\right)$

$R \circ S_{\Delta}(A) = R(S_{\Delta}(A)) = R(B) = B$

$R \circ S_{\Delta}(D) = R(S_{\Delta}(D)) = R(D) = C$ car $BC = CD$ et $(\widehat{\vec{CD}, \vec{CB}}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

d'où BCD est équilatéral directe d'où $BD = BC$ et $(\vec{BD}, \vec{BC}) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi]$

or $f(A) = B$ et $f(D) = C$ Par unicité alors $f = R \circ S_{\Delta}$

3) on a : (BJ) est la bissectrice de $(\widehat{\vec{BC}, \vec{BD}})$ donc $(\widehat{\vec{BJ}, \vec{BC}}) \equiv \frac{-\pi}{6} [2\pi]$

$(BJ) \cap \Delta' = \{B\}$ donc $R = S_{(BC)} \circ S_{\Delta'}$ d'où $f = S_{(BC)} \circ S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$

$\Delta // \Delta'$ donc $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ est une translation de vecteur $\vec{u} = 2\vec{BJ} = \vec{DC}$

$f = S_{(BC)} \circ t_{\vec{DC}} = S_{(BC)} \circ t_{\vec{DI}} \circ t_{\vec{IC}} = S_{(BC)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(OJ)} \circ t_{\vec{IC}}$

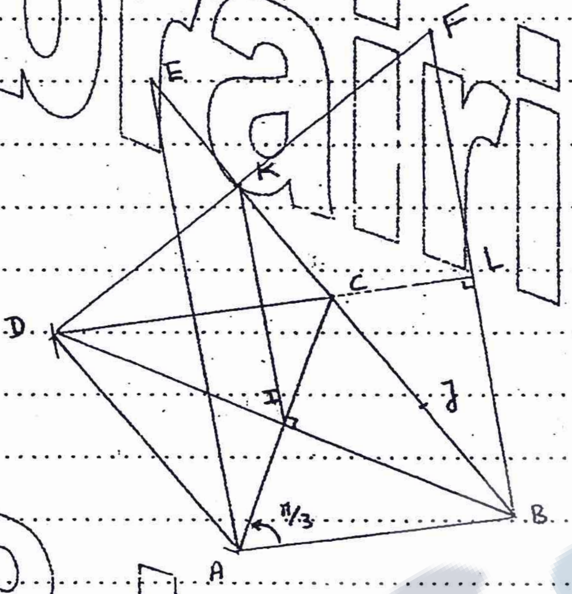
$O = B * D$; $J = D * C$ donc $(OJ) // (BC)$ et $\vec{OJ} = \frac{1}{2}\vec{BC} = \vec{IC}$ et $(DI) \perp (BC)$

car BCD est équilatéral d'où $f = S_{(OJ)} \circ t_{\vec{OJ}} = t_{\vec{OJ}} \circ S_{(OJ)}$

Lycée 15 Novembre 1955 Sfax 293 4ème Math

Isométrie : Serie n° 3

Exercice 1



1) a) $(DB)\cap(AB)=\{B\}$ donc $f=S_{(BD)}\circ S_{(AB)}$ est une rotation de centre B d'angle $\theta=2(\widehat{\vec{BA},\vec{BD}})$. ABCD est un losange donc $BA=BC$ et $(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ donc ABC est équilatérale or $[BD)$ est la bissectrice de $(\widehat{\vec{BA},\vec{BC}})$ donc $\theta\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$ $f=R_{(B;-\frac{\pi}{3})}$

$(BC)\,//\,(AD)$ donc $T=S_{(DA)}\circ S_{(CB)}$ est une translation de vecteur $\vec{u}$

On $J=[BC]$ donc $[AJ]$ est une hauteur de ABC d'où $\vec{u}=2\vec{JA}$

$T=t_{2\vec{JA}}$

b) $f(D)=F$ donc $R_{(B;-\frac{\pi}{3})}(D)=F$ donc $BD=BF$ et $(\widehat{\vec{BD},\vec{BF}})\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$ d'où BDF est équilatéral or $(\widehat{\vec{BD},\vec{BK}})\equiv-\frac{\pi}{6}[2\pi]$ d'où $[BK)$ est la bissectrice de $(\widehat{\vec{BD},\vec{BF}})$ donc (BC) est la médiatrice $[DF]$: $S_{(BC)}(D)=F$

2) $R=T\circ f$

a) $R(D)=T\circ f(D)=T(f(D))=T(F)=S_{(DA)}\circ S_{(CB)}(F)=S_{(DA)}(D)=D$

b) R est une isométrie fixe D donc R est une rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

3) a) $AC=CB=CE$ car $S_C(B)=E$ et $AC\neq u$ donc il existe un unique

antidéplacement g tel que $g(A)=C$ et $g(C)=E$

b) $(g\circ g)(A)=g(g(A))=g(C)=E$ donc $g\circ g\neq id_P$ d'où g est une symétrie glissante. Soit $\vec{u}$ le vecteur directeur de l'axe Δ de g

$g\circ g=t_{2\vec{u}}$ donc $\vec{AE}=2\vec{u}$ et par suite $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{AE}$

$g(A)=C$ donc $I=A*C$ est un point de Δ ; $g(C)=E$ donc $K=E*C$ est un point de Δ d'où $\Delta=(IK)$ .... $g=S_{(IK)}\circ t_{\frac{1}{2}\vec{AE}}=t_{\frac{1}{2}\vec{AE}}\circ S_{(IK)}$

$I=A*C$; $K=C*E$ donc $\frac{1}{2}\vec{AE}=\vec{IK}$

c) $h=S_{(IK)}\circ t_{\vec{AC}}\circ t_{\vec{AD}}\circ S_{(IK)}=S_{(IK)}\circ t_{\vec{AC}}\circ t_{\vec{BC}}\circ S_{(IK)}$ or $\vec{BC}=\vec{CE}$

$h=S_{(IK)}\circ t_{\vec{AC}}\circ t_{\vec{CE}}\circ S_{(IK)}=S_{(IK)}\circ t_{\vec{AE}}\circ S_{(IK)}=S_{(IK)}\circ t_{\frac{1}{2}\vec{AE}}\circ t_{\frac{1}{2}\vec{AE}}\circ S_{(IK)}$

$h=g\circ g=t_{\vec{AE}}$

4) φ est l'isométrie du plan $\varphi(D)=B$; $\varphi(C)=A$ et $\varphi(E)=C$

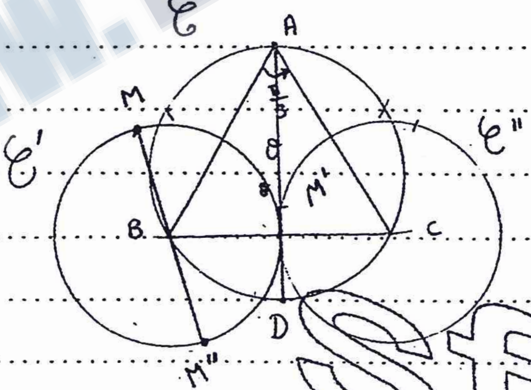
a) $\varphi\circ g(A)=\varphi(g(A))=\varphi(C)=A$; $\varphi\circ g$ est un déplacement ; $\varphi\circ g(B)=\varphi(D)=B$

$\varphi\circ g(C)=\varphi(g(C))=\varphi(E)=C$ donc $\varphi\circ g$ admet 3 points fixes A, C et B

d'où $\varphi\circ g=id_P$ et par suite $\varphi=g^{-1}$ $\left(t_{\vec{IJ}}(B)=B*F=L \text{ et } S_{(IJ)}(L)=D\right)$

b) $\varphi=g^{-1}=(S_{(IK)}\circ t_{\vec{IK}})^{-1}=t_{\vec{KI}}\circ S_{(IK)}=S_{(IK)}\circ t_{\vec{KI}}$

Exercice 2



1/

Soit $f=R_{(C,\frac{\pi}{3})}\circ t_{\vec{BC}}$ .... f est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{3}$ donc f est une rotation de centre Ω .... $f(B)=R_{(C,\frac{\pi}{3})}\circ t_{\vec{BC}}(B)=R_{(C,\frac{\pi}{3})}(C)=C$

d'où $\Omega B = \Omega C$ et $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ par unicité : $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

donc $\Omega = A$ d'où $f = R_{(A, \frac{\pi}{3})}$

$f(B) = C$; $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ sont deux cercles de centres respectives B et C

et de même rayon donc $f(\mathcal{C}') = \mathcal{C}''$; $M \in \mathcal{C}'$; $f(M) = M_1 \in \mathcal{C}''$

donc $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM_1}) \equiv (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM'})\ [2\pi]$ d'où $\overrightarrow{CM_1}$ et $\overrightarrow{CM'}$ sont colinéaires

et de même sens d'où $f(M) = M'$ et par suite la médiatrice de $[MM']$ passe par A

2) $R_{(D, \frac{2\pi}{3})}(M') = M''$ donc $DM' = DM''$ et $(\overrightarrow{DM'}, \overrightarrow{DM''}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

$R_{(A, \frac{\pi}{3})}(M) = M'$ donc $AM = AM'$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Soit $g = R_{(D, \frac{2\pi}{3})} \circ R_{(A, \frac{\pi}{3})}$ est un déplacement d'angle π donc

g est une Symétrie orthogonale de Centre w

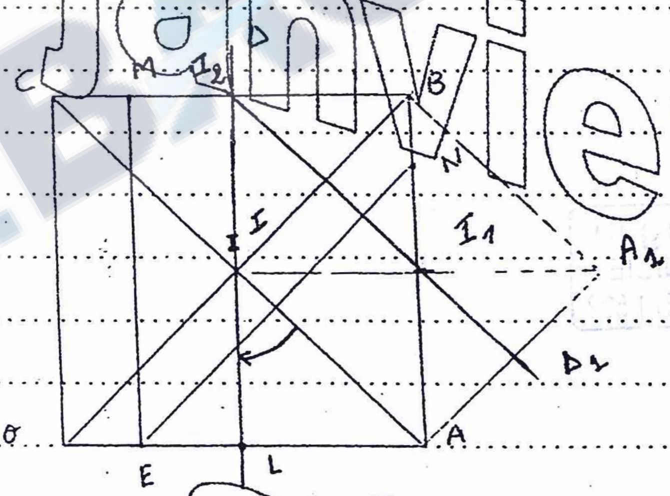
$g(M) = R_{(D, \frac{2\pi}{3})} \circ R_{(A, \frac{\pi}{3})}(M) = R_{(D, \frac{2\pi}{3})}\left(R_{(A, \frac{\pi}{3})}(M)\right) = R_{(D, \frac{2\pi}{3})}(M') = M''$

$g(B) = R_{(D, \frac{2\pi}{3})} \circ R_{(A, \frac{\pi}{3})}(B) = R_{(D, \frac{2\pi}{3})}(C) = B$ car $DB = DC$

et $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ d'où $w = B$

$B = M * M''$

Exercice 3



1) a) $(OC) \parallel (ME)$ et $(OE) \parallel (CM)$ donc OEMC est un parallélogramme donc $CM = OE$

on a : $(OB) \parallel (EN)$ D'après thalès : $\frac{OE}{OA} = \frac{BN}{BA}$ or OABC est un carré

donc $OA = BA$ d'où $OE = BN$ et par suite $CM = BN$, $BC \neq 0$ donc

il existe un unique déplacement f tel que $f(C) = B$ et $f(M) = N$

θ l'angle de f ; $\theta = (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{BN}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BA}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ d'où f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$

b). soit Ω le centre de f comme $f(C) = B$ donc $\Omega C = \Omega B$ et $(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega B}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ d'où ΩCB est isocèle rectangle indirecte or ICB ainsi d'où $\Omega = I$

$f = R(I, -\frac{\pi}{2})$ or $IB = IA$ et $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $f(B) = A$

2) soit $L = O * A$; $I_2 = B * C$ et $\Delta = (L I_2)$ est la médiatrice de $[OA]$

$S_\Delta \circ S_{(AC)}$ est une rotation de centre $I = \Delta \cap (AC)$ et d'angle $2(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IL}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ car IOA est isocèle et rectangle en I et $[IL)$ la bissectrice de $[\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IO}]$ d'où $S_\Delta \circ S_{(AC)} = f = R(I, -\frac{\pi}{2})$

$f \circ S_{(AC)} = S_\Delta \circ \underbrace{S_{(AC)} \circ S_{(AC)}}_{id_P} = S_\Delta$

3) $\Delta \perp (OA)$; $(AB) \perp (OA)$ donc $\Delta // (AB)$ d'où $S_{(AB)} \circ S_\Delta$ est une translation de vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{LA} = \overrightarrow{OA}$

$S_{(AB)} \circ f \circ S_{(AC)} = S_{(AB)} \circ S_\Delta = t_{\overrightarrow{OA}}$

4)a) g est un antidéplacement telque $f(C) = B$ et $g(M) = N$

on a : $g(C) = B$ et $g(M) = N$ donc $g((CM)) = (BN)$; $B \in (CM)$ donc $g(B) = B' \in g((CM)) = (BN)$ comme $CB = CM + MB$ alors $BB' = BN + NB'$ d'où $N \in [BB']$ et $BB' = BC = BA$ et par suite $N \in [BA] \cap [BB']$ et $BB' = BA$ et par suite $B' = A$ càd $g(B) = A$

$g \circ g(C) = g(g(C)) = g(B) = A$ donc $g \circ g \neq id_P$ d'où g est une symétrie glissante

b) $g = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta_1} = S_{\Delta_1} \circ t_{\vec{u}}$; $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ_1

$g \circ g = t_{2\vec{u}}$ donc $t_{2\vec{u}}(C) = A$ d'où $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$; $I_2 = C * B$; $I_1 = B * A$

$\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{I_2 I_1}$

$g(B) = A$ donc $I_1 = B * A$ est un point de Δ_1

$g(C) = B$ donc $I_2 = C * B$ est un point de Δ_1

d'où $\Delta_1 = (I_1 I_2)$ et $g = t_{\overrightarrow{I_2 I_1}} \circ S_{(I_2 I_1)} = S_{(I_2 I_1)} \circ t_{\overrightarrow{I_2 I_1}}$

5) $f \circ g$ est la composée d'un déplacement et un antidéplacement

donc $f \circ g$ est un antidéplacement. $f \circ g(C) = f(g(C)) = f(B) = A$

si $f \circ g$ est une symétrie orthogonale alors $f \circ g = S_{(AC)}$ d'où

$f = S_{(AC)} \circ g^{-1} = S_{(AC)} \circ S_{(I_1I_2)} \circ t_{\overrightarrow{I_1I_2}}$ comme $(AC) // (I_1I_2)$

alors $S_{(AC)} \circ S_{(I_1I_2)}$ est une translation de f est une translation

ce qui est contradictoire $f = R(I, \frac{\pi}{2})$

Conclusion $f \circ g$ est une symétrie glissante

$g(I) = S_{(I_1I_2)} \circ t_{\overrightarrow{I_2I_1}}(I) = S_{(I_1I_2)}(t_{\overrightarrow{IA}}(I)) = S_{(I_1I_2)}(A) = A_1$; $A_1 = S_{I_1}(I)$

$f(A_1) = A''$; $A'' = S_L(I)$

$f \circ g(I) = A''$; $I * A'' = L$ est un point de l'axe Δ' de $f \circ g$

$(f \circ g)(C) = A$; $C * A = I$ est un point de l'axe Δ' de $f \circ g$

donc $\Delta' = (IL) = \Delta$; $f \circ g = S_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$, $\vec{u}$ vecteur directeur de Δ

$(f \circ g)(C) = A = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta(C) = t_{\vec{u}}(B)$ donc $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$

$f \circ g = S_\Delta \circ t_{\overrightarrow{BA}} = t_{\overrightarrow{BA}} \circ S_\Delta$

Autrement

$g(B) = A$ et $f(A) = 0$ donc $f \circ g(B) = 0$; $M \in [CB]$; $CM + MB = CB$

si $f \circ g(M) = M'$ alors $M' \in [OA]$ et $AM' + M'O = OA$ et $CM = AM' = OE$

d'où $M' = S_\Delta(E) = t_{\overrightarrow{BA}} \circ S_\Delta(M)$ et $t_{\overrightarrow{BA}} \circ S_\Delta(C) = A$ par unicité

$f \circ g = t_{\overrightarrow{BA}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\overrightarrow{BA}}$